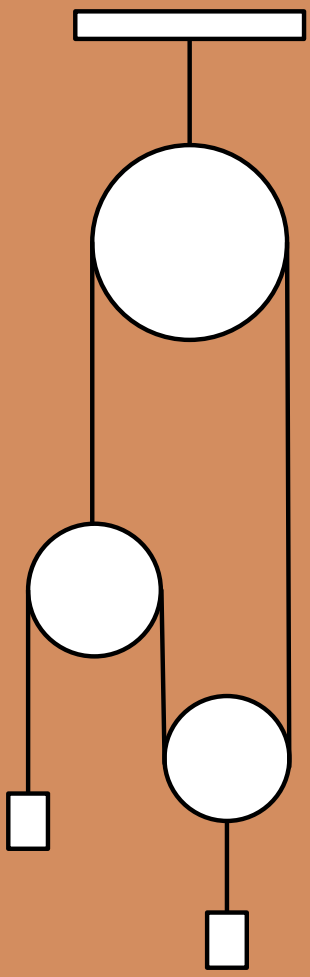
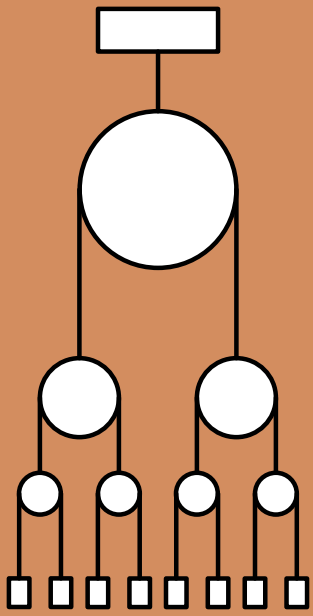
B.B. Bújovtsev, V.D. Krívchenkov,
G.Ya. Miákishev, I.M. Saráeva

PROBLEMAS SELECCIONADOS DE FÍSICA ELEMENTAL





Editorial Mir Moscú

ИЗДАТЕЛЬСТВО МИР

Б. Б. Буховцев,

В. Д. Кривченков,

Г. Я. Мякишев,

И. М. Сараева

Сборник задач по элементарной физике

Издательство «Наука» Москва

B. B. Bújovtsev,
V. D. Krívchenkov,
G. Ya. Miákishev,
I. M. Saráeva

Problemas seleccionados de física elemental

Editorial Mir Moscú

Traducido al español por
Marina Kostrítsina

На испанском языке

Impreso en la URSS. 1979

© Издательство «Наука». 1974
© Traducción al español. Editorial Mir. 1979

Indice

	Problemas	Respuestas y resoluciones
Prefacio	7	
Capítulo I. **Mecánica**	9	227
§ 1. Cinemática del movimiento rectilíneo y uniforme	9	227
§ 2. Cinemática del movimiento rectilíneo irregular y uniformemente alterno	14	236
§ 3. Cinemática del movimiento curvilíneo	18	242
§ 4. Dinámica del movimiento rectilíneo	28	262
§ 5. Principio de conservación de la cantidad de movimiento	40	277
§ 6. Estática	43	282
§ 7. Trabajo y energía	52	298
§ 8. Dinámica del movimiento curvilíneo	61	313
§ 9. Ley de gravitación universal	74	333
§ 10. Hidro- y aerostática	77	340
§ 11. Hidro- y aerodinámica	89	350
Capítulo II. **Calor. Física molecular**	97	358
§ 12. Expansión térmica de los cuerpos sólidos y líquidos	97	358
§ 13. Principio de conservación de la energía. Conductibilidad térmica	98	361
§ 14. Propiedades de los gases	102	364
§ 15. Propiedades de los líquidos	108	374
§ 16. Transformaciones mutuas de cuerpos sólidos y líquidos	114	382
§ 17. Elasticidad y resistencia	115	282
§ 18. Propiedades de los vapores	119	384

Capítulo III. **Electricidad y magnetismo** . . . 123 387
§ 19. Electrostática 123 387
§ 20. Corriente eléctrica continua 136 414
§ 21. Corriente eléctrica en los gases y el vacío 150 440
§ 22. Campo magnético de la corriente. Acción del campo magnético sobre la corriente y las cargas en movimiento 156 447
§ 23. Inducción electromagnética. Corriente alterna 163 456
§ 24. Máquinas eléctricas 175 471

Capítulo IV. **Oscilaciones y ondas** 179 479
§ 25. Oscilaciones mecánicas 179 479
§ 26. Oscilaciones eléctricas 187 490
§ 27. Ondas 189 493

Capítulo V. **Optica geométrica** 193 498
§ 28. Fotometría 193 498
§ 29. Leyes fundamentales de la óptica . . . 194 500
§ 30. Lentes y espejos esféricos 202 515
§ 31. Sistemas e instrumentos ópticas . . . 207 524

Capítulo VI. **Optica física** 215 546
§ 32. Interferencia de la luz 215 546
§ 33. Difracción de la luz 221 554
§ 34. Dispersión de la luz y los colores de los cuerpos 225 560

Prefacio

El presente compendio de problemas de física fue confeccionado a base del material expuesto en el libro «Curso de Física elemental», revisado por el académico G. S. Landsberg. Por eso el contenido, el nivel de sus problemas y el carácter de la distribución del material corresponden en lo fundamental al curso indicado. El capítulo de Física atómica no fue incluido debido al hecho de que los problemas propuestos en el propio curso citado antes ilustran de forma suficiente el material explicado. Los problemas referentes a este tema figuran en otros capítulos.

Una atención especial ha sido prestada a problemas de mayor complejidad, porque éstos requieren una profunda comprensión de las leyes físicas fundamentales y un hábito de utilizarlas en diferentes condiciones. Todos los problemas difíciles van acompañados de una resolución detallada. Además, para desarrollar la capacidad y el hábito en la solución correcta de problemas físicos, algunos de los problemas simples también son dados con resoluciones detalladas.

Una parte de problemas de este compendio han sido propuestos en exámenes de ingreso en la facultad de física de la Universidad Estatal M. Lomonósov de Moscú.

Fueron incluidos también algunos problemas del curso superior. La mayoría de los problemas son originales.

Los autores

PROBLEMAS

Capítulo I

Mecánica

§ 1. CINEMATICA DEL MOVIMIENTO RECTILINEO Y UNIFORME

1. Una lancha a motor que va río arriba se encontró con unas balsas que flotaban aguas abajo. Pasada una hora después de este encuentro el motor de la lancha paró. La reparación de éste duró 30 minutos y durante todo ese tiempo la lancha seguía libremente la corriente del río.
   Arreglado el motor, la lancha comenzó a ir río abajo con la misma velocidad con relación a la corriente del agua y alcanzó las balsas a una distancia de $S = 7.5$ km del punto de su primer encuentro. Determinar la velocidad de la corriente del río, considerándola constante.

2. Dos trenes eléctricos salieron de Moscú a Púshkino con un intervalo de $t = 30$ km/h. ¿Con qué velocidad u iba el tren en dirección a Moscú, si él encontró dos trenes eléctricos, uno después de otro a un intervalo de $\tau = 4$ minutos?

3. Un ingeniero trabaja en una fábrica que se encuentra en las cercanías de la ciudad. Cada vez que llega el tren a la estación ferroviaria venía el coche de la fábrica que conducía al ingeniero para el lugar de trabajo. Una vez el ingeniero llegó a la estación una hora antes de lo habitual y sin esperar el coche fue

a pie a la fábrica. En el camino encontró el coche y llegó a la fábrica 10 minutos antes de lo corriente. ¿Cuánto tiempo caminó el ingeniero antes de encontrar el coche?
(Resolver el problema gráficamente).

4. Tres turistas que poseen una bicicleta tienen que llegar al centro turístico en el plazo más corto (el tiempo se cuenta por la llegada al centro del último turista). La bicicleta puede llevar sólo a dos personas y por eso el tercer turista tiene que ir a pie. El ciclista lleva al segundo turista hasta un punto determinado del camino, de donde éste continúa andando y el ciclista regresa para coger al tercer turista. Hallar la velocidad media de los turistas, siendo la velocidad del transeunte $v_1 = 4$ km/h y la del ciclista $v_2 = 20$ km/h.

5. El correo entre dos atracaderos M y K se realiza por medio de los gasolineras. En un tiempo determinado las gasolineras salen de sus atracaderos, se encuentran, se cambian de correspondencias y regresan a sus atracaderos. Si las gasolineras parten de sus atracaderos simultáneamente, la primera que sale del punto M tarda 3 horas en el camino de ida y vuelta y la segunda que sale del punto K gasta una hora y media. Las velocidades de ambas gasolineras respecto al agua son iguales. Determinar gráficamente cuánto tiempo más tarde debe salir la gasolinera del punto M que la gasolinera del punto K para que ambas estén en camino el mismo tiempo.

6. Valiéndose de las condiciones del problema anterior, determinar: la velocidad de la gasolineras con relación al agua, la velocidad de la corriente del río y el lugar de encuentro de las gasolineras en el caso si éstas parten simultáneamente de sus atracaderos. La distancia entre los atracaderos es de 30 km.

7. Del atracadero C al T navega un bote de remos; su velocidad respecto al agua es $v_1 = 3$ km/h. Del atracadero T en dirección al atracadero C simultáneamente con el bote sale una gasolinera, cuya velocidad con relación al agua es $v_2 = 10$ km/h. Durante el movimiento del bote entre los atracaderos la gasolinera

cubre cuatro veces esta distancia y llega al atracadero T al mismo tiempo que el bote. Determinar el sentido de la corriente.

8. Un nombre de altura h pasa cerca de un farol que está suspendido a la altura H sobre la tierra. Encontrar la magnitud y la dirección de la velocidad del movimiento de la sombra proyectada por la cabeza del hombre sobre la tierra, siendo la velocidad del hombre v.

9. Dos velas, cuyas alturas h en el momento inicial eran iguales, se encuentran a una distancia a la una de la otra. La distancia entre cada una de las velas y la pared más próxima es también igual a a (fig. 1).

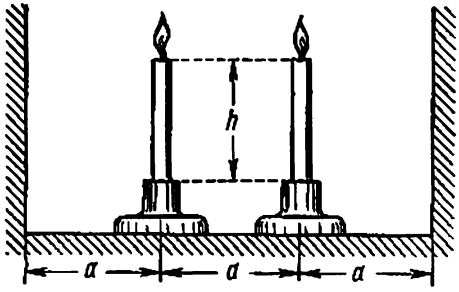


Fig. 1

¿Con qué velocidad se mueven las sombras de las velas por las paredes si una vela se consume durante el tiempo t_1 y la otra durante el tiempo t_2?

10. Un hombre se encuentra en la orilla de un lago en el punto A. Le es indispensable en un tiempo sumamente corto llegar al punto B que se encuentra en el lago (fig. 2). La distancia entre el punto B y la orilla es $BC = d$ y la distancia $AC = S$. La velocidad del movimiento del hombre en el agua es v_1 y por la orilla v_2 ($v_2 > v_1$). ¿De qué modo debe ir el hombre: nadar del punto A por la recta AB o primeramente correr por la orilla una cierta distancia y ya después nadar en dirección al punto B?

11. Un autobús va por la carretera con velocidad $v_1 = 16$ m/s. Un hombre se encuentra a una distancia

$a = 60$ m de la carretera y $b = 400$ m del autobús. ¿En qué dirección debe correr el hombre para llegar a un cierto punto de la carretera juntamente con el

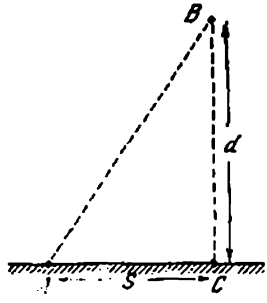


Fig. 2

autobús o antes de éste? El hombre puede correr con una velocidad $v_2 = 4$ m/s.

12. ¿Qué velocidad mínima debe desarrollar el hombre (véase el problema 11) para poder alcanzar el autobús? ¿En qué dirección debe correr el hombre en este caso?

13. En un momento dado (véase el problema 11) el autobús se encuentra en el punto A y va por la carretera recta AE. Hallar el lugar geométrico de los puntos donde el hombre puede encontrarse para alcanzar el autobús?

14. Un hombre debe salir en un bote del punto A al punto B que se encuentra en la orilla opuesta del río (fig. 3).

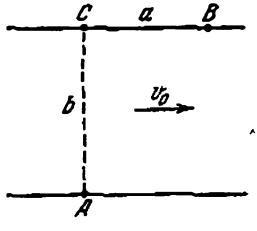


Fig. 3

La distancia BC es igual a a. La anchura del río $AC = b$. ¿Con qué velocidad mínima u respecto al

agua debe moverse el bote para llegar al punto B? La velocidad de la corriente del río es v_0.

15. Del punto A situado en la orilla de un río es necesario llegar al punto B, moviéndose siempre por la recta AB (fig. 4). La anchura del río AC es igual a 1 km;

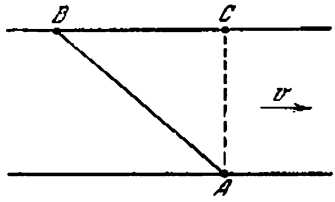


Fig. 4

la distancia $BC = 2$ km; la velocidad máxima del bote con relación al agua es $u = 5$ km/h y la velocidad de la corriente es $v = 2$ km/h. ¿Es posible cubrir la distancia AB en 30 minutos?

16. Por un río del punto A al punto B que se encuentra en la orilla opuesta, a lo largo de la recta AB que forma un ángulo α con la línea de la orilla, navega una gasolinera (fig. 5). El viento sopla con una velo-

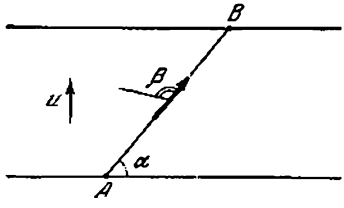


Fig. 5

cidad u en dirección perpendicular a la orilla. La bandera en el mástil de la gasolinera forma un ángulo β con la dirección del movimiento de ésta. Determinar la velocidad de la gasolinera respecto a la orilla. ¿Es posible con los datos de este problema determinar la velocidad de la corriente del río?

17. Dos automóviles van con velocidades constantes v_1 y v_2 por las carreteras que cruzan bajo un ángulo

α. Determinar el valor y el sentido de la velocidad de un automóvil con relación al otro. ¿Al cabo de qué tiempo, después de su encuentro en el cruce, la distancia entre los automóviles será igual a S?

18. Los automóviles (véase el problema 17) no se encontraron en el cruce de las carreteras; es más, el segundo automóvil pasó la encrucijada en un intervalo de tiempo τ después del primero. ¿Cuál fue la distancia mínima entre los automóviles?

19. Dos rectas cruzadas se mueven de modo progresivo en direcciones opuestas con velocidades v_1 y v_2, perpendiculares a las rectas correspondientes. El ángulo entre las rectas es igual a α. Determinar la velocidad del punto de intersección de estas rectas.

§ 2. CINEMATICA DEL MOVIMIENTO RECTILINEO IRREGULAR Y UNIFORMEMENTE ALTERNO

20. Determinar la velocidad media y la aceleración media de un punto durante 5 y 10 segundos, si su movimiento está dado por el gráfico de velocidad (fig. 6).

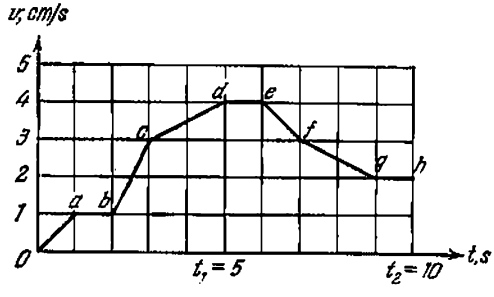


Fig. 6

21. Un hombre que se encuentra en la costa abrupta de un lago, tira mediante una cuerda de un bote que está en el agua. La velocidad con que el hombre tira de la cuerda es constante e igual a v. ¿Qué velocidad tendrá el bote en el momento en que el ángulo entre la cuerda y la superficie del agua será igual a α?

22. Una fuente de luz puntual S se encuentra a una distancia l de la pantalla vertical AB. De la fuente a la

pantalla por la recta SA se mueve de modo progresivo, con una velocidad constante v, un objeto opaco de altura h. Determinar la velocidad instantánea del desplazamiento del extremo superior de la sombra del objeto por la pantalla (fig. 7).

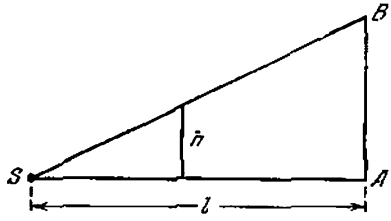


Fig. 7

23. La coordenada de un punto que se mueve por línea recta a lo largo del eje x, varía con el tiempo según la ley $x = 11 + 35t + 41t^2$ (x es dado en centímetros y t, en segundos). Determinar la velocidad y la aceleración del punto.

24. Un carrito de demostraciones se movía a lo largo de una regla con aceleración constante. En el momento cuando el cronómetro indicaba $t_1 = 7$s, el carrito se encontraba en el punto $x_1 = 70$ cm; en el momento $t_2 = 9$ s, en el punto $x_2 = 80$ cm y en el momento $t_3 = 15$ s, en el punto $x_3 = 230$ cm. ¿Qué aceleración tendrá el carrito?

25. En las figuras 8 y 9 están representados: el gráfico de la velocidad de un cuerpo y el gráfico de la variación de la coordenada del cuerpo (parábola) en función del tiempo. El comienzo de la lectura del tiempo en ambos gráficos coincide. ¿Serán iguales los movimientos representados en dichos gráficos?

26. Los puntos A y B se encuentran el uno del otro a una distancia de $l = 4$ km. Del punto A en dirección al punto B salió un automóvil que durante todo el camino se movía uniformemente. Al mismo tiempo del punto B en dirección al punto A salió otro automóvil con velocidad inicial $v_0 = 32$ m/s, que tenía una acelera-

ción constante $a = 0{,}2$ m/s² con la misma dirección que la velocidad del primer automóvil. Es sabido que en el camino los dos automóviles adelantaron el

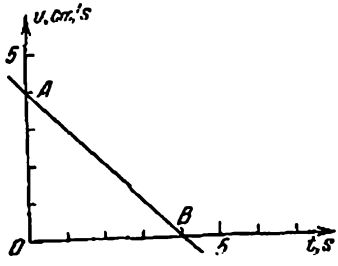


Fig. 8

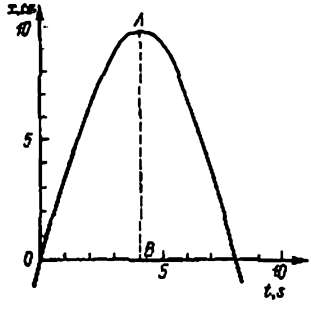


Fig. 9

uno al otro dos veces. ¿Dentro de qué límites se encuentra la velocidad del primer automóvil?

27. Una bola cae libremente de una altura H sobre un soporte elástico horizontal. Construir el gráfico de la variación de la coordenada y de la velocidad de la bola en función del tiempo, menospreciando el tiempo del choque. El choque se considera absolutamente elástico.

28. Sobre una placa elástica caen libremente dos bolas de acero. La primera cae desde una altura $h_1 = 44$ cm y la segunda, transcurrido un lapso τ después de la primera, siendo la altura $h_2 = 11$ cm. Al pasar cierto tiempo, las velocidades de las bolas coinciden tanto por su valor como por la dirección. Determinar el lapso τ y el intervalo de tiempo, durante el cual las velocidades de ambas bolas serán iguales. Las bolas no chocan.

29. ¿Durante que tiempo un cuerpo que cae libremente sin velocidad inicial, pasa el enésimo centímetro de su trayecto?

30. De una torre alta se lanzan dos cuerpos uno tras otro, con velocidades v_0, de igual valor. El primer cuerpo

se lanza verticalmente hacia arriba; pasado cierto tiempo τ, se tira el segundo, verticalmente hacia abajo. Determinar la velocidad de los cuerpos uno respecto a otro y la distancia entre ellos en el momento $t > \tau$.

31. Tres puntos A, B y C en el momento inicial están situados en la misma recta horizontal, a distancia igual el uno del otro. El punto A comienza a moverse verticalmente hacia arriba con velocidad constante v, y el punto C, sin velocidad inicial verticalmente hacia abajo con aceleración constante a. ¿De qué modo debe moverse el punto B en dirección vertical para que todos los puntos se encuentren todo el tiempo en una recta? Los puntos empiezan a moverse simultáneamente.

32. Un ascensor se mueve con aceleración a. Un pasajero que se encuentra en el ascensor deja caer un libro. ¿Cuál será la aceleración del libro con relación al piso del ascensor, si: 1) el ascensor sube? y 2) el ascensor baja?

33. Dos automóviles salen de las ciudades A y B, el uno al encuentro del otro, con velocidades y aceleraciones a de iguales valores. La aceleración del automóvil que salió de la ciudad A todo el tiempo tenía dirección hacia A, y la del automóvil que salió de la ciudad B, hacia B. ¿Cuánto tiempo más tarde salió uno de estos automóviles si el tercer automóvil que iba todo el tiempo con la velocidad constante v_1, presenció ambos encuentros de los dos primeros automóviles?

34. Un hombre en un ascensor que se mueve con aceleración a, deja caer una bola de una altura H sobre el piso. Pasado un tiempo τ del comienzo de la caída de la bola, la aceleración del ascensor cambia su signo y después del lapso 2τ la aceleración se hace igual a cero. Luego la bola toca el suelo. ¿A qué altura del suelo del ascensor salta la bola después del choque? Considerar el choque absolutamente elástico.

35. Sobre una cuña, cuyo plano forma un ángulo α con la horizontal, colocaron el cuerpo A (fig. 10). ¿Qué aceleración es necesario transmitir a la cuña en direc-

ción horizontal para que el cuerpo A caiga libremente en dirección vertical hacia abajo?

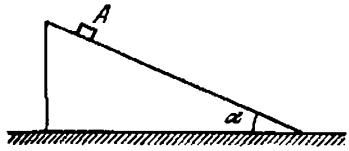


Fig. 10

§ 3. CINEMATICA DEL MOVIMIENTO CURVILINEO

36. Una bola pequeña y pesada fue lanzada en dirección horizontal con una velocidad inicial v_0. Hallar las aceleraciones normal y tangencial de la bola, al pasar un tiempo τ desde el comienzo del movimiento.

37. Determinar la magnitud de la aceleración del cuerpo A que se desliza sin velocidad inicial por el canal

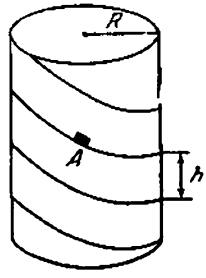


Fig. 11

helicoidal con paso h y el radio R al final de la enésima vuelta (fig. 11). Menospreciar el rozamiento.

38. La velocidad de la corriente del río crece proporcionalmente a la distancia desde la orilla, alcanzando su valor máximo v_0 en el centro del río. Junto a las orillas la velocidad de la corriente es igual a cero. Un bote flota por el río de modo que su velocidad u con relación al agua es constante y perpendicular a la corriente. Hallar la distancia, a la cual será llevado

el bote por la corriente durante el paso si la anchura del río es c. Determinar también la trayectoria del bote.

39. Dos carriles están unidos formando entre sí un ángulo recto. Por ellos se mueven dos carritos unidos mediante una barra articulada de longitud l. El carrito A (fig. 12) comienza a moverse del punto de intersección

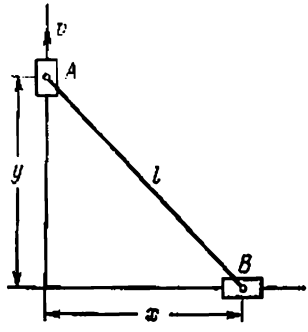


Fig. 12

de los carriles y sube uniformemente con una velocidad v. Determinar la ley del movimiento y la velocidad del carrito B.

40. Un cuerpo fue lanzado con velocidad inicial v_0, bajo un ángulo α con la horizontal. ¿Cuánto tiempo dura este vuelo? ¿A qué distancia del lugar de lanzamiento caerá el cuerpo? ¿Con qué valor del ángulo α la distancia del vuelo será la máxima?
¿A qué altura estará el cuerpo dentro de un intervalo de tiempo τ desde el comienzo del movimiento? ¿Cuáles serán la magnitud y el sentido de la velocidad del cuerpo en este momento? Considerar que τ es mayor que el tiempo de la elevación del cuerpo hasta la altura máxima. Menospreciar la resistencia del aire.

41. Determinar la trayectoria del movimiento del cuerpo lanzado bajo un ángulo respecto a la horizontal (véase el problema 40).

42. Es necesario lanzar desde el suelo una pelota a través de una pared vertical de altura H que se encuentra a

una distancia S (fig. 13). ¿Para qué velocidad inicial mínima esto se realizará? ¿Bajo qué ángulo α con

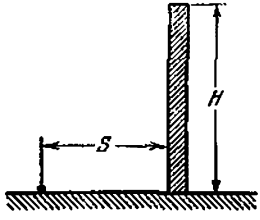


Fig. 13

relación a la horizontal deberá estar dirigida en este caso la velocidad?

43. La prueba de la espoleta de una granada de fragmentación se realiza en el centro del fondo de un pozo cilíndrico de profundidad H. Los fragmentos que se forman durante la explosión y cuyas velocidades no sobrepasan v_0 no deben caer en la superficie de la tierra. ¿Cuál debe ser el diámetro mínimo D del pozo?

44. Un cuerpo fue lanzado al agua desde un despeñadero abrupto de altura H. La velocidad inicial del cuerpo v_0 forma un ángulo α con la horizontal. ¿A qué distancia de la orilla caerá el cuerpo? ¿Dentro de qué tiempo después de comenzar el movimiento, el cuerpo estará a una altura h sobre el agua? ¿Qué velocidad tendrá el cuerpo en el momento de su caída al agua?

45. ¿Bajo qué ángulo respecto a la horizontal es necesario lanzar una piedra desde el despeñadero abrupto del río para que ésta caiga al agua a una distancia máxima de la orilla? La altura del despeñadero es $h_0 = 20$ m y la velocidad inicial de la piedra es $v_0 = 14$ m/s.

46. ¿Con qué velocidad mínima deberá ser lanzado un cuerpo desde la cumbre de una torre de altura h para que éste caiga a una distancia S del pie de la torre?

47. Un objeto lanzado bajo un ángulo α respecto al horizonte se está observando por un anteojo colocado en el punto de lanzamiento. ¿Para qué ángulos α habrán

momentos durante el movimiento del cuerpo cuando su velocidad será perpendicular al eje del anteojo?

48. Un bombardero en picado tira una bomba desde la altura H, estando a una distancia L del objetivo. La velocidad del bombardero es v. ¿Bajo qué ángulo respecto a la horizontal debe picar el bombardero?

49. Una bola cae libremente desde la altura h sobre un plano inclinado que forma un ángulo α con la horizontal (fig. 14).

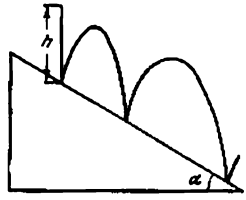


Fig. 14

Encontrar la relación de las distancias entre los puntos, en los cuales la bola saltando toca el plano inclinado. Los choques de la bola con el plano se consideran absolutamente elásticos.

50. Del punto $x = y = 0$ (fig. 15) se tiran simultáneamente dos objetos con la misma velocidad inicial v_0

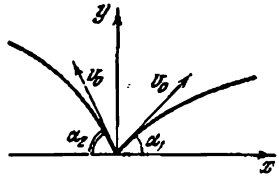


Fig. 15

bajo diferentes ángulos α_1 y α_2 respecto a la horizontal. ¿Cuál será la velocidad del movimiento de los objetos el uno respecto al otro? ¿Cuál será la distancia entre los objetos al pasar un tiempo τ? (El movimiento de los objetos es de avance).

51. De una torre fueron tirados piedras en todas las direcciones posibles con velocidad inicial v_0. Resultó que la

piedra que alcanzó la tierra por una trayectoria más suave, tenía en el momento de la caída un vector de velocidad que formaba un ángulo φ con la horizontal. Determinar la altura de la torre.

52. Una bola elástica se tira desde una mesa de altura h, transmitiéndole cierta velocidad horizontal. En el momento cuando la bola experimentaba uno de los infinitos choques elásticos con el suelo, de la misma mesa fue lanzada horizontalmente otra bola con tal velocidad, que ésta choque con la primera. ¿A qué altura chocaron?

53. Un proyectil se lanza de un cañón con velocidad inicial v_0. Determinar la «zona de seguridad», es decir, el lugar geométrico de todos los puntos del espacio, donde el proyectil no podrá caer.

54. La oruga de un tractor está compuesta de n eslabones. La longitud de cada eslabón es igual a a. Los radios de las ruedas, en las cuales se colocan las orugas, son R. El tractor se mueve con la velocidad v. Se supone que la oruga no se comba.
1) ¿Cuántos eslabones de la oruga se mueven en un momento dado, de un modo progresivo, cuántos reposan (respecto a la tierra) y cuántos eslabones toman parte en el movimiento giratorio?
2) El tractor recorrió un trayecto $S \gg na$. ¿Cuánto tiempo cada eslabón de la oruga se movía progresivamente, cuánto tiempo reposaba y cuánto tiempo participaba en el movimiento giratorio?

55. Para que vire un tractor que se mueve con una velocidad $v_0 = 18$ km/h, el tractorista frena una de las orugas de modo que el eje de la rueda motriz comienza a avanzar con velocidad $v_1 = 14$ km/h. La distancia entre las orugas es $d = 1{,}5$ m.
¿De qué radio será la vuelta que da el centro del tractor?

56. En las montañas puede observarse el siguiente fenómeno: una estrella desaparece rápidamente «a simple vista» tras una cumbre alejada. (Naturalmente, el mismo fenómeno puede observarse también en una planicie si hay una construcción bastante alta y bien alejada.) ¿Con qué velocidad es preciso correr para

ver la estrella durante todo el tiempo a una misma distancia angular de la montaña? La distancia entre el observador y la cumbre de la montaña es de 10 km. La observación se realiza en el polo.

57. Un disco continuo rueda sin deslizamiento por el sector horizontal del camino con una velocidad constante v (fig. 16).

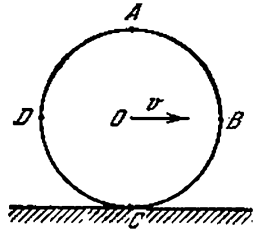


Fig. 16

1) Demostrar que la velocidad lineal de rotación respecto al centro O de cualquier punto del disco que se encuentra en su diámetro exterior es igual a la velocidad del movimiento de traslación del disco.
2) Determinar el valor y el sentido de la velocidad de los puntos A, B, C y D situados en el diámetro exterior del disco respecto a un observador fijo.
3) ¿Qué puntos del disco tienen respecto a un observador fijo la misma velocidad, por su valor absoluto, que el centro del disco?

58. Una varita AB de longitud l se mueve en el plano del diseño (fig. 17) de modo que en un momento de tiempo

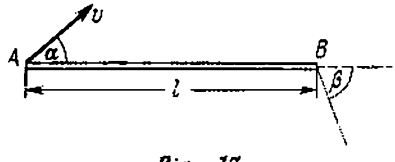


Fig. 17

dado la dirección de la velocidad de su extremo A forma un ángulo α, y la velocidad del extremo B, un ángulo β con la varita. El valor de la velocidad del extremo A es v. Determinar el valor de la velocidad del extre-

mo B. Encontrar la posición del eje fijo perpendicular al plano del diseño con relación al cual la varita gira en el momento de tiempo que se examina, (o sea, hallar la posición del eje instantáneo de rotación de la varita).

59. Representar gráficamente la distribución de las velocidades a lo largo de la varita AB en las condiciones del problema anterior.

60. Muchas hormigas tiran de un pedazo de corteza del árbol que tiene forma de un triángulo equilátero. Se sabe que en cierto momento de tiempo la velocidad del vértice B es igual a v y está dirigida a lo largo de la línea AB y la velocidad del vértice C tiene la dirección de la línea CB. Encontrar la velocidad del vértice C en el mismo momento.

61. Un coche de turismo va por una carretera horizontal tras de un camión. Entre los neumáticos dobles de las ruedas traseras del camión se atrancó una piedra. ¿A qué distancia del camión deberá ir el coche a fin de que la piedra desprendida de las ruedas del camión no dé en el coche? Los dos automóviles van con una velocidad de 50 km/h.

62. En la pantalla cinematográfica se proyecta un carruaje en movimiento. Los radios de las ruedas delanteras del carruaje son $r = 0{,}35$ m y de las ruedas traseras, $R = 1{,}5\ r$. Las ruedas delanteras tienen $N_1 = 6$ rayos. En una cámara de filmación la película gira con una velocidad de 24 cuadros por segundo. Al considerar que las ruedas del carruaje se mueven sin deslizamiento, determinar la velocidad mínima con la cual debe ir el carruaje para que los espectadores tengan la impresión de que las ruedas delanteras del carruaje en la pantalla están inmóviles. ¿Qué número mínimo de rayos N_2 deben tener en este caso las ruedas traseras para que ellas también parezcan inmóviles?

63. ¿Para qué velocidades del movimiento del carruaje que va de izquierda a derecha (véase los datos del problema 62) los espectadores tendrán la impresión de que: 1) los rayos de las ruedas giran en sentido antihorario? 2) los rayos de las ruedas delanteras y traseras giran en sentidos opuestos?

El número de los rayos de las ruedas delanteras y traseras es el mismo e igual a 6.

64. Una bobina que consta de la parte cilíndrica y de dos discos iguales y continuos rueda con una velocidad constante v, sin deslizamiento mediante su parte cilíndrica por una barra áspera, colocada horizontalmente (fig. 18). El radio de la parte cilíndrica es r,

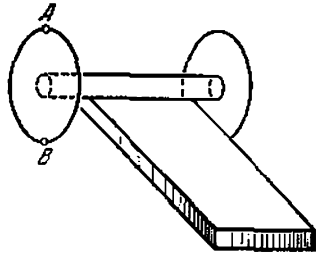


Fig. 18

de los discos es R. ¿Qué velocidad tienen los puntos A y B que se encuentran en el diámetro exterior de uno de los discos?

65. ¿Qué puntos de los discos (véase el problema anterior) tienen una velocidad instantánea, igual por su valor a la velocidad del eje de la bobina?

66. Trazar las trayectorias de los puntos A, B y C de la bobina (fig. 19) que rueda mediante su parte cilíndrica por una barra sin deslizamiento.

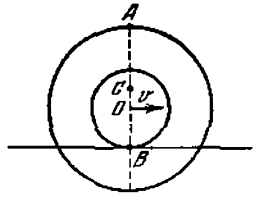


Fig. 19

67. Un cojinete de bolas sostiene el extremo del eje de un árbol que gira con velocidad angular ω. El diámetro

del eje del árbol es d (fig. 20) y el del aro del cojinete es D. Encontrar la velocidad lineal del movimiento del centro de una de las bolas si el aro es fijo y si éste

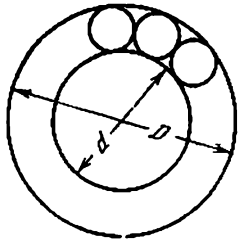


Fig. 20

gira con velocidad angular Ω. Considerar que en ambos casos las bolas giran por el árbol y el aro sin deslizamiento.

68. Un cono rueda sin deslizamiento por un plano. El eje del cono gira con una velocidad ω en torno de la vertical que pasa por su vértice. La altura del cono es h y el ángulo formado por el eje y la generatriz es α. ¿Cuál es la velocidad angular de rotación del cono alrededor de su eje? Determinar la velocidad lineal de un punto arbitrario del diámetro de la base del cono situado en el plano vertical.

69. En la fig. 21 está representada esquemáticamente la diferencial de un automóvil necesaria para que las

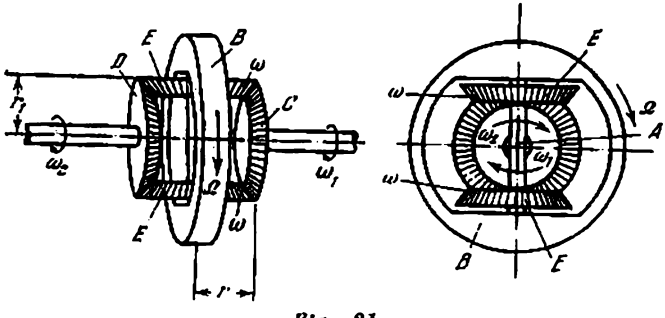


Fig. 21

ruedas motrices del automóvil no deslicen al pasar por un sector curvilíneo del trayecto. (No obstante,

las ruedas deben girar con diferentes velocidades.) El motor hace girar la rueda B, con la que está rígidamente unido el eje A. Alrededor del eje puede girar libremente un par de engranajes cónicos E. Este par de engranajes está unido por medio de dientes con otro par de engranajes cónicos por los cuales este primero gira. El eje de las ruedas motrices del automóvil (como regla, las traseras) está cortado por el medio y en los extremos del eje están colocados los engranajes C y D. Estas mitades del eje pueden girar con diferentes velocidades angulares, siempre unidos con la diferencial. Hallar la relación entre las velocidades angulares Ω, ω, ω_1 y ω_2 de la diferencial, si los radios de los engranajes E son iguales a r y los radios de los engranajes D y C son iguales a r_1.

70. Cuatro tortugas se encuentran en los ángulos de un cuadrado con lado a. Las tortugas empiezan a andar simultáneamente con una velocidad v, constante por su magnitud, dirigiéndose la primera tortuga todo el tiempo a la segunda, la segunda a la tercera, la tercera a la cuarta y la cuarta a la primera.
¿Se encontrarán o nó las tortugas? Si se encuentran ¿después de cuánto tiempo ocurrirá esto?

71. Desde un sector rectilíneo de la orilla salieron al mismo tiempo dos buques A y B que inicialmente se encontraban a una distancia $a = 3$ km el uno del otro. El buque A navegaba por una recta perpendicular a la orilla. El buque B siempre mantenía el rumbo hacia el primer buque A, teniendo en cada momento la misma velocidad que el buque A. Es evidente que dentro de un intervalo del tiempo suficientemente grande el segundo buque irá detrás del primero, encontrándose a cierta distancia de éste último. Hallar esta distancia.

72. Dos placas de acero M y N de altura H (fig. 22) están en la arena. La distancia entre las placas es $l = 20$ cm Sobre la placa M rueda uniformemente una bola, cuya velocidad no se conoce exactamente. No obstante se sabe que esta velocidad está en el intervalo de 200 cm/s a 267 cm/s.
1) ¿Para qué altura H no se puede predecir la dirección de la velocidad de la bola por la horizontal en el

momento de su caída en la arena? (Hasta su caída en la arena la bola chocó contra la placa N por lo menos una vez.)

2) ¿Para qué altura mínima de las placas no se puede pronosticar el lugar de caída de la bola en el sector

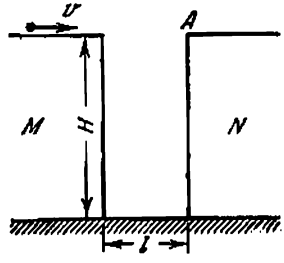


Fig. 22

l? Menospreciar el tiempo de choque de la bola contra la placa. El choque se considera absolutamente elástico.

§ 4. DINAMICA DEL MOVIMIENTO RECTILINEO

73. Una barra homogénea de masa M se mueve con aceleración bajo la acción de una fuerza F por una superficie

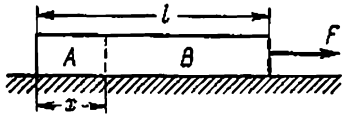


Fig. 23

lisa. Hallar la magnitud T de la fuerza con que una parte A de la barra de longitud x actúa sobre la parte B de la misma. La longitud de la barra es l (fig. 23).

74. Una barra homogénea se mueve aceleradamente bajo la acción de una fuerza F. La masa de la barra es M. Determinar las fuerzas que actúan sobre la parte de la

barra sombreada en el dibujo. Las dimensiones lineales se dan en la fig. 24. Menospreciar la fricción.

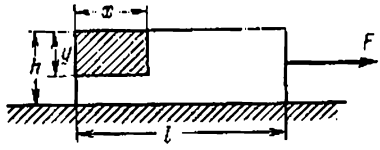


Fig. 24

75. Una barra homogénea de longitud L experimenta la acción de dos fuerzas F_1 y F_2 aplicadas a sus extremos y dirigidas en sentidos opuestos (fig. 25). ¿Con qué

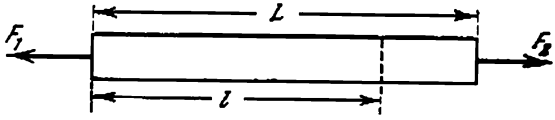


Fig. 25

fuerza F está estirada la barra en su sección que se encuentra a una distancia l de uno de sus extremos?

76. Una barra de masa m está en el suelo de un ascensor. El ascensor baja con aceleración a. Determinar la fuerza con que la barra actúa sobre el suelo del ascensor. ¿Con qué aceleración del ascensor las deformaciones de la barra desaparecen? ¿Con qué fuerza la barra actúa sobre el suelo del ascensor si éste comienza a subir con aceleración a?

77. Un niño de masa M corre en dirección a la parte elevada de una tabla inmóvil de masa m, que se encuentra en un plano inclinado con ángulo de base α. La fricción entre la tabla y el plano no existe. ¿Qué camino pasó el niño hasta el momento en que su velocidad, que inicialmente era v_0, disminuyó 2 veces, considerando la misma dirección?

78. Una barra homogénea está colgada de un hilo. El hilo se corta. ¿Qué partículas de la barra tendrán mayor aceleración en el momento inicial: las que están en la parte superior o en la inferior?

79. Una barra homogénea se encuentra en un soporte horizontal. El soporte se retira repentinamente. ¿Qué partes de la barra tendrán mayor aceleración en el momento inicial: las que están en la parte superior o en la inferior?

80. Un hombre con las manos levantadas se encuentra en la plataforma de una balanza médica. ¿Cómo varían las indicaciones de la balanza si el hombre baja las manos aceleradamente?

81. En un platillo de balanza se encuentra una botella. Dentro de ella hay una mosca. Mientras la mosca duerme la balanza está equilibrada. ¿Se desequilibrará la balanza si la mosca, al despertarse, se desprende de la pared de la botella y vuela primeramente en dirección horizontal y después en dirección vertical hacia arriba con aceleración a?

82. En los extremos de un hilo que se apoya sobre una polea con el eje fijo están colgadas a una altura $H = 2$ m del suelo dos cargas, cuyas masas son $m_1 = 100$ g y $m_2 = 200$ g (fig. 26). En el momento inicial las cargas están en reposo. Determinar la tensión del hilo cuando las cargas se mueven y el tiempo durante el cual la carga de masa m_2 alcanza el suelo. No tomar en consideración las masas de la polea y del hilo.

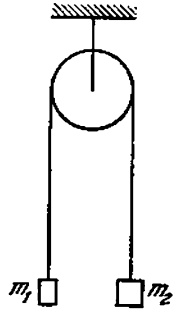


Fig. 26

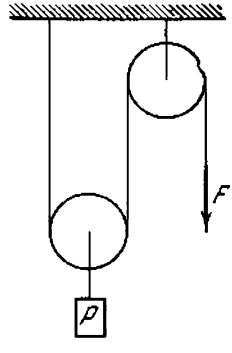


Fig. 27

83. Al eje de una polea móvil se sujeta una carga de peso P (fig. 27). ¿Con qué fuerza F es necesario tirar del

extremo de la cuerda, apoyada sobre la segunda polea, para que la carga P se mueva hacia arriba con aceleración a? ¿Para qué la carga esté en reposo? Menospreciar la masa de las poleas y de la cuerda.

84. Determinar las aceleraciones de los pesos con masas m_1, m_2, m_3 y la tensión de las cuerdas en el sistema representado (fig. 28), si $m_1 = m_2 + m_3$. Las masas

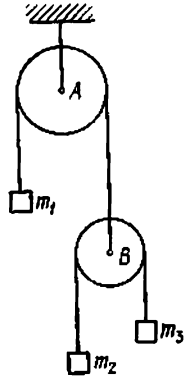


Fig. 28

de las cuerdas y de las poleas son insignificantemente pequeñas en comparación con las masas de los pesos.

85. Una cuerda se apoya sobre dos poleas fijas y en sus extremos se colocan los platos con pesos de $P = 30$ N

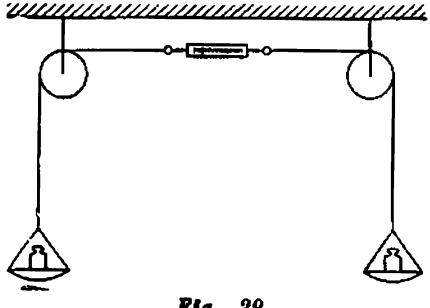


Fig. 29

cada uno. La cuerda entre las poleas fue cortada y unida a un dinamómetro (fig. 29). ¿Qué muestra el dina-

mómetro? ¿Qué peso P_1 debe ser adicionado a uno de los platos, para que la indicación del dinamómetro no varíe después de ser retirado el peso $P_2 = 10$ N de otro plato? Las masas de los platos, de las poleas, de la cuerda y del dinamómetro se menosprecian.

86. En una cuerda apoyada sobre una polea están colgadas las cargas de masas m_1 y m_2. La polea en estado inmóvil (las cargas no se mueven) se equilibra en una balanza de palanca como se ve en la fig. 30. ¿En

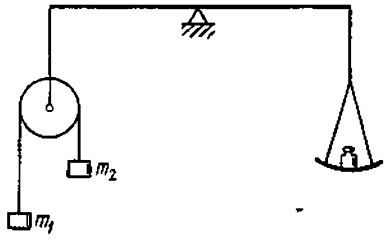


Fig. 30

cuánto será necesario variar el peso en el plato derecho, para que al librarse la polea y moverse seguidamente las cargas, el equilibrio se mantenga?

87. Un sistema consta de dos poleas con ejes fijos y una polea móvil (fig. 31). Sobre las poleas se apoya una

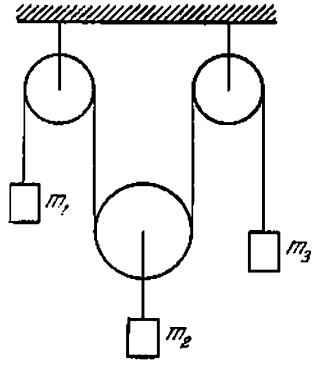


Fig. 31

cuerda en cuyos extremos fueron colgadas las cargas con masas m_1 y m_3; y en el eje de la polea móvil fue

colgada una carga de masa m_2. Los sectores de la cuerda que no se encuentran en las poleas se hallan en el plano vertical. Determinar la aceleración de cada una de las cargas si las masas de las poleas y de la cuerda, así como la fricción pueden menospreciarse.

88. Determinar las aceleraciones de los pesos en el sistema mostrado en la fig. 32. Las masas de las poleas, de la cuerda y la fricción pueden prescindirse. ¿En qué dirección girarán las poleas cuando los pesos comienzan a moverse?

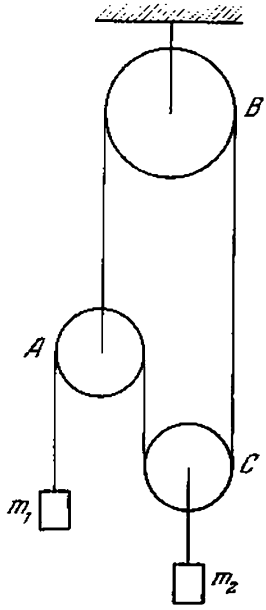


Fig. 32

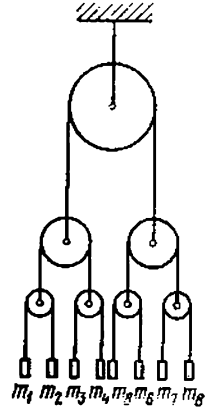


Fig. 33

89. Determinar las tensiones de las cuerdas en las cuales están colgados los pesos en el sistema de la fig. 33. La masa de las cuerdas y de las poleas se menosprecia. No hay fricción. Las masas de los pesos m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8 son dadas.

90. Determinar la aceleración del peso de masa m_4 en el sistema de la fig. 34. Se prescinde de las masas

de las cuerdas y de las poleas. No hay fricción. Las masas m_1, m_2, m_3, m_4 se dan en la figura.

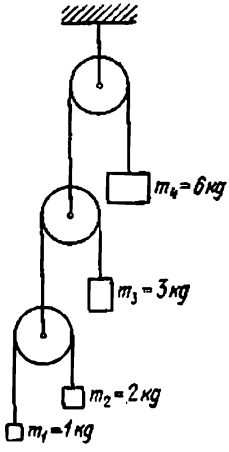


Fig. 34

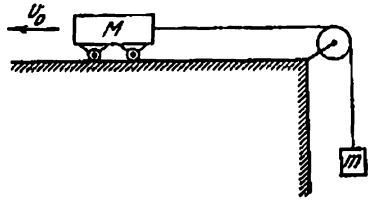


Fig. 35

91. Un carrito de masa $M = 500$ gramos está unido a una carga de masa $m = 200$ gramos mediante una cuerda. En el momento inicial el carrito tenía la velocidad inicial $v_0 = 7$ m/s y se movía a la izquierda por un plano horizontal (fig. 35). Determinar el valor y sentido de la velocidad del carrito, el lugar, donde ella se encontrará y el trayecto que recorrerá después de pasar $t = 5$ s.

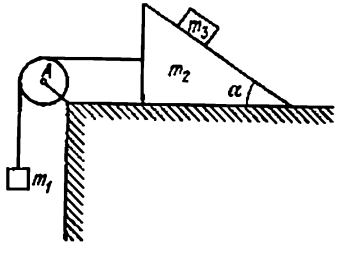


Fig. 36

92. Determinar las aceleraciones de los cuerpos de masas m_1, m_2 y m_3 para el sistema mecánico representado en la fig. 36. No existe fricción entre las superficies

que están en contacto. Las masas de la polea A y de la cuerda pueden menospreciarse.

93. Una barra de masa m puede moverse sin fricción tanto hacia abajo como hacia arriba entre dos casquillos fijos. El extremo inferior de la barra toca la superficie

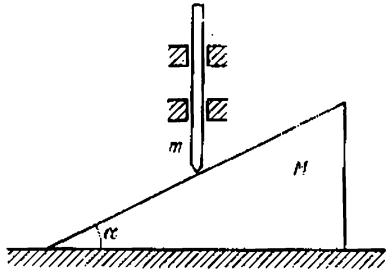


Fig. 37

lisa de una cuña de masa M. La cuña está sobre una mesa horizontal plana (fig. 37). Determinar la aceleración de la cuña y de la barra.

94. En una barrilla de longitud $2\,l$ fue asentada una cuenta de vidrio de masa m. La cuenta puede desplazarse por la barrilla sin fricción. En el momento inicial la cuenta se encontraba en el medio de la barrilla. Esta se mueve de modo progresivo por un plano horizontal con aceleración a en una dirección que forma un ángulo α con la barrilla (fig. 38). Determinar la aceleración de la

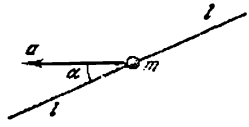


Fig. 38

cuenta relativamente a la barra, la fuerza de reacción de la barra sobre la cuenta y el tiempo durante el cual la cuenta deja la barra.

95. Una cuerda, carente de peso, se apoya sobre una polea de eje fijo y pasa a través de un orificio (fig. 39).

Durante el movimiento de la cuerda, el orificio actúa sobre la cuerda con una fuerza de fricción constante F. En los extremos de la cuerda se cuelgan unos pesos,

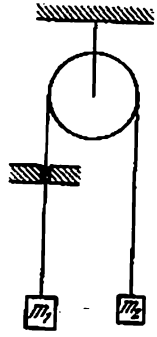


Fig 39

cuyas masas son m_1 y m_2. Determinar la aceleración de los pesos.

96. A los extremos de un muelle fueron sujetadas dos vigas, cuyas masas son M y m ($M > m$). Bajo la acción de dos fuerzas iguales F que actúan sobre las vigas como se ve en la fig. 40, el muelle fue compri-

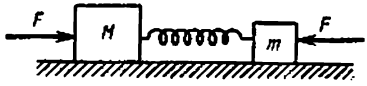


Fig. 40

mido. Las vigas están sobre una mesa. ¿Qué sucederá si las fuerzas F dejan de actuar? El coeficiente de rozamiento de las vigas con la mesa es k.

97. En la pared posterior de un vagón hay un cuadro colgado de una cuerda apoyada de un clavo. ¿Cómo se moverá el cuadro con relación al vagón si la cuerda se rompe, en el caso cuando:
1) ¿la velocidad del vagón aumenta?
2) ¿la velocidad del vagón disminuye? En ambos casos la magnitud absoluta de la aceleración del vagón es

a. El coeficiente de rozamiento del cuadro con la pared del vagón es k.

98. Dos pesos de masas m_1 y m_2 están unidos entre sí por medio de una cuerda que pasa a través de una polea. Las superficies, en las cuales se encuentran los pesos, forman con el plano horizontal ángulos α y β (fig. 41).

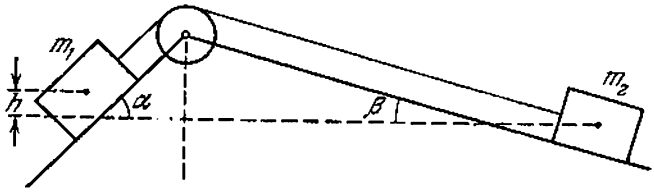


Fig. 41

La carga a la derecha está más abajo que la de la izquierda en un valor h. Después de pasar un tiempo τ desde el comienzo del movimiento, ambos pesos se encontraron a la misma altura. Los coeficientes de rozamiento entre los pesos y los planos son iguales a k. Determinar la relación entre las masas de los pesos.

99. Desde un punto O por los canales situados en el mismo plano vertical y que forman diferentes ángulos con la vertical, comienzan a deslizarse simultáneamente unos granos de arena. Encontrar el lugar geométrico de los puntos en los que se hallarán los granos de arena dentro de un tiempo t si el coeficiente de rozamiento de cada grano con el canal es k.

100. Una montaña de hielo forma con la horizontal un ángulo α igual a 30°; por esta montaña de abajo hacia arriba lanzan una piedra que durante $t_1 = 2$ s pasa una distancia $l = 16$ m y después comienza a deslizarse hacia abajo. ¿Cuánto tiempo t_2 dura el deslizamiento de la piedra hacia abajo? ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento entre la piedra y la montaña?

101. Un carrito de masa M se mueve sin fricción por unos rieles horizontales con una velocidad v_0. En la parte anterior del carrito se pone un objeto de masa m. Su velocidad inicial es igual a cero. ¿Para qué longitud del carrito el objeto no caerá de éste? Prescindir de

las dimensiones del objeto en comparación a la longitud del carrito l. El coeficiente de rozamiento entre el objeto y el carrito es k.

102. Una viga de masa M está situada en un plano horizontal. Sobre la viga se encuentra un cuerpo de masa m (fig. 42). El coeficiente de rozamiento entre el cuerpo

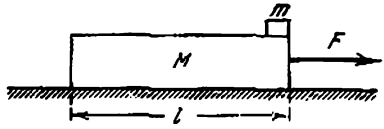


Fig. 42

y la viga, así como entre la viga y el plano es k. Analizar el movimiento para diferentes valores de la fuerza F.

103. Una viga de masa M está sobre un plano horizontal liso, por el cual puede moverse sin fricción. Sobre la viga hay un cuerpo de masa m (fig. 42). El coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y la viga es k. ¿Con qué valor de la fuerza F que actúa sobre la viga en dirección horizontal, el cuerpo comienza a deslizarse sobre la viga? ¿Dentro de cuánto tiempo el cuerpo caerá de la viga? La longitud de la viga es l.

104. Una mesa de peso $P_1 = 150$ N puede moverse sin fricción en un plano horizontal. Sobre la mesa está un

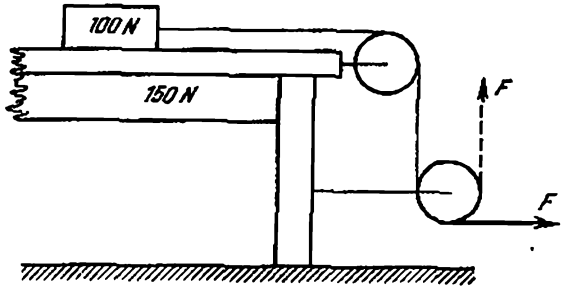


Fig. 43

peso $P_2 = 100$ N. Al peso se ata una cuerda que pasa a través de dos poleas fijadas en la mesa (fig. 43).

El coeficiente de rozamiento entre el peso y la mesa es $k = 0{,}6$. ¿Con qué aceleración se moverá la mesa si al extremo libre de la cuerda fue aplicada una fuerza constante igual a 80 N? Examinar dos casos:
1) la fuerza está dirigida horizontalmente;
2) la fuerza está dirigida verticalmente hacia arriba.

105. En una barrilla de longitud $2l$ está asentada una cuenta de vidrio de masa m. El coeficiente de rozamiento entre la cuenta y la barra es igual a k. En el momento inicial la cuenta se encontraba en el centro de la barrilla. Esta se desplaza progresivamente en un plano horizontal con aceleración a en una dirección que forma un ángulo α con la barrilla (fig. 38). Determinar la aceleración de la cuenta respecto a la barrilla, la fuerza de reacción por parte de la barrilla sobre la cuenta y el tiempo después del cual la cuenta cae de la barrilla. No tomar en consideración la fuerza de la gravedad.

106. Un cañón antiguo que no tiene un mecanismo de retroceso se encuentra en una superficie horizontal. El cañón dispara, bajo un ángulo α con el plano horizontal, un proyectil, cuya masa es m y la velocidad inicial es v_0. ¿Qué velocidad v_1 tendrá el cañón inmediatamente después del disparo si la masa del cañón es M y la aceleración del proyectil en la ánima del cañón es mucho mayor que la aceleración de la caída libre? El coeficiente de rozamiento entre el cañón y la superficie es k.

107. El cohete tiene una reserva de combustible $m = 8$ toneladas. La masa del cohete (incluyendo el combustible) es $M = 15$ toneladas. El combustible quema en 40 segundos. El gasto de combustible y la fuerza de tracción $F = 200\,000$ N son constantes.
1) El cohete está colocado horizontalmente sobre una carretilla. Determinar la aceleración del cohete en el momento de lanzamiento. Encontrar la dependencia de la aceleración en función del tiempo de movimiento del cohete y representar esta dependencia gráficamente. Por el gráfico valorar la magnitud de la velocidad del cohete a los 20 segundos después de comenzar el movimiento. Menospreciar la fricción.

2) El cohete fue lanzado verticalmente hacia arriba. Las mediciones mostraron que después de 20 segundos, la aceleración del cohete era de 0,8 g. Calcular la fuerza de resistencia del aire que actuaba sobre el cohete en este momento. La aceleración g se considera constante.

3) Para medir la aceleración del cohete, en él se pone un aparato que representa en sí un muelle fijado en un tubo vertical. En reposo el muelle está estirado por una carga colocada en su extremo en $l_0 = 1$ cm. Determinar la dependencia de la extensión del muelle respecto a la aceleración del cohete. Dibujar la escala del aparato.

108. Dos cubos están bien juntos sobre una superficie horizontal lisa. La arista de cada cubo es l y la masa es M. Uno de los cubos está atravesado por una bala de masa m que se mueve en dirección de la línea que une los centros de los cubos. Considerando que la fuerza de resistencia horizontal, que surge mediante el movimiento de la bala es constante e igual a F, determinar en qué límites debe encontrarse la velocidad inicial de la bala, para que ésta pase por el primer cubo y quede atascada en el segundo.

§ 5. PRINCIPIO DE CONSERVACION DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

109. ¿Posee la cantidad de movimiento un disco homogéneo que gira en torno de su eje? El eje del disco está fijo.

110. Dos canoas navegan paralelamente, la una al encuentro de la otra, con velocidades iguales. Cuando las canoas se encuentran, de una lancha a la otra lanzan una carga, después de la segunda lancha a la primera lanzan una carga igual. Otra vez las cargas fueron lanzadas de una canoa a la segunda simultáneamente. ¿En qué caso la velocidad de las canoas, después de lanzar las cargas, será mayor?

111. Una rana de masa m está sentada en el extremo de una tabla de masa M y de longitud L. La tabla está flotando en la superficie de un lago. La rana salta a lo largo de la tabla, formando un ángulo α con la horizontal.

¿Qué velocidad inicial v_0 debe tener la rana para que, al dar un salto, se encuentre en el otro extremo de la tabla?

112. Una cuña con el ángulo de base α se encuentra en una mesa horizontal lisa. Por el plano inclinado de la cuña sube un escarabajo con una velocidad constante u respecto a la cuña. Determinar la velocidad de la cuña. Considerar que el escarabajo comenzó a moverse cuando la cuña estaba en reposo. La masa de la cuña es M y la masa del escarabajo es m.

113. Una cuña, cuyo ángulo de base es α, puede desplazarse sin fricción por una superficie horizontal lisa (fig. 44).

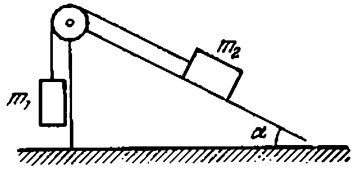


Fig. 44

¿Para qué relación de masas m_1 y m_2 de las cargas, unidas por medio de una cuerda apoyada sobre una polea, la cuña permanecerá inmóvil, y para qué relación de cargas la cuña se moverá hacia la derecha o hacia la izquierda? El coeficiente de fricción entre la carga m_2 y la cuña es k.

114. A lo largo de un plano inclinado liso, cuyo ángulo con la horizontal es α, comenzó a deslizarse con velocidad inicial nula, una caja con arena de masa M. Después de recorrer la distancia S, la caja chocó con una piedra de masa m, que se movía en dirección horizontal. ¿Qué velocidad v tenía la piedra si la caja con arena después del choque paró un momento? Las velocidades de la piedra y de la caja se encuentran en el mismo plano.

115. Un cohete lanzado verticalmente hacia arriba explotó en la altura máxima de su ascenso. Como resultado de la explosión, el cohete se dividió en tres pedazos. Demostrar que los vectores de las velocidades iniciales de los tres pedazos se hallan en el mismo plano.

116. En la superficie de un lago hay una canoa, situada perpendicularmente a la línea de la orilla y que tiene su proa dirigida a la misma. La distancia entre la proa de la canoa y la orilla es igual a 0,75 metros. En el momento inicial la canoa estaba inmóvil. El hombre que se encuentra en la canoa, pasa de la proa a la popa. ¿Atracará la canoa a la orilla, si su longitud es de 2 metros? La masa de la canoa es $M = 140$ kg y la masa del hombre es $m = 60$ kg.

117. De los extremos de una plataforma inmóvil de longitud $l = 9{,}2$ m un adulto y un niño corren el uno al encuentro del otro. Determinar en cuánto se desplazará la plataforma, cuando el hombre cubra la distancia de un extremo al otro. Es sabido que el adulto corre dos veces más rápido que el niño. La masa de la plataforma es $m_1 = 600$ kg, la masa del hombre es $m_2 = 60$ kg y la del niño es $m_3 = 30$ kg.

118. En un plano horizontal absolutamente liso se encuentra un aro. Sobre este último está un escarabajo. ¿Qué trayectoria describirán el escarabajo y el centro del aro si el escarabajo empezará a moverse a lo largo del aro? La masa del aro es M, el radio R y la masa del escarabajo es m.

119. En el momento inicial el cohete de masa M tenía una velocidad v_0. Al final de cada segundo, el cohete desprendre una porción de gas de masa m. La velocidad de la porción de gas se diferencia de la velocidad del cohete, antes de que esta masa de gas sea quemada, en una magnitud constante u, o sea, la velocidad de flujo del gas es constante. Menospreciando la acción de la fuerza de gravedad, determinar la velocidad del cohete después de n segundos.

120. ¿Aumentará la velocidad del cohete si la velocidad de flujo de los gases con relación al cohete es menor que la velocidad del mismo cohete, es decir, los gases, que salen de la tobera del cohete, van tras del cohete?

121. Un cañón de masa M que se mueve solamente por la horizontal, dispara bajo un ángulo α un proyectil de masa m con velocidad v_0. Considerando v_0 como velocidad inicial del proyectil respecto a la tierra o al cañón, el ángulo de inclinación α como el ángulo

de inclinación del vector de la velocidad inicial v_0 o el ángulo de inclinación del tubo del cañón, encontrar la velocidad v de retroceso del cañón para todas las cuatro variantes.

§ 6. ESTATICA

122. En un cilindro inmóvil está enrollada una cuerda, cuya longitud es $l = R\theta$, donde R es el radio del cilindro, θ es el ángulo en radianes entre los radios trazados a los puntos inicial y final, donde la cuerda toca el cilindro. De un extremo del hilo se tira con una fuerza T_0. El coeficiente de rozamiento entre la cuerda y la superficie del cilindro es k. Determinar la fuerza de tensión del segundo extremo de la cuerda, sabiendo que esta es la fuerza máxima, para la cual aun no existe deslizamiento.

123. En los extremos de una cuerda apoyada sobre dos poleas, están colgadas dos cargas iguales (fig. 45).

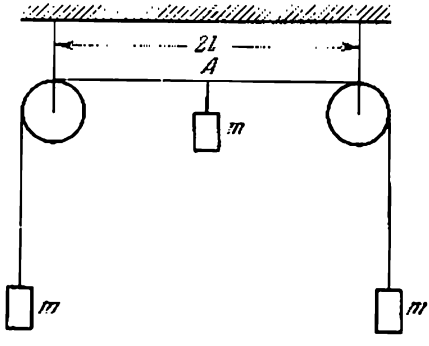


Fig. 45

¿A qué distancia bajará la tercera carga de la misma masa, si ésta se sujeta en el centro de la cuerda? La distancia entre los ejes de las poleas es igual a $2l$. El rozamiento en los ejes de las poleas existe, pero es muy pequeño.

124. Una cuña isósceles de ángulo agudo α está clavada en una hendidura. ¿Para qué valor del ángulo α la

cuña no será expulsada de la hendidura si el coeficiente de rozamiento entre la cuña y el material de la hendidura es k?

125. ¿Cuál es la relación entre los pesos P y Q si se conoce que el sistema mostrado en la fig. 46 está en equi-

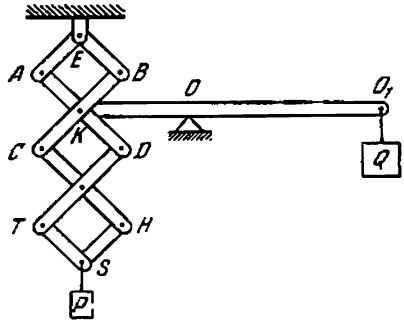


Fig. 46

librio? Las longitudes de las barras AD, BC, CH, DT y la longitud del brazo de OO_1 son dos veces mayores que la longitud de las barras AE, EB, TS, SH y de la longitud del brazo de KO, respectivamente. Los pesos de las barras y de la palanca pueden ser prescindidos.

126. Para poder mover una caja rectangular de longitud l y de altura h, a su arista superior, perpendicular a la cara se aplica una fuerza horizontal F. ¿Qué valor debe tener el coeficiente de rozamiento k entre la caja y el piso, para que la caja se mueva sin volcar?

127. Una barra homogénea, cuyo peso es P, está en el suelo. El coeficiente de rozamiento entre la barra y el suelo es k. ¿Qué es más fácil: volcar la barra en el plano horizontal respecto a su centro o mover la barra de un modo progresivo? En ambos casos dos personas mueven la barra.

128. Una grúa de puente, cuyo peso es $P = 2 \cdot 10^4$ N, tiene un tramo de $L = 26$ m (véase la fig. 47). El cable, al que se cuelga la carga se encuentra a una distancia $l = 10$ m de uno de los rieles. Determinar las fuerzas

de presión de la grúa sobre los rieles, al levantar una carga de $P_0 = 10^4$ N de peso con una aceleración $a = 9{,}8$ m/s^2.

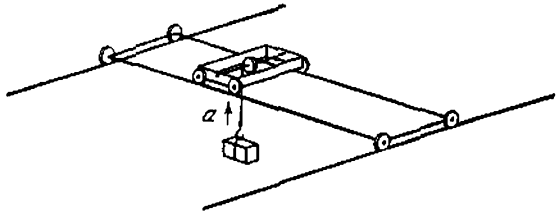


Fig. 47

129. Una palanca está doblada de tal modo que sus lados AB, BC y CD son iguales y forman entre sí ángulos rectos (fig. 48). El eje de la palanca AB está en el punto B.

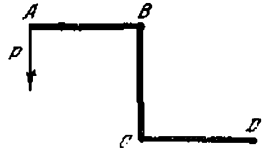


Fig. 48

Una fuerza P está aplicada en el punto A perpendicularmente al brazo de la palanca AB. Determinar el valor mínimo de la fuerza que es necesario aplicar en el punto D, para que la palanca se encuentre en equilibrio. El peso de la palanca puede menospreciarse.

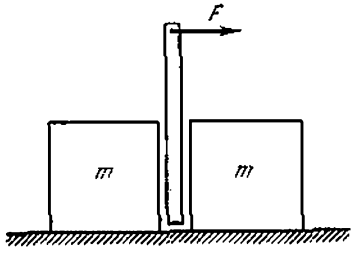


Fig. 49

130. Entre dos cajas iguales, situadas en el suelo, fue colocado un palo que no alcanza el suelo (fig. 49). Una

fuerza horizontal se aplica a la parte superior del palo. ¿Cuál de las dos cajas se moverá primero?

131. Una esfera homogénea y pesada fue colgada por una cuerda, cuyo extremo está fijo en una pared vertical. El punto de unión de la cuerda con la esfera se encuentra en la misma vertical que el centro de la esfera. ¿Qué valor debe tener el coeficiente de rozamiento entre la esfera y la pared para que la esfera se encuentre en equilibrio?

132. Un ladrillo se halla en un plano inclinado perfectamente ajustado (fig. 50). ¿Cuál de las mitades del ladrillo,

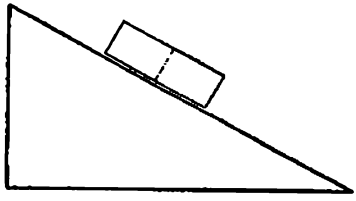


Fig. 50

la derecha o la izquierda, ejerce mayor presión sobre el plano inclinado?

133. Para levantar un rodillo cilíndrico pesado de radio R a un escalón rectangular, se aplica a su eje una fuerza en dirección horizontal igual al peso del rodillo. Determinar la altura máxima del escalón.

134. En dos planos inclinados que forman ángulos $\alpha_1 = 30°$ y $\alpha = 60°$ con la horizontal se encuentra una esfera que pesa P. Determinar la fuerza de presión de la esfera sobre cada uno de los planos inclinados si se sabe que no hay rozamiento entre la esfera y uno de los planos.

135. En la pared frontal del cajón de un armario hay dos manijas situadas simétricamente. La distancia entre ellas es l y la longitud del cajón es a. El coeficiente del rozamiento entre el cajón y el armario es k. ¿Es posible abrir siempre el cajón, actuando sólo sobre una de las manijas con una fuerza perpendicular a la pared del cajón?

136. Sobre un tronco rugoso, situado horizontalmente, fue equilibrada una tabla homogénea (fig. 51). Después de que aumentaron el peso de uno de sus extremos, se

Fig. 51

observó que el equilibrio se alcanza cuando la tabla forma un ángulo α con el plano horizontal. ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento entre la tabla y el tronco?

137. El extremo superior de una escalera se apoya en una pared vertical lisa y el extremo inferior de la escalera está sobre un suelo áspero. El coeficiente de rozamiento entre la escalera y el suelo es k. Determinar para qué ángulo α entre la escalera y la pared, la escalera quedará en equilibrio.

138. Resolver el problema anterior, considerando que la pared no es lisa y que el coeficiente de rozamiento entre la escalera y la pared es también igual a k.

139. Una barra fina homogénea AB de longitud l está en la superficie horizontal de una mesa. Una cuerda

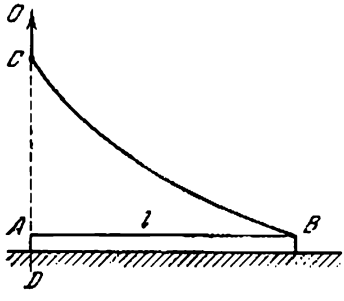


Fig. 52

de longitud $2l$ fue atada al extremo B de la barra (fig. 52). ¿Cómo se moverá la barra si el otro extremo

de la cuerda C se eleva lentamente a lo largo de la recta vertical inmóvil DO que atraviesa el extremo A de la barra? Despreciar el peso de la cuerda.

140. ¿Para qué valor del coeficiente de rozamiento el hombre que corre por un camino recto y duro, no resbalará? El ángulo máximo entre la línea vertical y la línea que une el centro de gravedad del hombre que corre con el punto de apoyo, es igual a α.

141. Una escalera fue apoyada contra la pared vertical lisa de una casa. El ángulo entre la escalera y la superficie horizontal de la tierra es $\alpha = 60°$. La longitud de la escalera es l. Su centro de gravedad se encuentra en el medio. ¿Cómo está dirigida la fuerza con que la tierra ejerce sobre la escalera?

142. Una escalera, cuyo centro de gravedad se encuentra en el medio, está apoyada contra la pared y el suelo absolutamente lisos (fig. 53). ¿Cuál debe ser la tensión de la cuerda atada al medio de la escalera para que ésta no caiga?

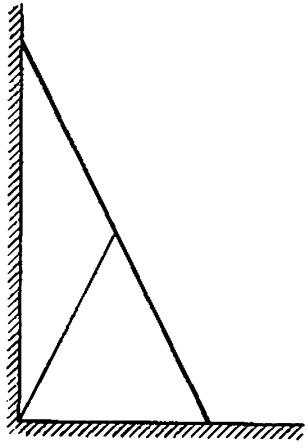


Fig. 53

143. Por una escalera, apoyada contra una pared vertical lisa está subiendo un hombre. La escalera comienza

a resbalar solamente cuando el hombre alcanza una altura determinada. Explicar ¿por qué?

144. Un cuadro está colgado de una pared vertical mediante un cordón AC de longitud l, el cual forma un ángulo α con la pared. La altura del cuadro BC es igual a d (fig. 54). La parte inferior del cuadro no está fija. ¿Para qué valor del coeficiente de rozamiento entre el cuadro y la pared el cuadro estará en equilibrio?

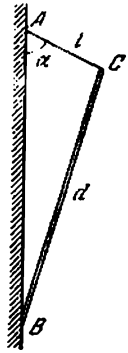


Fig. 54

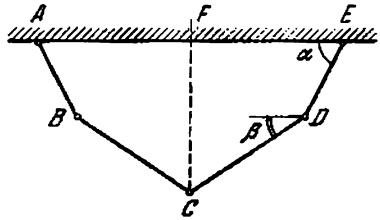


Fig. 55

145. Cuatro barras homogéneas están unidas, la una a la otra, en forma de articulación, en los puntos B, C y D (fig. 55). Las dos barras extremas AB y DE pueden girar libremente con relación a los puntos fijos A y E que se encuentran el la línea horizontal. Las longitudes de las barras son iguales de dos en dos: AB es igual a ED y BC es igual a CD. Las masas de las barras son iguales. Demostrar que en equilibrio los ángulos α y β se relacionan de la siguiente forma: $\operatorname{tg} \alpha = 3 \operatorname{tg} \beta$.

146. ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento entre el suelo y una caja que pesa 100 N, si la fuerza mínima necesaria para hacer mover la caja del lugar es igual a 60 N?

147. En un cilindro de masa m fue arrollada una cuerda inflexible con peso despreciable (fig. 56). ¿Con qué

fuerza mínima $F_{\text{mín}}$ y bajo qué ángulo α_1 con relación a la horizontal es necesario tirar de la cuerda para que el cilindro, girando, se mantenga en su lugar?

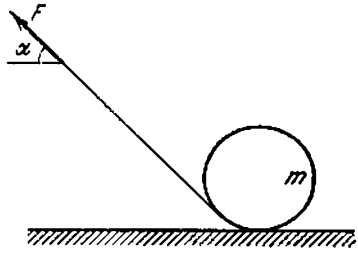


Fig. 56

El coeficiente de rozamiento entre el cilindro y el suelo es igual a k.

148. En la fig. 57 está presentado un esquema simplificado de la máquina de vapor y del mecanismo de biela y manivela de una locomotora. Las figuras 57 *a* y *b*

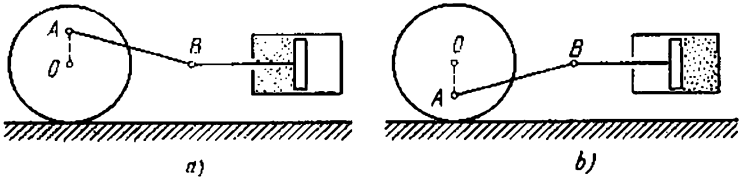


Fig. 57

corresponden a los momentos cuando el vapor se encuentra en las partes izquierda y derecha del cilindro, respectivamente. Calcular la fuerza de tracción para estos casos, cuando el punto A se halla en una vertical con el eje de la rueda motriz. La presión del vapor en el cilindro es p, el área del émbolo es S, el radio de la rueda motriz es R, la distancia OA es igual a r. La masa del mecanismo de biela y manivela, del émbolo y de la rueda motriz puede ser menospreciada.

149. Los ladrillos se colocan sin liga de forma que una parte de cada ladrillo sobresale ante el siguiente (fig. 58). ¿A qué distancia máxima el extremo derecho del ladrillo superior puede sobresalir el inferior que sirve

Fig. 58

de base para todos los ladrillos? La longitud de cada ladrillo es l.

150. Hallar el centro de gravedad de un alambre fino y homogéneo, doblado en forma de semicírculo de radio r.

151. Determinar la posición del centro de gravedad de un semicírculo homogéneo y fino de radio r.

152. Determinar la posición del centro de gravedad de un alambre fino y homogéneo, curvado en forma de un arco de radio r (fig. 59).

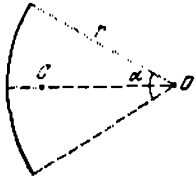


Fig. 59

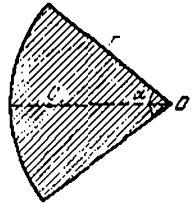


Fig. 60

153. Determinar la posición del centro de gravedad de una lámina fina y homogénea cortada en forma de un sector de radio r, que posee un ángulo central α (fig. 60).

154. Determinar la posición del centro de gravedad de una lámina fina y homogénea que se representa en sí un

rectángulo con lados r y $2r$, del cual fue cortado un semicírculo de radio r (fig. 61).

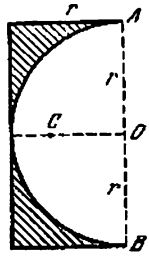


Fig. 61

§ 7. TRABAJO Y ENERGIA

155. ¿Qué trabajo se realiza por una fuerza de 30 N, al levantar un peso de 10 N a una altura de 5 m?

156. La experiencia de Guericke (con los hemisferios de Magdeburgo) consistió en que dos semiesferas de cobre se unían herméticamente por las bases y de la esfera obtenida se extrajo el aire. La presión atmosférica unía con tanta fuerza las semiesferas la una a la otra que fue posible separarlas solamente con ayuda de varios caballos. Determinar ¿cuántos caballos se necesita para separar las semiesferas, si cada caballo tira con una fuerza F? El radio de las semiesferas es R, la presión atmosférica es p.

157. ¿Cómo se explica el hecho de que cuando una piedra cae sobre la Tierra, la variación de cantidad del movimiento de la Tierra es igual a la de la piedra, sin embargo, el cambio de la energía cinética de la Tierra no se considera?

158. Un pilote con 100 kg de peso se mete en el terreno mediante un martinete, cuyo peso es 400 kg. El martinete cae libremente de una altura de 5 metros y después de cada choque, el pilote se ahonda en 5 cm. Determinar la fuerza de resistencia del terreno considerándola constante.

159. Una caja con arena posee la masa M y está colgada por medio de un cable de longitud L. La longitud del

cable es mucho mayor que las dimensiones lineales de la caja. Una bala de masa m se mueve en dirección horizontal y alcanza la caja, introduciéndose en la misma. El cable, después de que la bala se introduce en la caja, se desvía en un ángulo α de la vertical. Determinar la velocidad de la bala.

160. Dos carritos (con las ruedas fijadas por cuñas) se apartan mediante una explosión de carga Q, colocada entre ellos (fig. 62). El carrito que pesa 100 gramos recorre

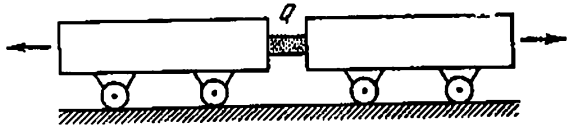


Fig. 62

un camino de 18 metros y se para. ¿Qué camino recubrirá el segundo carrito, cuyo peso es 300 gramos? El coeficiente de rozamiento entre la tierra y los carritos es igual a k.

161. Resolver el problema **101**, utilizando el principio de conservación de la cantidad de movimiento y examinando la variación de energía cinética del carrito y del cuerpo.

162. Un cohete se lanza verticalmente hacia arriba, eliminando los gases calientes sucesivamente en dos porciones iguales. La velocidad de la salida de los gases con relación al cohete es constante e igual a u. ¿Cuál debe ser el intervalo de tiempo entre la combustión de las porciones, para que el cohete alcance su altura máxima? El combustible se quema instantáneamente. La resistencia del aire se desprecia.

163. El combustible en un cohete se quema en porciones iguales de masa m. La combustión es instantánea. ¿Será la velocidad de la salida de los gases del cohete constante si, al quemarse cada porción, la energía mecánica del sistema varía en un mismo valor?

164. Un cuerpo se sube a la cumbre de una montaña una vez por el camino ADC y otra vez, por el camino ABC

(fig. 63). Demostrar que si la subida es lenta, el trabajo realizado será el mismo, siendo igual el coeficiente de fricción en ambos trayectos.

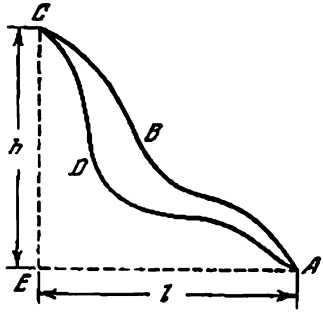


Fig. 63

165. ¿Qué fuerza debe aplicarse a la manivela de un gato de husillo para mantener en equilibrio un peso levantado por el gato igual a P? El paso del tornillo es h y la longitud de la manivela es R. No hay fricción.

166. Encontrar el coeficiente máximo del rendimiento de un gato de husillo, en el cual las fuerzas de rozamiento no permiten a la carga bajar.

167. Una escalera de cuerda de longitud l, en cuyo extremo se encuentra un hombre de masa m, está atada a la cesta de un aeróstato de masa M. Todo el sistema está en el aire en estado de equilibrio. Determinar qué trabajo debe realizar el hombre para subir a la cesta. ¿Cuál será la velocidad del aeróstato si el hombre va subiendo por la escalera con una velocidad v respecto a la misma?

168. ¿Cómo debe variar la potencia del motor de una bomba para que ella pueda bombear, a través de un orificio fino, el doble de la cantidad de agua por unidad de tiempo?

169. Un pozo rectangular, cuya base tiene el área S y la profundidad H, está llena a medias de agua. Una bomba extrae el agua, arrojándola a la superficie de la tierra a través de un tubo cilíndrico de radio R.

1) ¿Qué trabajo realizó la bomba si extrajo toda el agua durante el tiempo τ?
2) ¿Qué trabajo realizó la bomba en este mismo tiempo, si en el fondo del pozo se encuentra una losa de piedra de forma rectangular, cuya base tiene el área S_1 y la altura h? (La profundidad del agua en el pozo es la misma e igual a $H/2$.)

170. ¿Qué trabajo es necesario realizar para que en el tiempo τ, subir por una escalera mecánica del metropolitano que se mueve hacia abajo? La altura de la elevación es h, la velocidad de la escalera es constante e igual a v; el ángulo que forma la escalera mecánica con el plano horizontal es α.

171. Tomemos un muelle por el punto medio O y lo estiremos a una distancia x (fig. 64) y luego soltémoslo.

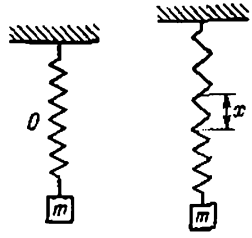


Fig. 64

El muelle con rapidez se extiende uniformemente, además la transición a ese estado está relacionada con el gasto de cierta energía. Apreciar este gasto de energía, considerando la rigidez del muelle k muy grande. (Después de que el muelle se extiende uniformemente, surgirán oscilaciones del peso m, que producen un gasto adicional de energía.)

172. En el vagón de un tren que se mueve uniformemente está un hombre que estira un muelle con fuerza F (fig. 65). El tren pasó el trayecto L. ¿Qué trabajo realizará el hombre en el sistema de coordenadas relacionado con la Tierra?

173. En el vagón de un tren que se mueve uniformemente, un hombre extendió a una longitud l un muelle,

fijado en la pared delantera del vagón. Durante este tiempo el tren pasó el trayecto L. ¿Qué trabajo realizó el hombre en el sistema de coordenadas relacionado con la Tierra? ¿Cuál será este trabajo en el sistema

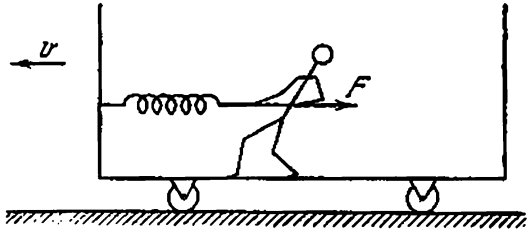


Fig. 65

relacionado con el tren? Al extender el muelle el hombre tiene que caminar en el sentido contrario del movimiento del tren.

174. Dos bolas absolutamente elásticas de masas m_1 y m_2 respectivamente, chocan. Sus velocidades iniciales son v_1 y v_2. Encontrar las velocidades de las bolas después del choque. El choque se considera central: las velocidades de las bolas están dirigidas a lo largo de la línea que une sus centros. Analizar dos casos: 1) la velocidad de la segunda bola antes del choque es igual a cero; 2) las masas de las bolas son iguales.

175. Dos bolas absolutamente elásticas de masas m_1 y m_2, chocan. Las velocidades iniciales de las bolas eran v_1 y v_2. El choque fue central. Determinar la energía máxima de la deformación elástica.

176. En un plano horizontal absolutamente liso se encuentran en reposo dos barras elásticas de masa igual m,

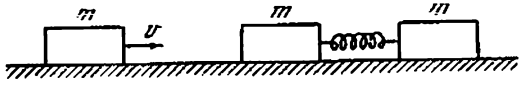


Fig. 66

unidas por un muelle de longitud l (fig. 66). El coeficiente elástico del muelle es k. Sobre una de las barras, por ejemplo sobre la izquierda, cae con una velocidad v

una tercera barra, cuya masa es también m. Demostrar que las barras unidas por el muelle se moverán siempre en una misma dirección. Determinar las velocidades de las mismas en el momento, cuando el muelle está extendido al máximo.

177. Dos láminas, cuyas masas son iguales a m, están unidas mediante un muelle con coeficiente de rigidez k (fig. 67). La lámina superior se estira hacia abajo lo suficiente para que la deformación del muelle sea igual a x, y luego la soltaron. Determinar a qué altura se elevará después de esto el centro de masas del sistema.

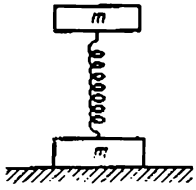


Fig. 67

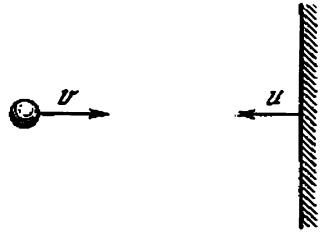


Fig. 68

178. Una bola se mueve con velocidad v en dirección de una pared, que se mueve, a su vez, en dirección de la bola con velocidad u (fig. 68). La esfera choca elásticamente con la pared. Determinar la velocidad de la esfera después del choque. ¿Debido a qué varía la energía cinética de la bola? La masa de la pared considerarla infinitamente grande.

179. De una altura $h = 73{,}5$ m tiran dos piedras de la misma masa, unidas por medio de una cuerda, cuya longitud es $l = 39{,}2$ m. La primera piedra comienza a caer $\tau = 2$ s antes de la segunda. ¿Después de cuánto tiempo, desde el inicio de la caída, las piedras alcanzarán la tierra? Las piedras empiezan a caer con velocidad inicial nula. Analizar dos casos: 1) cuando la cuerda es absolutamente elástica, 2) cuando la cuerda es absolutamente inelástica.

180. Varias esferas elásticas idénticas están colgadas, la una junto a la otra, en cuerdas de igual longitud

(fig. 69) de modo, que las distancias entre las esferas son muy pequeñas. ¿Cómo se comportarán las esferas si se inclina y si se suelta la última esfera que se

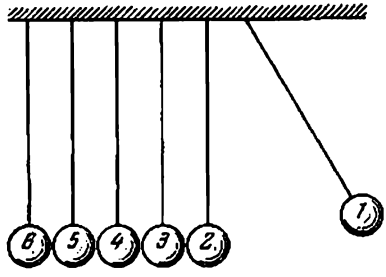


Fig. 69

encuentra en uno de los extremos, se sueltan simultáneamente dos esferas, tres esferas, etc.?

181. En un plano están colocadas en fila (con pequeños intervalos) bolas de iguales dimensiones (fig. 70).

Fig. 70

Una de ellas, que se encuentra en el medio, fue hecha de acero y las otras, de marfil (la masa de la esfera de acero es mayor). En dirección de la última bola, que se encuentra a la derecha, se mueve a lo largo de la línea que une los centros, otra bola de hueso, cuya masa es igual a la de las demás. ¿Cómo se moverán las bolas después del choque?

182. En los extremos de una cuerda muy larga fueron colgadas dos cargas de la misma masa m (fig. 71). La cuerda se apoya sobre dos poleas pequeñas y fijas, que se encuentran a una distancia $2\,l$ la una de la otra. Encontrar las velocidades de las cargas, en el

transcurso de un intervalo de tiempo suficientemente grande, si en el medio de la cuerda colgamos un peso de masa 2 m.

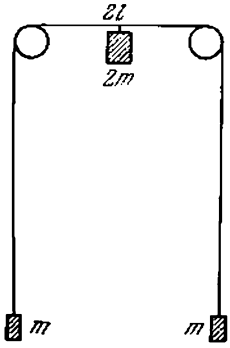


Fig. 71

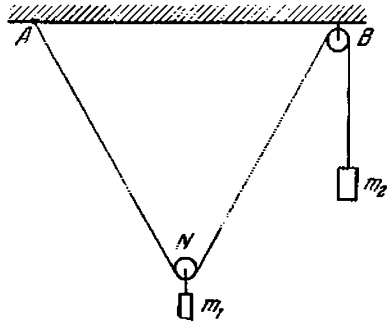


Fig. 72

183. Un peso de masa $m_1 = 536$ g, que se mantiene inicialmente cerca del techo, en el centro de la línea AB, comienza a descender (fig. 72). ¿Para qué valor del ángulo ANB su velocidad por su valor absoluto será igual a la velocidad del otro peso de masa $m_2 = 1000$ g? ¿Cómo se moverán los pesos en lo sucesivo?

184. Sobre dos rodillos de diferentes radios se halla una tabla pesada que forma un ángulo α con el plano horizontal. Determinar cómo se moverá la tabla. No hay deslizamiento. La masa de los rodillos puede ser prescindida.

185. Una cadena homogénea de longitud 2 l y de masa M está situada en una tabla absolutamente lisa. Una parte pequeña de la cadena se mete por el orificio en la tabla (fig. 73). En el momento inicial el extremo

Fig. 73

de la cadena que se encontraba sobre la tabla estaba fijo, mas después fue soltado y la cadena comenzó

a moverse bajo la fuerza de gravedad de la parte de la cadena colgada fuera de la tabla. Determinar la velocidad del movimiento de la cadena en el momento, cuando la longitud de la parte colgada de la cadena será x ($x < l$). Determinar para este mismo momento la aceleración de la cadena y la reacción del extremo de la tabla.

186. Un carrito de masa M se mueve sin fricción por rieles horizontales. Sobre el carrito fue colocado un péndulo simple (una bola de masa m, colgada de una cuerda de longitud l) (fig. 74). En el momento inicial el

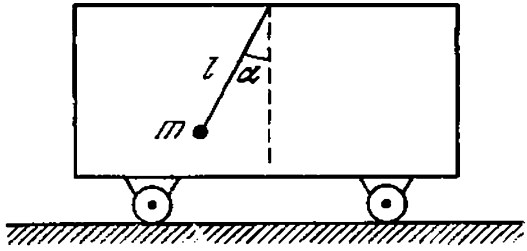


Fig. 74

carrito y el péndulo estaban en reposo y la cuerda fue inclinada en un ángulo α con relación a la línea vertical. ¿Cuál será la velocidad del carrito en el momento, cuando la cuerda del péndulo forme un ángulo β con la línea vertical ($\beta < \alpha$)?

187. Una cuña, cuya masa es M, se encuentra en un plano horizontal absolutamente liso. Sobre la cuña está una viga de masa m. La viga puede deslizarse por la cuña sin rozamiento bajo la acción de la fuerza de la gravedad. Considerando que en el momento inicial el sistema se encontraba en reposo, determinar la velocidad de la cuña, cuando la viga desciende en el sentido vertical a la altura h.

188. Una barra fijada entre dos manguitos puede moverse libremente en dirección vertical (fig. 75). El extremo inferior de la barra se apoya en una cuña lisa que se encuentra en un plano horizontal. La masa de la

barra es m y de la cuña es M. No hay fricción. En el momento inicial la barra y la cuña estaban en reposo. Determinar la velocidad v de la cuña en el momento,

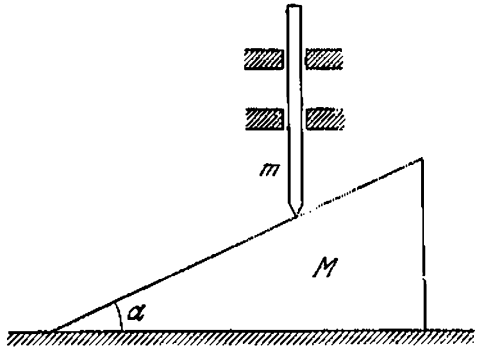


Fig. 75

en que la barra desciende a una altura h; la velocidad u_{relat} de la barra con relación a la cuña que se mueve y la aceleración a de la barra.

§ 8. DINAMICA DEL MOVIMIENTO CURVILINEO

189. Determinar la tensión del cable de un péndulo balístico (véase el problema **159**), después de ser atravesado por una bala.

190. En un hilo elástico no flexible, cuyo peso puede ser despreciado, están sujetos, como se ve en fig. 76,

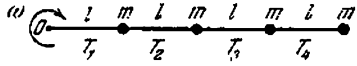


Fig. 76

cuatro pesos iguales. Todo el sistema gira con velocidad angular ω en torno de un eje vertical que pasa a través del punto O. Los pesos se mueven por una superficie horizontal lisa. Determinar la tensión del cable en diferentes sectores.

191. En los extremos de una barra imponderable de longitud l están sujetadas las masas m_1 y m_2. Las velocidades de las masas m_1 y m_2 se encuentran en un mismo plano y son iguales a v_1 y v_2 respectivamente (fig. 77).

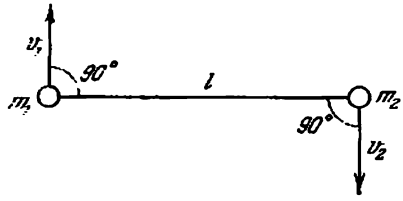


Fig. 77

Determinar con qué velocidad se mueve el centro de gravedad del sistema y con qué velocidad angular gira la barra respecto al eje que pasa por el centro de gravedad.

192. En el centro de una plataforma que gira libremente en torno al eje vertical, hay un cañón. El eje de rotación pasa por la culata del mismo. En dirección horizontal, a lo largo del radio de la plataforma fue disparado un tiro. ¿Variará en este caso la velocidad de rotación de la plataforma?

193. Un pequeño cuerpo comienza a deslizarse sin velocidad inicial por un plano inclinado de altura H (fig. 78).

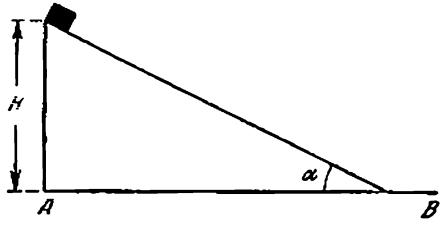


Fig. 78

Considerando que no existe fricción y que el choque del cuerpo con el plano horizontal AB es absolutamente elástico, determinar el carácter del movimiento del cuerpo después de salir del plano inclinado. Res-

ponder a la misma pregunta, siendo el choque absolutamente inelástico.

194. ¿Cuál es el radio mínimo del arco que puede describir un motociclista, siendo su velocidad $v = 21$ m/s y el coeficiente de fricción entre los neumáticos y la tierra $k = 0{,}3$? ¿Bajo qué ángulo α con la horizontal deberá inclinarse la motocicleta, si consideramos su masa concentrada en el centro?

195. En una barra ligera fue colocada una esfera maciza (fig. 79). ¿En qué caso la barra caerá más rápido:

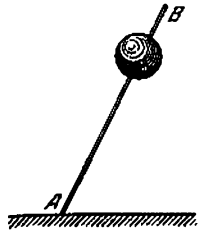


Fig. 79

si la colocamos verticalmente en el extremo A o en el extremo B? El extremo que se encuentra en contacto con el suelo no se desliza.

196. En el extremo de una barra ligera puesta verticalmente en el suelo, fue colocada una esfera maciza. La barra comienza a caer sin velocidad inicial. ¿Para qué ángulo α, entre la barra y la vertical, la barra dejará de presionar sobre el suelo? ¿Para qué valor del coeficiente de fricción el extremo de la barra no se deslizará hasta ese momento?

197. ¿A qué distancia de la base de la barra caerá la esfera (véase el problema **196**), si el coeficiente de fricción es $k > \frac{\sqrt{5}}{2}$?

198. Un alambre está doblado en forma de arco con radio R (fig. 80). En el alambre se asienta una cuenta de vidrio que puede moverse a lo largo del alambre sin

fricción. En el momento inicial la cuenta se encontraba en el punto O. ¿Qué velocidad horizontal es necesario transmitir a la cuenta a fin de que ésta, recorriendo

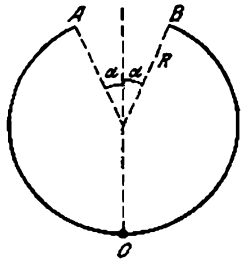


Fig. 80

una parte del trayecto en el aire, caiga nuevamente en el alambre en el punto B?

199. Un cuerpo pequeño se desliza por una superficie inclinada que se transforma en un rizo Nésterov de altura mínima, a fin de que el cuerpo no se desprenda de la superficie del arco (fig. 81). ¿Qué corte simétrico,

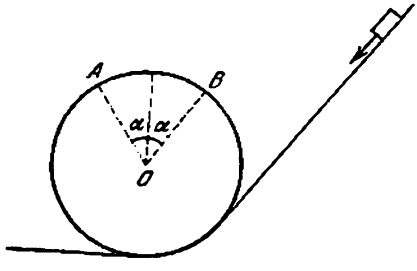


Fig. 81

caracterizado por el ángulo $\alpha < 90°$, puede ser hecho en el riso para que el cuerpo, recorriendo una parte del camino en el aire, caiga en el punto B del rizo? ¿Cómo se moverá el cuerpo si el ángulo α es mayor o menor que el hallado? La fricción y la resistencia del aire pueden ser despreciadas.

200. En los extremos de un hilo que pasa a través de dos clavos están sujetos los pesos (fig. 82) que se mueven circularmente. A la izquierda están dos pesos de

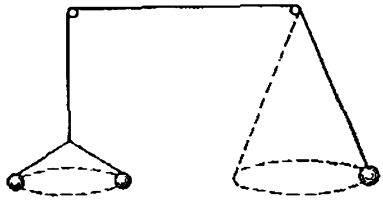


Fig. 82

masa m cada uno, a la derecha, un peso de masa $2\,m$. ¿Estará este sistema en equilibrio?

201. En un hilo muy fino está colgada una bola. El hilo se pone en posición horizontal y después se suelta. ¿En cuáles puntos de la trayectoria la aceleración de bola estará dirigida verticalmente hacia abajo, en cuáles estará dirigida verticalmente hacia arriba, y en cuáles, horizontalmente? En el momento inicial el hilo no estaba extendido.

202. Una barra imponderable puede girar en un plano vertical respecto al punto O. En la barra están sujetas dos cargas de masas m_1 y m_2 a unas distancias r_1 y r_2 del punto O (fig. 83). La barra fue suelta sin

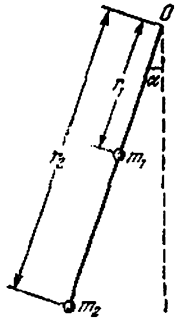


Fig. 83

velocidad inicial de una posición que forma un ángulo α con la vertical. Determinar las velocidades

lineales de las cargas de masas m_1 y m_2 en el momento, cuando la barra está en posición vertical.

203. En el eje de una máquina centrífuga fue colocada una pesa de plomo, a la cual fue atada una pequeña bola en un hilo de longitud $l = 12{,}5$ cm. Hallar el ángulo α de inclinación del hilo con relación a la vertical, si la máquina hace 1 rotación por segundo, 2 rotaciones por segundo.

204. Una barra imponderable, doblada de tal forma como lo muestra la fig. 84, gira con velocidad angular ω

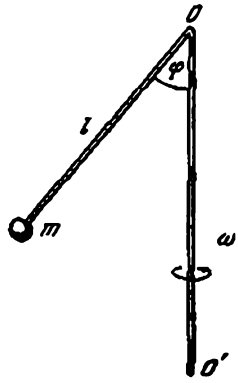


Fig. 84

respecto al eje OO'. En el extremo de la barra está sujeto un peso de masa m. Determinar la fuerza con que la barra actúa sobre el peso m.

205. Una barra imponderable AOO', doblada como muestra la fig. 85, gira con velocidad angular ω respecto al eje OO'. En la barra fue asentada una cuenta de vidrio de masa m. Determinar a qué distancia l del punto O la cuenta estará en equilibrio, si el coeficiente de fricción entre la cuenta y la barra es igual a k.

206. En una barra vertical que gira con velocidad angular ω fue atado un hilo de longitud l, en cuyo extremo se encuentra un peso de masa m. Al peso, a su vez, fue atado otro hilo de la misma longitud que en su extre-

mo tiene un segundo peso de masa m. Demostrar que el ángulo entre el primer hilo y la vertical será menor

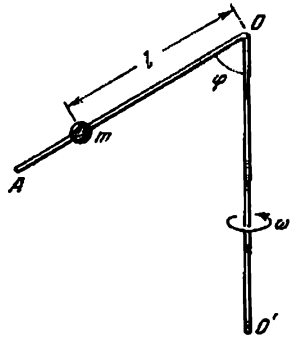


Fig. 85

que el ángulo entre la vertical y el segundo hilo. El peso del hilo puede ser prescindido.

207. En una barra imponderable están atados dos pesos de masas m y M. La barra, mediante una articulación, está unida al eje vertical OO' (fig. 86). El eje OO'

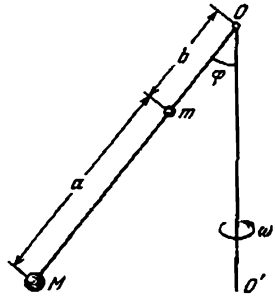


Fig. 86

gira con velocidad angular ω. Determinar el ángulo φ formado por la barra y la vertical.

208. Una barra horizontal recta gira con velocidad angular constante en torno de un eje vertical. Un cuerpo puede

deslizarse por la barra sin fricción. Inicialmente el cuerpo se mantiene en posición de equilibrio mediante un muelle (fig. 87). ¿Qué pasará con el cuerpo si le

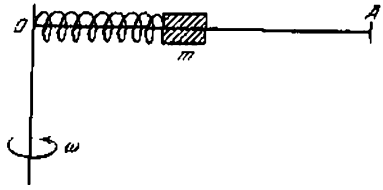


Fig. 87

transmitimos una velocidad inicial a lo largo de la barra? Es posible prescindir de la longitud del muelle suelto.

209. Una cadena metálica de longitud $l = 62{,}8$ cm, cuyos extremos están unidos, fue colocada en un disco de madera (fig. 88). El disco gira con una velocidad

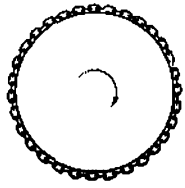


Fig. 88

$n = 60$ rotaciones por segundo. Determinar la tensión de la cadena T, siendo su masa $m = 40$ g.

210. Por un tubo de goma, doblado en forma de un anillo, circula el agua con velocidad v (fig. 89). El radio del anillo es R, el diámetro del tubo es $d \ll R$. ¿Con qué fuerza se dilata el tubo de goma?

211. Una barra homogénea de longitud l y de masa m gira con una velocidad angular ω en un plano horizontal, en torno al eje que pasa por su extremo. Encontrar la tensión de la barra a distancia x de su eje de rotación.

212. Una bola de masa m, fijada en una barra imponderable, gira con velocidad constante v en un plano horizontal

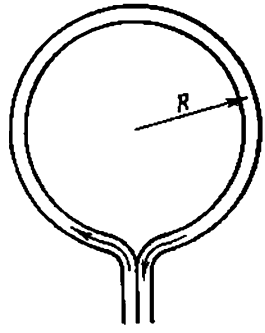


Fig. 89

(fig. 90). La energía cinética de la bola en el sistema de coordenadas inmóvil respecto al eje de rotación es constante e igual a $mv^2/2$. Con relación al sistema

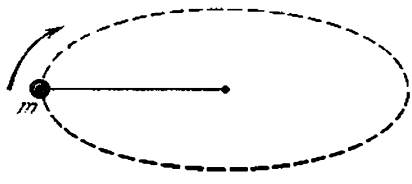


Fig. 90

de coordenadas de movimiento rectilíneo en un plano horizontal, con velocidad v con relación al eje, la energía cinética varía en el transcurso del tiempo de cero a $4\ mv^2/2$. ¿Cuál es la causa de este cambio de energía?

213. Un aro homogéneo y fino rueda por una superficie horizontal con una velocidad constante v. ¿Cómo y bajo la acción de qué fuerzas varía la energía total de un pequeño sector AB que se encuentra en un momento dado en el punto más alto del aro?

214. Un hilo está arrollado en una bobina pesada, la cual se encuentra en una superficie horizontal áspera, por

donde puede rodar sin deslizamiento. Si se tira del hilo en dirección horizontal hacia la izquierda, la bobina también rodará para la izquierda. Si la dirección del hilo cambia (fig. 91), entonces, para

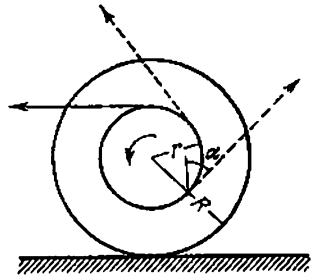


Fig. 91

cualquier valor del ángulo α entre la dirección del hilo y la vertical, la bobina rodará hacia la derecha. Determinar este ángulo. ¿Qué ocurrirá con la bobina para el valor del ángulo dado? El radio de la parte externa de la misma es R, de la interna es r.

215. Encontrar la energía cinética de un aro de masa M y de radio R, si el aro se mueve uniformemente con velocidad v y gira con una velocidad angular ω en torno al eje que pasa por el centro.

216. Determinar la energía cinética de la oruga de un tractor que se mueve con velocidad v. La distancia entre los ejes de las ruedas sobre las cuales está la oruga es igual a l; el radio de las ruedas es r. La unidad de la longitud de la oruga pesa P.

217. ¿Cómo averiguar cuál de los dos cilindros de dimensiones iguales es hueco, si están hechos de materiales desconocidos con diferentes densidades? Las masas de los cilindros son iguales.

218. En una bobina de radio R fue arrollado uniformemente un cable flexible (fig. 92). El peso de la unidad de longitud del cable es ρ. El peso de todo el cable es P. La bobina se mueve sin deslizamiento por inercia a lo largo de un plano horizontal. El cable se desenrolla y queda en el plano. Inicialmente, cuando todo

el cable estaba arrollado en la bobina, la velocidad del centro de la bobina era igual a v. Prescindiendo del radio de la sección transversal del cable (en comparación con R) y de la masa de la propia bobina, calcular la velocidad del centro de la bobina en el

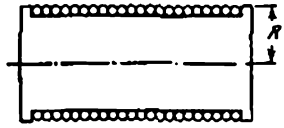


Fig. 92

momento cuando se encuentre en el plano una parte del cable de longitud x. ¿Bajo la acción de qué fuerza varía la cantidad de movimiento del cable?

219. Sobre una polea de radio r que gira en torno de un eje fijo actúa la fuerza de fricción f (fig. 93). Determinar

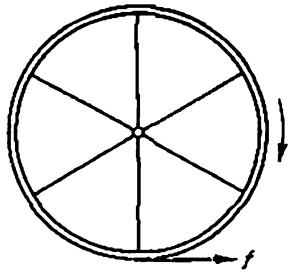


Fig. 93

la variación de la velocidad angular de la polea en función del tiempo, si en el momento inicial la velocidad angular es igual a ω_0. La masa de la polea es m, la masa de los rayos puede ser despreciada.

220. Un aro de radio r que gira con velocidad angular ω_0, fue colocado en una superficie horizontal áspera. Determinar la velocidad v del centro del aro después de terminar el deslizamiento. En el momento inicial la velocidad del centro del aro era nula.

221. A un aro de radio r, colocado en un plano horizontal áspero, fue transmitida en dirección horizontal una

velocidad de avance v_0. Determinar la velocidad angular ω de rotación del aro, después de haber terminado el deslizamiento de éste.

222. Un aro de radio r que gira con velocidad angular ω_0 fue colocado en un plano horizontal áspero. Al aro fue transmitida una velocidad de avance v_0 (fig. 94).

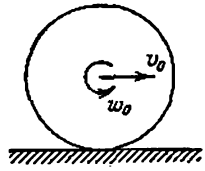


Fig. 94

Considerando que la fuerza de fricción de deslizamiento es igual a f, determinar el carácter del movimiento del aro.

223. Un tubo cilíndrico de radio r está unido, por los rayos, a dos aros de radio R. La masa de ambos aros es igual a M. La masa del tubo y de los rayos en comparación con la masa de los aros M, puede ser menospreciada.

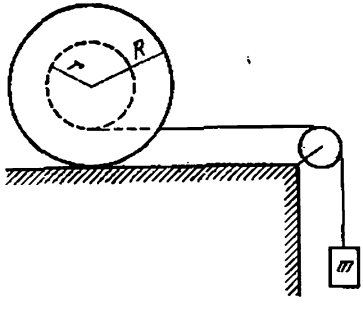


Fig. 95

En el tubo fue arrollado un hilo que se apoya sobre una polea imponderable. Un peso de masa m (fig. 95) fue atado al extremo del hilo. Encontrar la aceleración del peso, la tensión del hilo y la fuerza de fricción entre los aros y el plano. (Considerar que los aros

no se deslizan.) Determinar para qué valores del coeficiente de fricción los aros se deslizarán.

224. Sobre un plano inclinado está situada una bobina. En la bobina fue devanado un hilo apoyado sobre una polea imponderable y en cuyo extremo libre está atado un peso de masa m (fig. 96). Se supone que la

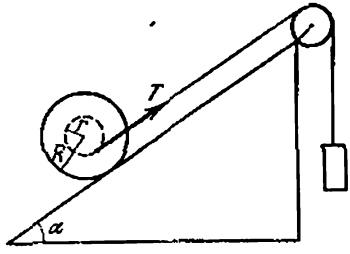


Fig. 96

masa de la bobina M está distribuida uniformemente por la circunferencia de radio R. No hay fricción. Determinar para qué valor del ángulo de inclinación α el centro de gravedad de la bobina estará en reposo.

225. Una tabla de masa M fue colocada sobre dos rodillos cilíndricos iguales, de radio R. Los rodillos se encuentran en un plano horizontal. En el momento inicial el sistema estaba en reposo. Luego a la tabla le aplicaron una fuerza Q en dirección horizontal. Hallar la aceleración de la tabla, el valor de las fuerzas de rozamiento entre los rodillos y la tabla, así como entre los rodillos y el plano horizontal. Considerar que no existe deslizamiento. Los rodillos tienen la forma de dos barras cilíndricas de paredes delgadas de masa m cada una.

226. Una polea de dos etapas se compone de dos aros finos, rígidamente unidos entre sí, cuyos radios son R y r, y las masas M_1 y M_2, respectivamente. En cada una de las etapas de la misma se devanan hilos, en cuyos extremos se colocan pesos de masa m_1 y m_2 (fig. 97).

Hallar la aceleración de los pesos m_1 y m_2, la tensión de los hilos y la fuerza con que el sistema actúa sobre el eje de la polea.

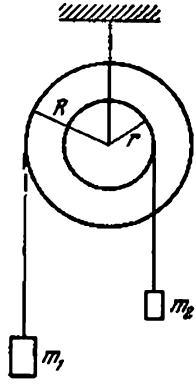


Fig. 97

227. Un cilindro de paredes delgadas y homogéneo de radio R y de masa M baja rodando sin deslizamiento, bajo la acción de la fuerza de la gravedad, de un plano inclinado que forma un ángulo α con la horizontal. Valiéndose del principio de conservación de la energía, determinar: 1) la velocidad del centro de gravedad y la velocidad angular de rotación del cilindro, transcurrido el tiempo t desde el inicio del movimiento. (Se supone que el cilindro en el momento inicial se encuentra en reposo); 2) la aceleración del centro de gravedad del cilindro.

§ 9. LEY DE GRAVITACION UNIVERSAL

228. ¿Por qué la Tierra transmite a todos los cuerpos una misma aceleración independientemente de la masa de éstos?

229. Encontrar la magnitud y la dimensión en el sistema CGS de la constante de gravitación universal, tomando en consideración que el radio medio de la Tierra es $R = 6{,}4 \cdot 10^8$ cm y la masa de la Tierra, $M = 6 \cdot 10^{27}$ g.

230. ¿En qué condiciones los cuerpos dentro de una nave cósmica estarán en estado de imponderabilidad, es

decir, dejarán de ejercer presión sobre las paredes de la cabina de la nave?

231. Un péndulo simple, que consta de una barra y un disco (fig. 98), está sujeto en un cuadro de madera

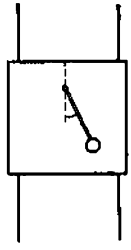


Fig. 98

que puede caer libremente a lo largo de dos alambres que lo dirigen. El péndulo se inclinó de la posición de equilibrio, en un ángulo α, y luego se soltó. En el momento, en que el péndulo pasaba por la posición más inferior, se dejó de sostener el cuadro, entonces éste comienza a caer libremente. ¿Cómo se moverá el péndulo con relación al cuadro? La fricción y la resistencia del aire pueden despreciarse.

232. Un planeta se mueve por una elipse, en cuyo foco se encuentra el Sol. Teniendo en cuenta el trabajo de la fuerza de gravitación, indicar ¿en qué punto de la trayectoria la velocidad del planeta será máxima y en qué punto será mínima?

233. Un satélite artificial de la Tierra se mueve a una altura $h = 670$ km por una órbita circular. Encontrar la velocidad del movimiento del satélite.

234. ¿Como varía, en función del tiempo, la velocidad de un satélite artificial de la Tierra que se mueve en las capas atmosféricas superiores?

235. Por una órbita circular, a una distancia no muy grande el uno del otro y en la misma dirección, vuelan dos satélites. Del primer satélite es necesario lanzar para el segundo un contenedor. ¿En qué caso el contenedor alcanzará con más rapidez el segundo satélite: si

lanzarlo en sentido del movimiento del primer satélite o en sentido opuesto al movimiento del mismo? La velocidad del contenedor respecto al satélite es u y es mucho menor que la velocidad del satélite v.

236. Valorar la masa del Sol M, conociendo el radio medio de la órbita de la Tierra $R = 149 \cdot 10^6$ km.

237. Determinar la distancia mínima h de la superficie de la Tierra del primer satélite artificial de ella, lanzado en la URSS el 4 de octubre de 1957, si se conocen los parámetros siguientes: la distancia máxima del satélite con relación a la Tierra $H = 900$ km; el período de rotación del satélite alrededor de la Tierra $T = 96$ min; el semieje mayor de la órbita lunar $R = 384\,400$ km; el período de movimiento de la Luna alrededor de la Tierra $T = 27{,}3$ días y el radio de la Tierra $R_0 = 6370$ km.

238. En el agua hay una burbuja de aire de radio r y una bola de hierro del mismo radio. ¿Se atraerán o repelarán la burbuja y la bola? ¿Cuál será el valor de la fuerza de interacción entre ellas? La distancia entre los centros de la bola y la burbuja es igual R.

239. En el agua hay dos burbujas de aire de radio r. ¿Habrá atracción o repulsión entre ellas? ¿Cuál es el valor de la fuerza de interacción? La distancia entre las burbujas es R.

240. Una esfera de plomo de radio $R = 50$ cm tiene, dentro de sí misma, una cavidad esférica de radio $r = 5$ cm,

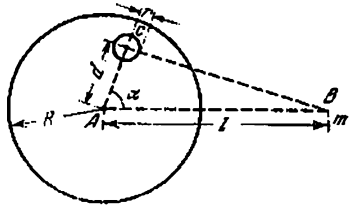


Fig. 99

cuyo centro se encuentra a una distancia $d = 40$ cm del centro de la esfera (fig. 99). ¿Con qué fuerza la esfera atraerá un punto material de masa $m = 10$ g, que se encuentra a una distancia $l = 80$ cm del centro

de la esfera, si la línea que une los centros de la esfera y de la cavidad, forma un ángulo $\alpha = 60°$ con la línea que une el centro de la esfera con el punto material?

241. Un cuerpo, cuyas dimensiones pueden menospreciarse, fue colocado dentro de una esfera homogénea y de pared delgada. Demostrar que la fuerza de atracción con que actúa la esfera sobre el cuerpo es igual a cero para cualquier posición del cuerpo dentro de la esfera.

242. ¿Con qué fuerza el centro de la Tierra atrae un cuerpo de masa m que se encuentra en un pozo profundo si la distancia del cuerpo al centro de la Tierra es igual a r? La densidad de la Tierra debe ser considerada como única en todos los puntos e igual a ρ.

§ 10. HIDRO- Y AEROSTATICA

243. En un vaso de agua flota, en posición vertical, un trozo de madera. ¿Cómo variará el nivel del agua en el vaso si el trozo de madera toma la posición horizontal?

244. Un recipiente de agua fue colocado en el extremo de una tabla (fig. 100). ¿Perderá el equilibrio la

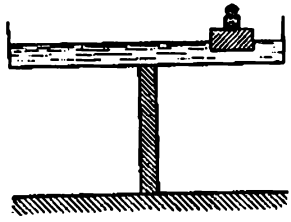


Fig. 100

tabla si sobre la superficie del agua se coloca un trozo de madera y sobre este último, un peso de modo que ambos floten en la superficie del agua?

245. En un vaso de agua flota un pedazo de hielo. ¿Cómo cambia el nivel del agua en el vaso cuando el hielo se derrite? Analizar los siguientes casos:

1) el hielo es completamente homogéneo;
2) en el hielo se encuentra una piedra fuertemente adherida;
3) dentro del pedazo de hielo hay una burbuja de aire.

246. Un cuerpo homogéneo y compacto, colocado en un líquido con peso específico d_1, pesa P_1; y colocado en un líquido con peso específico d_2, pesa P_2. Determinar el peso específico d del cuerpo.

247. En el centro de un lago grande congelado han hecho un claro. El grosor del hielo resultó igual a 10 m. ¿De qué longitud será necesaria la cuerda para sacar un balde de agua?

248. En una taza con agua flota una cajita de cerillas dentro de la cual hay una piedra pequeña. ¿Variará el nivel del agua en la taza si la piedra se saca de la cajita y se pone en el agua?

249. Un buque atraviesa una esclusa elevándose hasta el mayor nivel en la cámara de la misma, adonde el agua se bombea por la parte del nivel inferior (fig. 101).

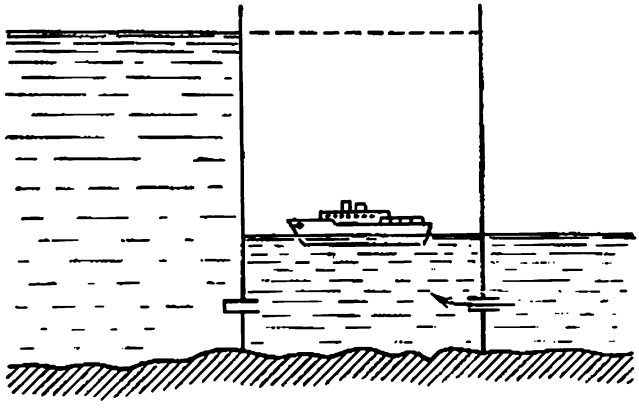


Fig. 101

¿En qué caso las bombas realizan mayor trabajo: cuando en la cámara se encuentra un buque grande o un navío pequeño?

250. De dos láminas homogéneas y del mismo grosor, con pesos específicos de 3,5 g/cm³ y 2 g/cm³, fueron cortados un cuadrado de lado a y un rectángulo de lados a y $2a$, siendo el cuadrado cortado del material más pesado. El cuadrado y el rectángulo fueron unidos en forma Г y colocados en el fondo de un recipiente

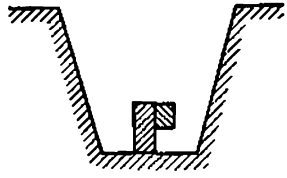


Fig. 102

vacío (fig. 102). ¿Qué pasará si llenamos el recipiente de agua?

251. Un tubo flota en el agua en posición vertical (fig. 103). La altura del tubo que sobresale del agua es

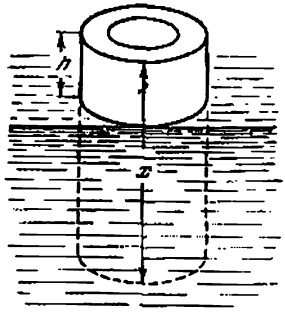


Fig. 103

$h = 5$ cm. Dentro del tubo se invierte aceite de peso específico $d = 0{,}9$ g/cm³. ¿Cuál deberá ser la longitud del tubo para llenarlo totalmente de aceite?

252. Un émbolo de peso $P = 30$ N tiene la forma de un disco redondo de radio $R = 4$ cm con una abertura, en la cual se pone un tubo de paredes finas y de radio $r = 1$ cm. El émbolo puede introducirse perfectamente

ajustado y sin fricción en el vaso e inicialmente se encuentra en el fondo del vaso. ¿A qué altura H se elevará el émbolo, si echamos en el tubo $m = 700$ g de agua?

253. Una pelota de goma de masa m y de radio R se sumerge en el agua a una profundidad h y luego se suelta. ¿A qué altura, a partir de la superficie del agua, saltará la pelota? Se prescinde de la resistencia del agua y del aire durante el movimiento.

254. Una tabla que tiene uno de los extremos fuera del agua se apoya en una piedra que a su vez sobresale del agua. La tabla tiene la longitud l. Una parte

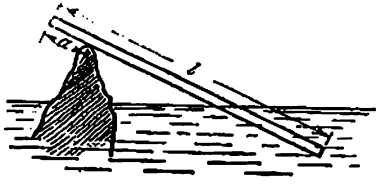


Fig. 104

de la tabla de longitud a se encuentra sobre el punto de apoyo (fig. 104). ¿Qué parte de la tabla está hundida si el peso específico de madera es d?

255. Un hombre que traía una cámara de neumático, decidió facilitar su trabajo, utilizando la fuerza de empuje del aire (por la ley de Arquímedes). Para esto el hombre bombeó la cámara aumentando su volumen. ¿Obtuvo el hombre su objetivo?

256. En una balanza analítica de precisión que se encuentra bajo una camisa de vidrio, pesan un cuerpo. ¿Variará la indicación de la balanza, si se evacua el aire de la camisa?

257. ¿Cuál es el error cometido al pesar un cuerpo de volumen $V = 1$ l, si al pesarlo en el aire, utilizamos pesos de cobre de masa $M_1 = 800$ g? El peso específico del cobre es $d_1 = 8{,}8$ g/cm³ y del aire es $d_0 = 1{,}29$ g/l.

258. Calcular la masa de la atmósfera de la Tierra.

259. En alta mar cayó una botella abierta. ¿Aumentará o disminuirá la capacidad de la botella bajo la presión del agua?

260. Un recipiente tiene la forma de un prisma (fig. 105). El fondo del recipiente es un rectángulo con dimen-

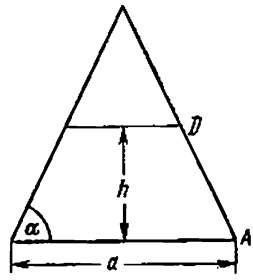


Fig. 105

siones a y b. El recipiente se llena hasta la altura h con un líquido de densidad ρ. Determinar la fuerza con que las paredes laterales actúan sobre el fondo del recipiente. El peso de las paredes se desprecia.

261. Un recipiente sin fondo, cuya forma y dimensiones están representadas en la fig. 106, se encuentra en

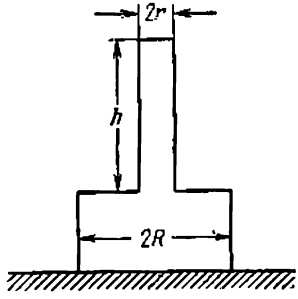


Fig. 106

una mesa. Los bordes del recipiente están bien ajustados a la superficie de la mesa. El peso del recipiente es P. En el recipiente se vierte un líquido. Una vez

que el nivel de éste alcance una altura h, el recipiente bajo la acción del líquido se elevará. Determinar la densidad ρ del líquido vertido.

262. Un recipiente cónico sin fondo está en una mesa. Los bordes del recipiente están bien ajustados a la superficie de la misma. Después que el nivel del líquido en el recipiente alcance una altura h, la presión del agua hará subir el recipiente. El radio de la base inferior del recipiente (que es mayor) es igual a R, el ángulo entre la generatriz del cono y la vertical es α, el peso del recipiente es P. ¿Cuál es la densidad del líquido introducido?

263. Tres recipientes con fondo falso se sumergieron en el agua a una misma profundidad. El fondo de cada uno de los recipientes (fig. 107) caerá, si vertemos

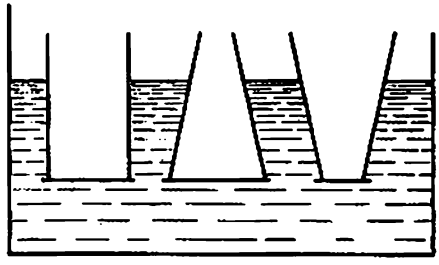


Fig. 107

en ellos 1 kg de agua. ¿Caerán los fondos, si se echa en los recipientes 1 kg de óleo? ¿Si los llenamos de 1 kg de mercurio? ¿Si colocamos en cada recipiente un peso de 1 kg?

264. Dos vasos cilíndricos comunicantes están llenos de mercurio y sobre el mercurio se echa el agua. El nivel del agua en ambos vasos es igual. ¿Serán iguales los niveles de agua y de mercurio, si en uno de los vasos metemos un pedazo de madera y en el otro echamos una cantidad de agua equivalente al peso del pedazo de madera? Analizar los casos cuando los vasos tienen iguales y diferentes secciones.

265. Dos vasos cilíndricos comunicantes con secciones transversales, de diferentes áreas, están llenos de mercurio. En el vaso más ancho se pone un cubo de hierro de volumen V_0; como consecuencia de esto, el nivel de mercurio en este vaso subió. Luego, en este mismo vaso se vierte el agua hasta el momento, en que el nivel de mercurio alcance la posición anterior. Encontrar la altura de la columna del agua h si el área de la sección transversal del vaso estrecho es igual a S_1.

266. En una balanza de gran sensibilidad fueron equilibrados dos barómetros de mercurio: uno en forma de platillo (con un plato ancho) y el otro en forma de U (fig. 108). Los barómetros están hechos del

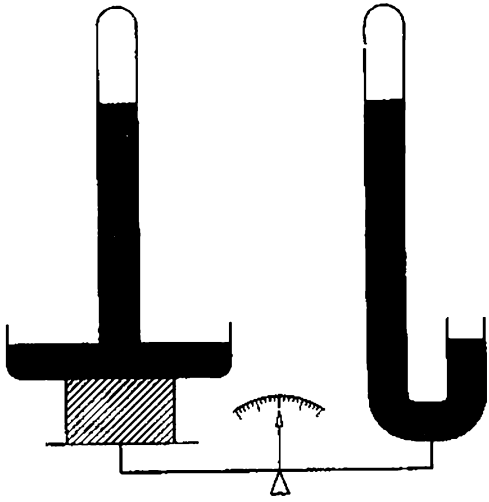


Fig. 108

mismo material, tienen el mismo diámetro de los tubos y contienen la misma cantidad de mercurio. Las distancias entre las partes soldadas de los tubos y los niveles superiores del mercurio en ellos son iguales. ¿Cómo variará el equilibrio de la balanza si aumenta la presión atmosférica?

267. Un colchón de aire está lleno hasta una determinada presión que pasa la atmosférica. ¿En qué caso la presión del aire en el colchón será mayor: cuando el hombre está de pie sobre éste, o cuando está acostado?

268. La rueda de un automóvil está construida del siguiente modo: en la llanta metálica de la rueda se pone una cámara de goma colocada dentro de una cubierta. Luego la cámara se llena de aire. La presión del aire en las partes inferior y superior de la cámara es igual. Además de la presión del aire, sobre la llanta actúa una fuerza de gravedad (fig. 109). ¿Por qué la llanta no cae? ¿Qué es lo que mantiene la llanta en estado de equilibrio?

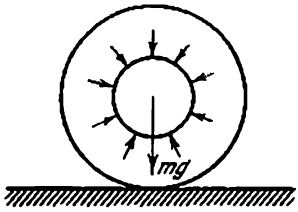


Fig. 109

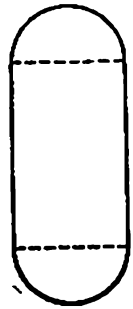


Fig. 110

269. Una caldera de vapor está compuesta de una parte cilíndrica y de dos fondos semiesféricos (fig. 110). Los radios de la parte cilíndrica y de ambos fondos de la caldera son iguales. El grosor de la pared de la parte cilíndrica es de 0,5 cm. Todas las partes de la caldera están hechas del mismo material. ¿Cuál debe ser el grosor de las paredes de los fondos para que la resistencia de todas las partes de la caldera sea igual?

270. ¿Qué forma debe tener una caldera de vapor, a fin de que la resistencia de la caldera, siendo el grosor de las paredes dado, sea máxima?

271. Un recipiente con agua cae con aceleración $a < g$. ¿Cómo variará la presión p en el vaso en función de la profundidad?

272. Un recipiente con un cuerpo que flota en él, cae con aceleración $a < g$. ¿Subirá el cuerpo a la superficie en estas condiciones?

273. Una cisterna, cuya forma se da en la fig. 111, está llena hasta el máximo de agua y se mueve con acele-

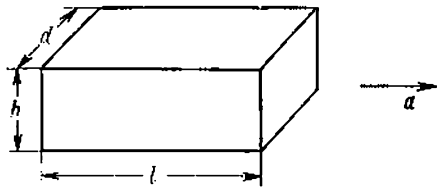


Fig. 111

ración a en la dirección horizontal. Determinar la fuerza con que el agua actúa sobre la tapa de la cisterna.

274. En el problema anterior determinar la fuerza con la cual el agua actúa sobre el fondo de la cisterna.

275. En un carrito se halla un depósito de forma cúbica, lleno de agua hasta el borde (fig. 112). El carrito

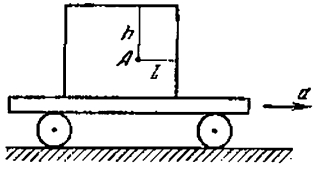


Fig. 112

se mueve con aceleración constante a. Determinar la presión a una profundidad h, en el punto A, alejado de la pared delantera a una distancia l, si el depósito está cerrado herméticamente con una tapa.

(Durante el movimiento uniforme la tapa no ejerce presión sobre el agua.)

276. Un depósito rectangular sin tapa (las dimensiones del depósito están indicadas en la fig. 113) se mueve con aceleración a. El tanque está lleno de agua hasta

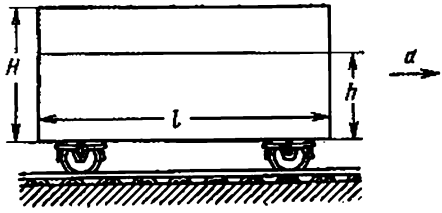


Fig. 113

una altura h. ¿Cuál debe ser la aceleración a, para que el agua comience a desbordarse?

277. Un recipiente con agujero en el fondo se coloca en un carrito. La masa del recipiente con el carrito es M, el área de la base del recipiente es S. ¿Con qué

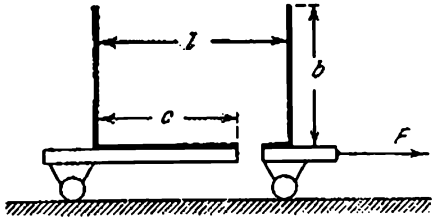


Fig. 114

fuerza F es necesario tirar del carrito para que en el recipiente quede la máxima cantidad de agua? Las dimensiones del recipiente están indicadas en la fig. 114. Rozamiento no lo hay.

278. ¿Se puede con ayuda de un sifón trasegar el agua a través de una pared de 20 m de altura?

279. Un recipiente, mostrado en la fig. 115, está completamente lleno de agua. ¿Qué ocurrirá si sacamos el tapón A? El radio del agujero es 0,5 cm.

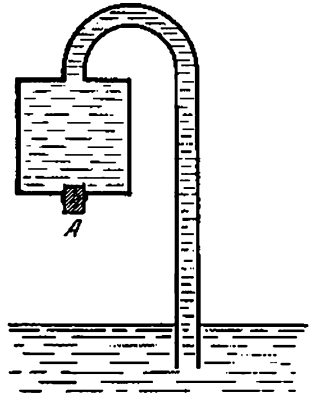


Fig. 115

280. Cuatro bombas de émbolo están hechas de unos sectores de tubos de diámetros grandes y pequeños. Las bombas han elevado el nivel de agua a una misma altura

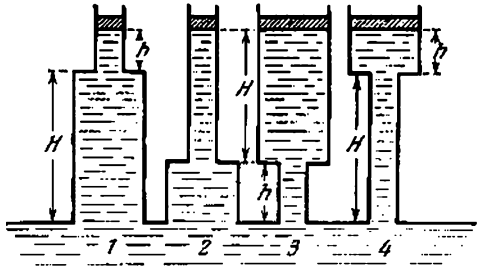


Fig. 116

$H + h$ (fig. 116). ¿Por el cuál de los pistones es necesario tirar con mayor fuerza para mantenerlo en equilibrio? Despreciar el peso de los pistones.

281. Se ha propuesto el siguiente proyecto del perpetuum móbile (fig. 117). Un recipiente hermético se divide en dos partes por mamparo hermético, a través del cual pasa un tubo y una turbina hidráulica de construcción especial. Las cámaras de la turbina tienen tapas que se abren y se cierran automáticamente.

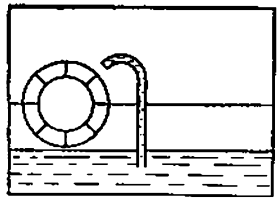


Fig. 117

La presión p_1 en la parte inferior del recipiente es mayor que la presión p_2 en la parte superior, y el agua sube por el tubo, llenando la cámara abierta de la turbina. Luego la cámara se cierra y la rueda gira. En la parte inferior del recipiente, la cámara se abre automáticamente devolviendo el agua. Luego, la cámara otra vez se cierra herméticamente, etc. ¿Por qué dicha construcción no funcionará eternamente?

282. Fue sugerida la siguiente variante de construcción del motor descrito en el problema 281. Las cámaras

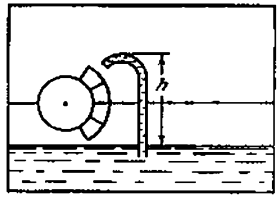


Fig. 118

herméticas (fig. 118) se llenan de agua en la parte derecha de la rueda y se bajan. En el fondo las cámaras se abren y, a diferencia del proyecto anterior (pro-

blema 281), las paredes de la cámara se cierran automáticamente en el interior de la rueda. En la parte superior del recipiente, las paredes se abren automáticamente y se llenan de agua. En lo demás el perpetuum móbile está construido del mismo modo que el descrito anteriormente. ¿Por qué este motor tampoco funcionará?

283. ¿Por qué es imprescindible durante el ascenso de un globo estratosférico llevar a bordo un lastre? Se sabe que el peso excedente en realidad reduce el «techo» del globo estratosférico.

§ 11. HIDRO- Y AERODINAMICA

284. En la pared de un recipiente con agua se perforan dos orificios, uno encima de otro, de área $S = 0{,}2$ cm^2 cada uno. La distancia entre los orificios es $H = 50$ cm. En el recipiente cada segundo se vierte $Q = 140$ cm^3 del agua. Encontrar el punto de intersección de los chorros de agua que salen de los orificios.

285. Sobre la superficie lisa de una mesa se halla un recipiente amplio con agua. El nivel del agua en el recipiente es h, el peso del recipiente con el agua es Q. En la pared lateral del recipiente, junto al fondo, hay un orificio de bordes redondeados de área S, cerrado por un tapón. ¿Para qué valor del coeficiente de rozamiento entre el fondo y la superficie de la mesa, el recipiente empezará a moverse al sacar el tapón?

286. Al salir el chorro de líquido de un recipiente a través de un orificio de área S_0, la fuerza que actúa sobre la pared con el orificio es $2pS_0$ menor que la que actúa sobre la pared opuesta (véase el problema 285). Si en el orificio se coloca un tubo, como muestra la fig. 119, entonces la diferencia de las fuerzas que actúan sobre las paredes opuestas se hace aproximadamente igual a pS_0, puesto que, debido al tubo, junto a la pared el líquido no se mueve.
Por otra parte, la variación de la cantidad de movimiento del líquido por unidad del tiempo durante

la salida del recipiente siempre es igual a $2pS$, donde S es el área de la sección transversal del chorro. ¿Cómo relacionar entre sí estos hechos?

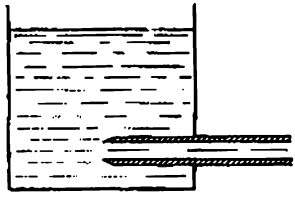


Fig. 119

287. Un chorro de agua que sale por un tubo de diámetro $d = 1$ cm, con velocidad $v = 1$ m/s, choca contra una pared vertical. Determinar la fuerza que actúa sobre la pared, considerando que el tubo está dirigido perpendicularmente a la pared y el agua no se salpica.

288. En un tubo, doblado en ángulo recto, de sección transversal S, pasa el gas con velocidad v. La densidad del gas es ρ. ¿Con qué fuerza el gas actúa sobre el tubo? Prescindir de la compresión del gas y del rozamiento.

289. Encontrar la fuerza que actúa sobre la paleta de una rueda (fig. 120), considerando que el chorro

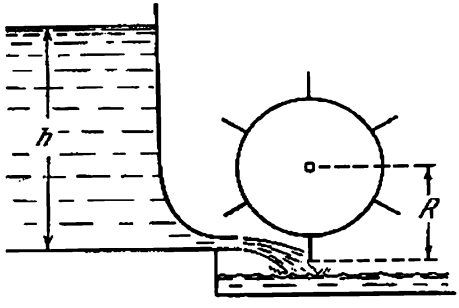


Fig. 120

después de chocar con la paleta, continúa el movimiento con la velocidad de la paleta. La altura de

la presión del agua es h, el radio de la rueda es R, la velocidad angular de rotación de la rueda es ω y el área de la sección transversal del chorro es S.

290. Un buque sufrió una ruptura seria en la obra viva

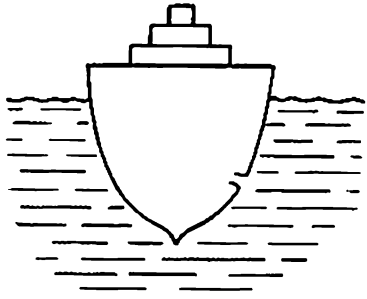


Fig. 121

(fig. 121). ¿Para cuál lado se desplazará el buque como consecuencia de esta ruptura?

291. De un recipiente amplio a través de un tubo estrecho comienza a salir cierto líquido (fig. 122). ¿Cómo

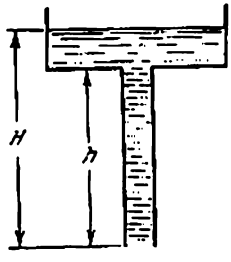


Fig. 122

están distribuidas, por la vertical, la presión y la velocidad del líquido en el recipiente y en el tubo?

292. Un recipiente con agua, descrito en el problema anterior, se cuelga en una balanza de resorte. La parte inferior del tubo está cerrada con un tapón. ¿Cómo variará la indicación de la balanza en el primer instante, cuando se saque el tapón y empiece a salir el líquido?

293. En uno de los platillos de la balanza se encuentra un recipiente con agua (fig. 123). La balanza está en equilibrio. ¿Perderá el equilibrio la balanza si

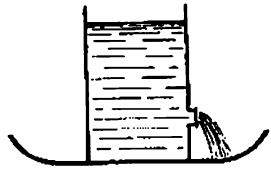


Fig. 123

abrimos el grifo? (El agua que sale del recipiente cae en el mismo platillo en el que se encuentra éste.)

294. En la fig. 124 está representado el ariete hidráulico (una construcción de autoelevación del agua). El principio de su funcionamiento se basa en el fenómeno

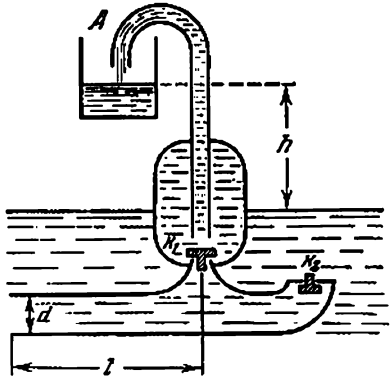


Fig. 124

del golpe de ariete, o sea, el crecimiento brusco de la presión en el líquido que corre por un tubo, al parar bruscamente; por ejemplo, al cerrar la válvula que deja pasar el agua del tubo.

Un tubo de longitud $l = 2$ m y de diámetro $d = 20$ cm fue colocado en un arroyo, cuya velocidad es $v =$

= 400 cm/s. Supongamos que al principio la válvula K_2 está abierta y la válvula K_1 cerrada. El aumento brusco de la presión obliga abrirse a la válvula K_1 (en este caso la válvula K_2 se cierra) y el agua se dirige hacia arriba, en dirección al recipiente A. La presión disminuye, la válvula K_1 se cierra y la válvula K_2 se abre. El agua en el tubo empieza a moverse, y todo se repite en la misma consecuencia anteriormente descrita. Determinar la cantidad del agua elevada por el ariete durante 1 hora a una altura h = 30 m, sabiendo que cada válvula se abre 30 veces por minuto.

295. Durante las tempestades, cuando la velocidad del viento alcanza un valor considerable, el viento arranca los tejados de las construcciones. Se observan dos tipos de caída de los techos: 1) si el techo está mejor sujeto en los puntos A y B que en el punto C (el remate), entonces la corriente de aire parece abrir el techo por la línea que pasa por el punto C (fig. 125, *a*); 2) si el techo está bien fijo en el punto

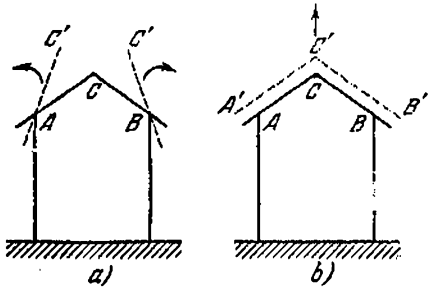


Fig. 125

C y menos fijo en los puntos A y B, entonces el flujo de aire primero eleva el techo hacia arriba y después lo lleva al lado (fig. 125, *b*). ¿Cómo pueden explicarse estos fenómenos?

296. ¿Por qué una bola ligera de celuloide puesta en un chorro de aire o de agua que sale con gran velocidad

por un tubo de orificio estrecho, planea libremente en este chorro (fig. 126)?

Fig. 126

297. Un aparato de demostraciones representado en la fig. 127, consta de dos discos *A* y *B*. En el centro del disco *A* hay un orificio unido por un tubo a un

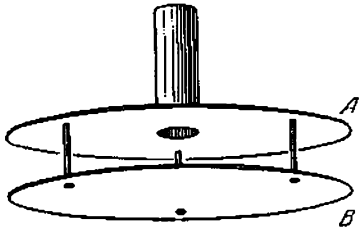


Fig. 127

balón de aire comprimido. El disco *B* está colgado en tres barras pequeñas, a lo largo de las cuales él puede desplazarse libremente por la vertical. Si hacemos pasar un chorro de aire comprimido por el tubo, el disco inferior empezará a tocar el superior. Explicar el principio de este fenómeno.

298. En el fondo de un recipiente amplio hay un tubo fino por el cual el agua que llena el recipiente puede salir de éste (fig. 128). Entre el recipiente y el tubo se pone una red. Si una bola ligera se coloca en el

fondo del recipiente en el momento, cuando el agua comienza a salir del recipiente, entonces la bola no subirá a la superficie. Si dejamos parar el agua, entonces la bola inmediatamente sube a la superficie.

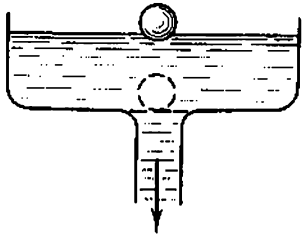


Fig. 128

¿Por qué? (Este experimento puede comprobarse fácilmente en una jofaina, utilizando una bola para tenis de mesa.)

299. Una bomba consta de un cilindro, situado horizontalmente, con un pistón de área S y un orificio de salida de área s que se encuentra cerca del eje del cilindro. Determinar la velocidad de la salida del chorro de la bomba si, bajo la acción de la fuerza F, el pistón se desplaza con una velocidad constante. La densidad del líquido es ρ.

300. En el problema **299** para $s \to S$, la velocidad v se vuelve indefinidamente mayor, incluso para una pequeña fuerza F. Explicar por qué surge este resultado paradójico.

301. Los relojes de agua (clepsidra) de la Grecia antigua representan un recipiente con un orificio pequeño O (fig. 129). El tiempo se marca por el nivel de agua en el recipiente. ¿Qué forma debe tener el recipiente para que la escala del tiempo sea uniforme?

302. Un vaso cilíndrico de líquido gira con una velocidad angular ω en torno de un eje vertical (fig. 130). Determinar la variación de la presión en la sección transversal del recipiente en función de la distancia

hasta el eje de rotación. (Utilizar el método expuesto en la resolución del problema 211.)

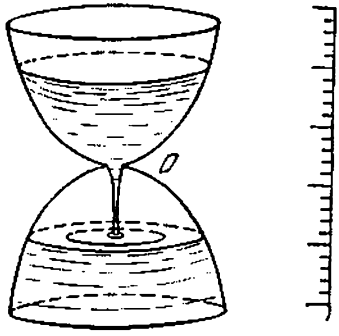


Fig. 129

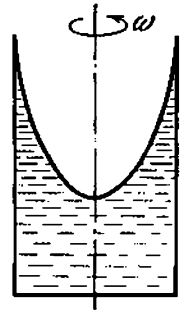


Fig. 30

303. Encontrar la forma de la superficie de un líquido en un recipiente cilíndrico que gira con velocidad angular ω en torno del eje vertical (o sea, hallar la altura del nivel del líquido en función de la distancia hasta el eje de rotación).

304. ¿Por qué después de revolver el té con una cucharilla, los trocitos de las hojas de té se juntan en el medio del vaso?

Capítulo II

Calor. Física molecular

§ 12. EXPANSION TERMICA DE LOS CUERPOS SOLIDOS Y LIQUIDOS

305. En una rueda de madera de 100 cm de diámetro es necesario colocar un neumático de hierro, cuyo diámetro es 5 mm menor que el de la rueda. ¿En cuántos grados es necesario elevar la temperatura del neumático? El coeficiente de dilatación lineal del hierro es $\alpha_1 = 12 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}.

306. ¿Por qué en las construcciones de hormigón, como armadura se utiliza solamente el hierro (hormigón armado), mientras otros metales, como por ejemplo el duraluminio, no se utilizan?

307. Para medir la temperatura del cuerpo humano es necesario mantener el termómetro debajo del sobaco unos 5—8 minutos. No obstante, se puede hacerlo volver a la posición inicial inmediatamente después de tomar la temperatura. ¿Por qué?

308. La altura de la columna de mercurio medida en una escala de latón a temperatura t_1, es igual a H_1. ¿Cuál será la altura H_0 de la columna de mercurio a $t = 0°$ C? Los coeficientes de dilatación lineal del latón α y de dilatación volumétrica del mercurio β son conocidos.

309. ¿Cómo medir con un termómetro clínico la temperatura del cuerpo humano si la temperatura del medio ambiente es $+42°$ C?

310. Determinar las longitudes de las reglas de hierro y de cobre l'_0 y l''_0, a $t = 0°$ C, si las diferencias de las mismas a $t_1 = 50°$ C y $t_2 = 450°$ C son iguales

según el módulo y equivalen a $l = 2$ cm. El coeficiente de dilatación lineal del hierro $\alpha_1 = 12 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}, del cobre $\alpha_2 = 17 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}.

311. El período de las oscilaciones de un péndulo depende de la longitud que varía con la temperatura. ¿De qué modo puede realizarse la suspensión del péndulo para que su longitud no variara con la temperatura?

312. En un balón de vidrio, a temperatura $t_0 = 0°$ C, caben $m_0 = 100$ g de mercurio. A $t_1 = 20°$ C en este mismo balón caben $m_1 = 99{,}7$ g de mercurio. (En ambos casos hay que considerar la temperatura del mercurio igual a la del balón.) Hallar, valiéndose de estos datos, el coeficiente de dilatación lineal del vidrio α, teniendo en cuenta que el coeficiente de dilatación volumétrica del mercurio $\beta_1 = 18 \cdot 10^{-5}$ grad^{-1}.

313. Un reloj de péndulo metálico adelanta $\tau_1 = 5$ s por día a una temperatura $t_1 = +15°$ C y atrasa $\tau_2 = 10$ s por día a una temperatura $t_2 = 30°$ C. Encontrar el coeficiente α de expansión térmica del metal del péndulo, considerando que el período de oscilación de éste $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ (l es la longitud del péndulo; g, la aceleración de la caída libre).

§ 13. PRINCIPIO DE CONSERVACION DE LA ENERGIA. CONDUCTIBILIDAD TERMICA

314. En un carrito de masa M, que se mueve por inercia con una velocidad igual a v_0, se coloca desde arriba un ladrillo de masa m. Determinar la cantidad de calor que, en este caso, será desprendido.

315. A lo largo de un cordón de goma imponderable, de l_0, se desliza (fig. 131) una arandela de hierro. La fuerza de fricción que actúa entre el cordón y la arandela, es constante e igual a f. El coeficiente de elasticidad del cordón es conocido e igual a k. Encontrar la cantidad del calor Q que se desprende en este caso.

316. Una nevera que consume una potencia w, durante el tiempo τ transformó en hielo el agua que tenía m de masa y t grados de temperatura. ¿Qué cantidad

de calor desprenderá la nevera al cuarto en este intervalo de tiempo, considerando que la capacidad calorífica de la nevera puede ser despreciada?

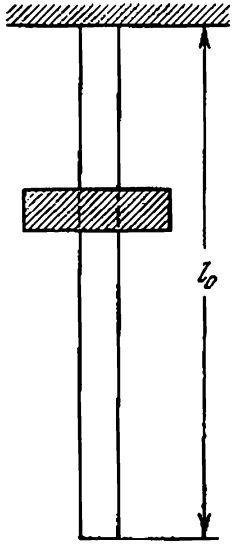


Fig. 131

317. ¿Disminuirá la temperatura en el cuarto si abriésemos la puerta de la nevera en pleno funcionamiento?

318. Es más fácil calentar un cuarto, utilizando la energía de la corriente eléctrica mediante los aparatos electrocalentadores ¿Es ésta la forma más ventajosa desde el punto de vista energético?

319. Iguales cantidades de sal se disuelven en dos samejantes recipientes llenos de agua. En el primer caso la sal se coge en forma de cristal grande y en el segundo, en forma de polvo. ¿En qué caso la temperatura de la solución, después de la disolución total de la sal, será mayor, si la sal, antes de disolverse, y el agua tenían la misma temperatura?

320. Se sabe que si calentamos o enfriamos el agua, guardando ciertas medidas de precaución, podemos obtener

el agua en estado líquido a temperaturas menores que 0° C y mayores que +100° C.
En un calorímetro de capacidad calorífica igual a $q = 1\,700$ J/grad se encuentra $m_1 = 1$ kg de agua enfriada hasta $t_1 = -10°$ C. Junto con ésta se vierte $m_2 = 100$ g de agua recalentada hasta $t_2 = +120°$ C. ¿Cuál será la temperatura establecida en el calorímetro?

321. Una lámpara de incandescencia que consume $N = 54$ vatios, fue sumergida en un calorímetro transparente que contiene $V = 650$ cm³ de agua. Durante $\tau = 3$ min el agua se calienta en $t = 3{,}4°$ C. ¿Qué parte de la energía Q consumida por la lámpara, se emite por el calorímetro al exterior en forma de energía radiante?

322. El área de una pared de ladrillo que da a la calle, es $S = 12$ m² y el grosor es $d = 1$ m. La temperatura del aire exterior es $T_0 = -15°$ y la temperatura del aire en la habitación es $T = +15°$. ¿Cuál será la cantidad de calor que sale de la habitación durante 24 horas? El coeficiente de conductibilidad térmica del ladrillo es $k = 1{,}3$ J/(m.s.grad).

323. La pared consta de dos láminas adyacentes, hechas de diferentes materiales. Los coeficientes de conductibilidad térmica y los grosores de las láminas son iguales a k_1, d_1 y k_2, d_2, respectivamente (fig. 132).

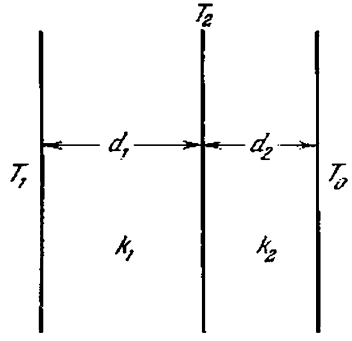


Fig. 132

Las temperaturas de las superficies externas de las paredes son iguales a T_1 y T_0 ($T_0 > T_1$) y se mantie-

nen constantes. Determinar la temperatura T_2 en la superficie de separación de las láminas.

324. Al considerar que las láminas (véase el problema 323) tienen el mismo grosor d, determinar el coeficiente de conductibilidad térmica de la pared.

325. Una pared consta de barras alternadas de longitud d y de coeficientes de conductibilidad térmica k_1 y k_2 (fig. 133). Las áreas de la sección transversal

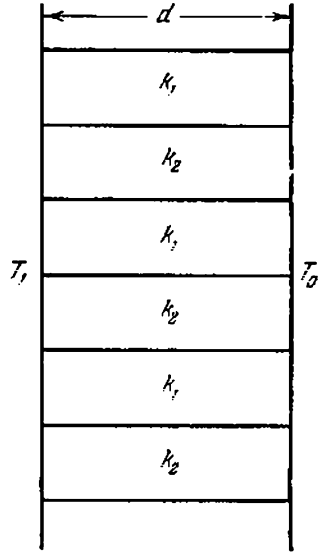


Fig. 133

de las barras son iguales. Determinar el coeficiente de conductibilidad térmica de la pared.

326. Dos paredes A y B, del mismo grosor, son hechas de metales heterogéneos como está mostrado en las figs. 134 y 135. ¿En qué caso el coeficiente de conductibilidad térmica será mayor?

327. Una cacerola con agua hirviendo evapora en 1 segundo cierta cantidad m de agua. Considerando que el calor se transmite al agua solamente por el fondo de la cacerola y despreciando la pérdida del calor por las

paredes de la misma y por la superficie del agua entregada al medio ambiente, determinar la temperatura T de la superficie del fondo de la cacerola que

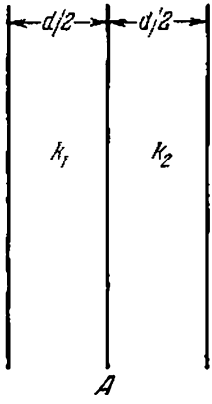


Fig. 134

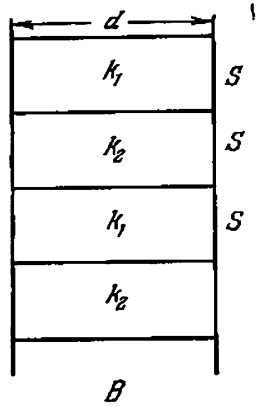


Fig. 135

está en contacto con el calentador. La superficie del fondo de la cacerola es S, su grosor es d y el coeficiente de conductibilidad térmica es k.

§ 14. PROPIEDADES DE LOS GASES

328. En el casquillo de una pluma estilográfica normalmente se hace un pequeño orificio. Caso de obstruirse este orificio, la pluma comienza a gotear: la tinta sale por debajo de la punta de la pluma. ¿Cuál será la causa de este fenómeno?

329. Un barómetro muestra indicaciones falsas debido a la presencia de una pequeña cantidad de aire sobre la columna de mercurio. A presión $p_{01} = 755$ mm de la columna de mercurio, el barómetro indica $p_1 = 748$ mm y a $p_{02} = 740$ mm, $p_2 = 736$ mm de Hg. Encontrar la longitud l del tubo del barómetro (fig. 136).

330. Un tubo de vidrio que tiene $l = 50$ cm de longitud y $S = 0{,}5$ cm^2 de sección transversal está soldado por uno de los extremos. El tubo se sumerge en el

agua como lo muestra la fig. 137. ¿Qué fuerza F es necesario aplicar al tubo, para mantenerlo debajo del agua, siendo la distancia entre la superficie de

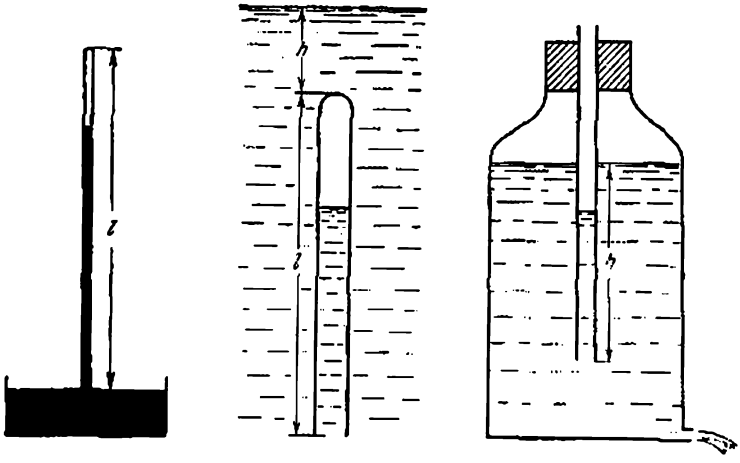


Fig. 136 *Fig. 137* *Fig. 138*

agua y el extremo soldado del tubo igual a $h = 10$ cm y la presión atmosférica $p_0 = 760$ mm de Hg? La masa del tubo es $m = 15$ g.

331. A través de un tapón que está en la boca de un vaso con agua, se introduce un tubo fino, abierto en ambos extremos, que no alcanza el fondo del vaso (vaso de Mariotte, mostrado en la fig. 138). Representar gráficamente la dependencia de la presión p del aire en el vaso en función de la cantidad Q del agua derramada.

332. La bomba de émbolo en cada bombeo extrae un volumen v_0 de aire. Para extraer el aire de un recipiente de volumen V, ésta realizó n bombeos. La presión inicial dentro del recipiente es p_0 e igual a la atmosférica. Más tarde otra bomba, con el mismo volumen de trabajo v_0, comenzó a comprimir el aire atmosférico, realizando también n bombeos. ¿Qué presión se establecerá en el recipiente?

333. En el centro de un tubo horizontal de longitud L, cerrado en ambos extremos, se encuentra una columna de mercurio de longitud l. Si ponemos el tubo en posición vertical, la columna de mercurio se traslada a una distancia Δl de la posición inicial. ¿A qué distancia del centro del tubo quedará el centro de la columna de mercurio, si abrimos uno de los extremos del tubo en posición horizontal? ¿Si abrimos el extremo superior o inferior del tubo en posición vertical? La presión atmosférica es igual a la presión de la columna de mercurio de altura H. La temperatura permanece constante.

334. Al considerar que, según la ley de Avogadro, el volumen de una molécula-gramo (un mol) de cualquier gas en condiciones normales (temperatura 0° C y presión 1 atm), es igual a 22,4 l, determinar la constante en la ecuación de estado de un gas ideal (ecuación de Clapeyron—Mendeléiev) para una cantidad de gas igual a un mol, y demostrar que esta constante es igual para todos los gases.

335. Escribir la ecuación de estado para una masa cualquiera de un gas ideal, cuya masa molar μ es conocida.

336. ¿Como variaría la presión dentro de un gas, o de un líquido, si la fuerza de atracción entre las moléculas desapareciese súbitamente?

337. En un recipiente hay 1 litro de agua a temperatura de 27° C. ¿Cuál sería la presión dentro del vaso, si la fuerza de interacción entre las moléculas de agua desapareciera?

338. ¿Es igual la presión dentro de un gas y junto a las paredes del recipiente que contiene el mismo?

339. ¿Es la misma la concentración de las moléculas de gas dentro del vaso y junto a las paredes de éste?

340. Determinar la temperatura del gas que se encuentra en un recipiente cerrado, si la presión del gas aumenta en un 0,4% con relación a la presión inicial al calentar el gas en 1° C.

341. Una esfera de goma, con paredes delgadas, de peso $P = 0,5$ N, fue rellenada de nitrógeno y después sumergida en un lago a una profundidad de $h =$

$= 100$ m. Encontrar la masa m de nitrógeno, si la esfera se encuentra en equilibrio. ¿Será este equilibrio estable? La presión atmosférica es $p_0 = 760$ mm de Hg. La temperatura en la profundidad del lago es $t = +4°$ C. La tensión de la goma se desprecia.

342. Dos esferas de cristal vacías están unidas por un tubo que tiene en el medio una gota de mercurio. ¿Se puede juzgar acerca de la temperatura del medio ambiente por la posición de la gota?

343. Un cilindro, cerrado en ambos extremos, está dividido en dos partes iguales (42 cm cada una) por un pistón térmicamente aislado. En ambas mitades se encuentran iguales masas de gas a una temperatura de 27° C y a una presión de 1 atm. ¿En cuánto es necesario calentar el gas en una parte del cilindro para que el pistón se desplace en 2 cm? Encontrar la presión p del gas después del desplazamiento.

344. El aire atmosférico seco consta del nitrógeno (78,09% de volumen), oxígeno (20,95%), argón (0,93%) y del gas carbónico (0,03%). Despreciando las partes insignificantes de otros gases (helio, neón, criptón, xenón), determinar (en %) la composición del aire según la masa.

345. Hallar la masa molar media (efectiva) del aire atmosférico seco, suponiendo que se conoce el por ciento de los componentes del aire (véase el problema **344**).

346. La densidad del vapor de una cierta combinación de carbono con hidrógeno es igual a 3 g/l para 43° C y 820 mm de Hg. ¿Cuál es la fórmula molecular de esta combinación?

347. ¿En qué caso la variación de la presión de un gas será mayor: por la compresión en un cierto valor de éste en una envoltura térmicamente aislada o por la compresión isotérmica?

348. Un gas que ocupa el volumen $V_1 = 1$ l a presión $p_1 = 1$ atm, se dilató isotérmicamente hasta el volumen $V_2 = 2$ l. Luego, para este volumen, la presión del gas disminuyó dos veces. Más tarde, el gas se dilató hasta el volumen $V_4 = 4$ l quedando la presión constante. Representar gráficamente la dependencia de p en función de V y, utilizando este gráfico, determinar

en cuál de los procesos mencionados el gas realizó mayor trabajo. ¿De qué variaba la temperatura?

349. Cierta cantidad del gas ideal ha realizado un proceso circular (ciclo) 1—2—3—1, representado en el gráfico de la dependencia del volumen respecto a la temperatura (fig. 139). Representar el mismo proceso, trazando

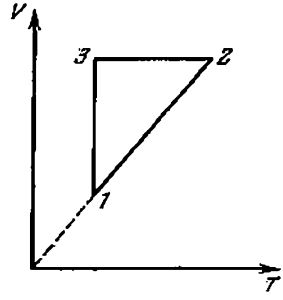


Fig. 139

el gráfico de la dependencia de la presión en función del volumen e indicar en cuáles etapas del proceso el gas recibía el calor y en cuáles lo entregaba.

350. Un calentador de gas consume $V_0 = 1{,}8$ m³ de metano (CH_4) en una hora. Determinar la temperatura t_2 del agua, calentada por este calentador, si el chorro que sale tiene la velocidad $v = 0{,}5$ m/s. El diámetro del chorro es $D = 1$ cm, la temperatura inicial del agua y del gas es $t_1 = 11°$ C, la capacidad calorífica del metano es $r = 55\,000$ J/g. El gas en el tubo se encuentra bajo una presión $p = 1{,}2$ atm. El rendimiento del calentador es $\eta = 60\%$.

351. En un recipiente térmicamente aislado y cerrado hay ozono (O_3) a una temperatura $t_1 = 527°$ C. Después de pasar cierto tiempo, el ozono se transformó totalmente en oxígeno (O_2). Determinar en cuánto aumenta, en este caso, la presión en el recipiente, si para formar una molécula-gramo de ozono del oxígeno es necesario gastar $q = 142\,000$ J. La capacidad calorífica de una molécula-gramo (un mol) de oxígeno, a un volumen constante, debe considerarse igual a $C_V = 21$ J/(mol·grad).

352. 20 g de helio, encerrados en un cilindro por un pistón, se transforman de un modo infinitamente lento del estado con volumen $V_1 = 32$ l y presión $p_1 = 4{,}1$ atm al estado con volumen $V_2 = 9$ l y $p_2 = 15{,}5$ atm.

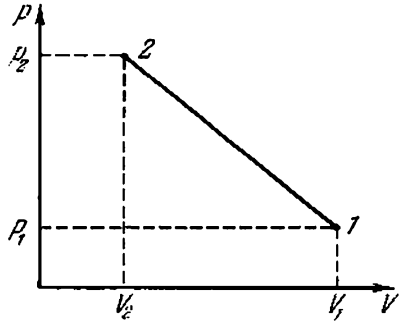


Fig. 140

¿Cuál será la mayor temperatura alcanzada por el gas en este proceso, si en el gráfico de la dependencia de la presión en función del volumen del gas el proceso está representado por una línea recta (fig. 140)?

353. ¿Aumentará la energía del aire en el cuarto, si en éste se calienta una estufa? (La energía u de la unidad de masa del aire debe considerarse proporcional a la temperatura absoluta: $u = cT$).

354. En un cuarto de volumen 30 m³ la temperatura subió de 15° C a 25° C. ¿En cuánto cambió la masa de aire en el cuarto, si la presión atmosférica es $p = 1$ atm? La masa molar del aire (media) debe considerarse igual a $\mu = 28{,}9$ g/mol.

355. En un recipiente abierto, lleno de agua y tapado con una malla en la parte superior, se encuentra un pequeño tubo de ensayo lleno de aire y abierto por la parte inferior de tal modo, que este tubo no puede girar (fig. 141). Representar gráficamente la dependencia de la profundidad de inmersión del tubo de ensayo en función de la temperatura del agua, considerando que la temperatura primero sube lentamente y después comienza a bajar lentamente.

356. En un cilindro, bajo un pistón pesado, se encuentran $m = 20$ g de gas carbónico. El gas se calienta de una

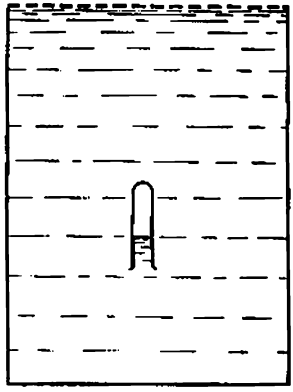


Fig. 141

temperatura $t_1 = 20°$ C a $t_2 = 108°$ C. ¿Qué trabajo realizó el gas?

357. ¿Qué cantidad de calor debe comunicarse al gas carbónico (véase el problema 356) que se dilata, siendo la presión constante debido al calentamiento? La capacidad calorífica molar del gas carbónico (capacidad calorífica de una molécula-gramo) para un volumen constante es $C_V = 28{,}8$ J/(mol·grad).

§ 15. PROPIEDADES DE LOS LIQUIDOS

358. ¿Qué es «más difícil» comprimir hasta tres atmósferas: un litro de aire o de agua?

359. ¿De qué modo, utilizando los fenómenos de la humectación y de no humectación, puede realizarse el mínimo y el máximo de un termómetro?

360. La capa superficial de un líquido se compara con frecuencia con una película de goma extendida. ¿En qué aspecto esta analogía no corresponde a la realidad?

361. Para quitar una mancha de grasa de la superficie de un tejido se recomienda humedecer con un algodón

empapado en bencina los bordes de la mancha. No se debe humedecer con bencina directamente la propia mancha ¿Por qué?

362. ¿Por qué un suelo mullido posibilita la conservación de la humedad en el mismo?

363. A fin de que la crema penetra mejor en botas de esquiar, éstas se calientan. ¿Cómo deben calentarse las botas: por la parte interna o externa?

364. ¿Por qué con ayuda de una plancha se puede quitar las manchas de grasa de un traje?

365. ¿Por qué al secar la leña al sol, en el extremo del leño que está a la sombra, aparecen gotas de agua?

366. Un recipiente que tiene orificios circulares de diámetro $d = 0{,}1$ mm se llena de agua. Encontrar el máximo nivel de agua h, para el cual el líquido empiece a salir. El agua no moja el fondo del recipiente.

367. En un cuadro rectangular de alambre, en posición vertical, está estirada una película de jabón (fig. 142).

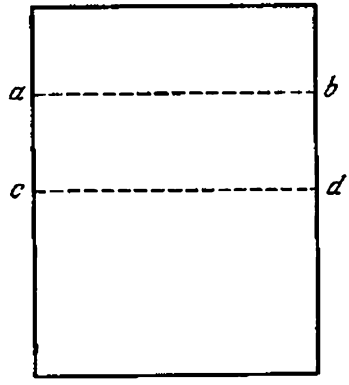


Fig. 142

¿Qué fuerzas mantienen la parte de la película *abcd* en equilibrio?

368. Un cubo de masa $m = 20$ g, mojado por el agua, flota en la superficie de ésta. La arista del cubo tiene

una longitud $a = 3$ cm. ¿A qué distancia de la superficie del agua se encuentra la arista inferior del cubo?

369. El extremo de un tubo capilar de radio r fue metido en el agua. ¿Qué cantidad de calor se desprenderá al subir el líquido por el capilar?

370. Un capilar se mete en un recipiente con líquido, en el cual la presión de los vapores puede ser despreciada.

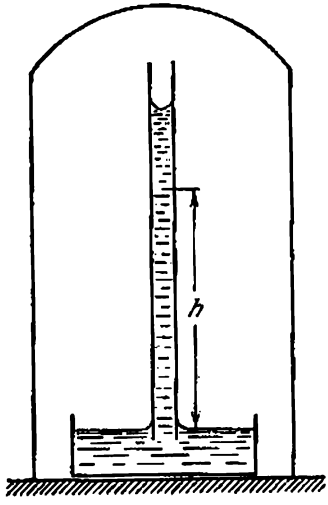


Fig. 143

La densidad del líquido es ρ. El recipiente con el capilar se encuentra en la campana al vacío de una bomba de aire (fig. 143). Hallar la presión dentro del líquido en el capilar a una altura h del nivel del líquido en el recipiente.

371. Para demostrar la existencia de una energía potencial excesiva en las moléculas de la capa superficial de un líquido se deduce, por lo común, del siguiente modo: en la molécula que se encuentra dentro del líquido actúan fuerzas de atracción por parte de otras moléculas que, en término medio, se compensan. Si separamos molécula en la superficie, la resultante de las fuerzas de atracción por parte de otras moléculas estará dirigida hacia dentro del líquido. Por eso la molécula

tiende a dirigirse hacia dentro del líquido y será preciso realizar cierto trabajo para extraerla del líquido y mantenerla en la superficie. Por consiguiente, cada molécula de la capa superficial posee una energía potencial excesiva igual a este trabajo. No obstante, la fuerza media que actúa sobre cualquier molécula por parte de las demás, obligatoriamente es igual a cero, estando el líquido en equilibrio. Por eso, el trabajo para desplazar el líquido de una profundidad hasta la superficie también deberá ser igual a cero. ¿De dónde, en este caso, surge la energía superficial?

372. El extremo de un tubo capilar de cristal de radio $r = 0{,}05$ cm, se mete en el agua a una profundidad $h = 2$ cm. ¿Qué presión se necesita para insuflar una burbuja de aire por el extremo inferior del tubo?

373. Un tubo capilar de cristal, cuyo diámetro interno es de 0,5 mm, fue sumergido en el agua. La longitud de la parte del tubo que sale de la superficie del agua es de 2 cm. ¿Qué forma tendrá el menisco?

374. En un tubo capilar, hundido verticalmente en el agua a una porfundidad l, el agua sube hasta la altura h

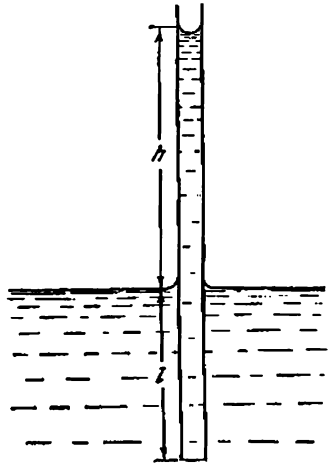


Fig. 144

(fig. 144). El extremo inferior del tubo se cierra, luego sacan el tubo del agua y lo abren de nuevo. Determi-

nar la longitud de la columna de agua que queda en el tubo.

375. En un recipiente con agua fueron sumergidos dos capilares de la misma sección (fig. 145). El agua en el capilar recto sube a una altura h. ¿A qué nivel llega

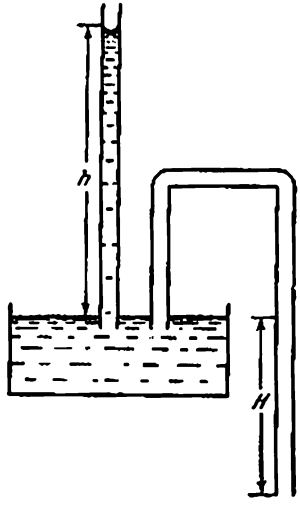


Fig. 145

el agua en el capilar doblado y qué forma toma en él el menisco? El extremo inferior del capilar doblado se halla más bajo del nivel de agua en el recipiente a una distancia H. Analizar los cinco casos siguientes: 1) $H > h$; 2) $H = h$; 3) $0 < H < h$; 4) $H = 0$; 5) $H < 0$ (el extremo del capilar doblado está más arriba del nivel de agua en el recipiente).

376. En una pompa de jabón de radio R se pone otra de radio r (fig. 146). ¿Qué forma tomará la película de jabón que separa las dos pompas? ¿Qué ángulos se formarán entre las películas en los lugares de contacto?

377. Una cruz de madera flota en el agua. Cada una de las aspas está cubierta por un lado con barniz (fig. 147). Debido a la diferente humectación de la madera y del barniz, el agua por dos lados de cada aspa de la cruz

sube a diferentes alturas; el ángulo interfacial será diferente y, de este modo, la componente horizontal de la fuerza de tensión superficial F será diferente

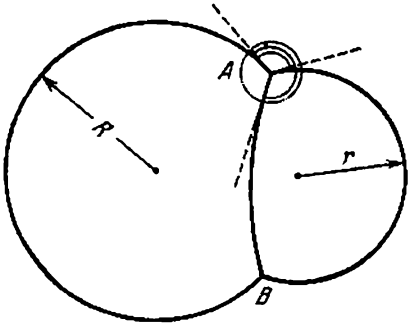


Fig. 146

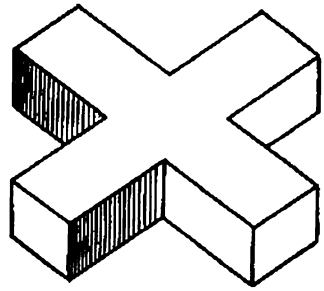


Fig. 147

en ambos lados de cada parte (fig. 148). ¿Girará la cruz a causa de esto?

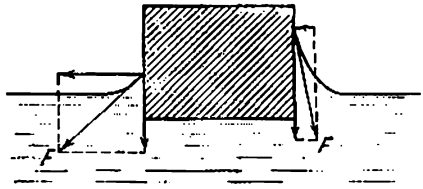


Fig. 148

378. Los cuerpos ligeros, humedecidos con agua (por ejemplo, dos cerillas), flotando por la superficie del agua, se atraen. El mismo fenómeno se observa en el caso, cuando los cuerpos no están humedecidos (por ejemplo, cerillas cubiertas con una capa fina de parafina). Si un cuerpo se humedece con agua y el otro no, en este caso los cuerpos se repolerán. ¿Cómo explicar estos fenómenos?

§ 16. TRANSFORMACIONES MUTUAS DE CUERPOS SOLIDOS Y LIQUIDOS

379. El agua se congela en un vaso a 0° C. Si dividimos el agua en gotas diminutas, entonces el agua puede sobreenfriarse hasta —40° C. Así pues, por ejemplo, las gotas de agua que constituyen las nubes comienzan a congelarse, como regla, a temperaturas inferiores a —17° C. ¿Cómo explicar estos hechos?

380. Un recipiente con 100 g de agua a temperatura de 0° C fue suspendido en el centro de una habitación. Después de pasar 15 minutos, la temperatura del agua se elevó hasta 2° C. Cuando en el recipiente se encontraba una cantidad de hielo de la misma masa que el agua, entonces éste se derritió en 10 horas. ¿Es posible, valiéndose de estos datos, determinar el calor de fusión específico del hielo λ?

381. Dos pedazos iguales de hielo van el uno al encuentro del otro con velocidades iguales, y al chocar, se transforman en vapor. Determinar las mínimas velocidades posibles de los pedazos de hielo, si, antes de chocar, la temperatura de los mismos era igual a —12° C.

382. En un calorímetro hay hielo. Determinar la capacidad calorífica del calorímetro, si para calentarlo junto con el hielo de 270° a 272° K, se requiere $Q_1 = 2\,100$ J de calor, y de 272° a 274° K se exige $Q_2 = 69\,700$ J.

383. En un calorímetro se encuentran 400 g de agua a una temperatura de +5° C. Se ha añadido a ésta otros 200 g de agua a una temperatura de +10° C y 400 g de hielo a una temperatura de —60° C. ¿Qué temperatura se establece en el calorímetro?

384. En un recipiente de cobre, calentado hasta una temperatura $t_1 = 350°$ C, han puesto $m_2 = 600$ g de hielo a una temperatura $t_2 = -10°$ C. Entonces, en el recipiente quedó $m_3 = 550$ g de hielo mezclado con agua. Hallar la masa del recipiente. El calor específico del cobre es $c_1 = 420$ J/(kg·grad).

385. Al colocar un pequeño cristal de hielo en agua sobreenfriada, esta última comienza a congelarse inmediatamente.

1) ¿Qué cantidad de hielo se forma de $M = 1$ kg de agua, sobreenfriada hasta la temperatura $t = -8°$ C? 2) ¿Qué temperatura deberá tener el agua sobreenfriada, para transformarse por completo en hielo? No tomar en cosideración la dependencia de la capacidad calorífica del agua en función de la temperatura.

386. 100 g de hielo, a temperatura de 0° C se hallan dentro de una envoltura impermeable al calor y sometidos a la compresión hasta la presión $p = 1200$ atm. Encontrar la masa del hielo derritido, si el descenso de la temperatura de fusión es directamente proporcional a la presión y al aumentar la presión en 138 atm, la temperatura de fusión disminuuye en 1° C.

§ 17. ELASTICIDAD Y RESISTENCIA

387. En una barra de acero de radio $R = 100{,}125$ cm fue puesto un anillo de cobre de radio $r = 100$ cm y área de la sección transversal $S = 4$ mm². ¿Con qué fuerza F será ensanchado el anillo, si el módulo de elasticidad del cobre es $E = 12 \cdot 10^{10}$ N/m²? La deformación de la barra puede ser despreciada.

388. ¿Qué trabajo puede realizar una barra de acero de longitud l y área de sección transversal S, al calentarla en Δt grados?

389. Entre dos columnas fue tendido un alambre de longitud $2\,l$. En el alambre, exactamente en el centro, fue colgado un farol de masa M. El área de la sección transversal del alambre es S, el módulo de elasticidad es E. Determinar el ángulo α, de pandeo del alambre, considerándolo pequeño (fig. 149).

390. Entre dos paredas fijas, absolutamente rígidas, se coloca sin holgura una barra de acero de sección $S = 1$ cm². ¿Con qué fuerza F actuará la barra sobre la pared, si la calentamos en $\Delta t = 5°$ C? El coeficiente de dilatación lineal del acero es $\alpha = 1{,}1 \cdot 10^{-5}$ grad^{-1} y el módulo de elasticidad es $E = 20 \times 10^{10}$ N/m².

391. Entre dos paredes macizas se hallan dos barras hechas de diferentes materiales (fig. 150). La sección de las barras es S. Sus longitudes son l_1 y l_2. Las barras

se calientan en Δt grados. Encontrar la fuerza con que las barras actúan la una sobre la otra, si los coeficientes de expansión térmica de las barras α_1 y α_2

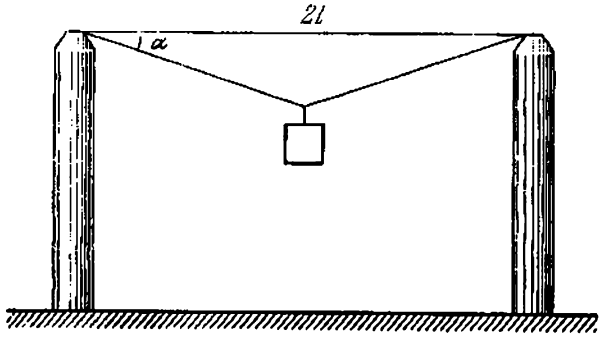


Fig. 149

y los módulos de elasticidad del material de las barras E_1 y E_2 son conocidos. La deformación de las paredes se desprecia.

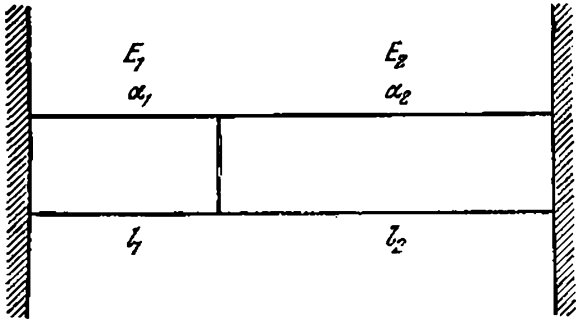


Fig. 150

392. Una barra homogénea, de masa $m = 100$ kg, está suspendida de tres alambres verticales de la misma longitud situados simétricamente (fig. 151). Determinar la tensión de los alambres, si el alambre del medio es de acero y los otros dos son de cobre. El área de la

sección transversal de todos los alambres es igual. El módulo de Young del acero es dos veces mayor que el del cobre.

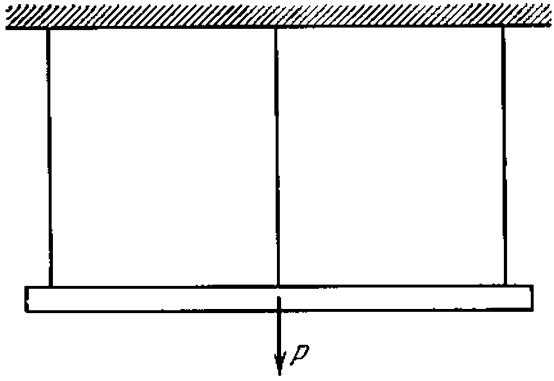


Fig. 151

393. Una columna de hormigón armado se comprime con una fuerza P. Considerando que el módulo de Young del hormigón $E_{h.a}$ es 1/10 del de hierro E_h y que el área de la sección transversal del hierro es 1/20 de la del hormigón armado, encontrar qué parte de la carga recae sobre el hormigón.

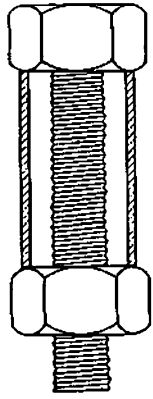


Fig. 152

394. Un perno de acero se enrosca en un tubo de cobre como muestra la fig. 152. Encontrar las fuerzas que surgen

en el perno y en el tubo debido al hacer la tuerca una vuelta, si la longitud del tubo es l, el paso de rosca del perno es h y las áreas de la sección transversal del perno y del tubo son iguales a S_a y S_c, respectivamente.

395. Una placa de cobre está soldada por sus extremos con dos placas de acero como muestra la fig. 153. ¿Qué

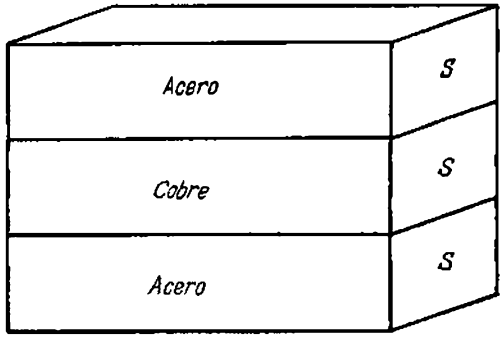


Fig. 153

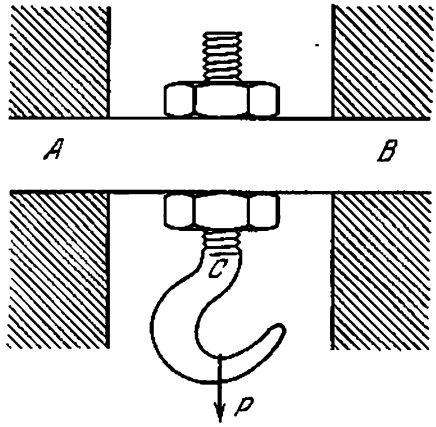


Fig. 154

tensiones surgirán en las placas al aumentar la temperatura en t° C? Las áreas de la sección transversal de todas las tres placas son iguales.

396. Determinar el máximo valor admisible de la velocidad lineal de rotación de un anillo fino de plomo, si la resistencia del plomo tiene el límite de rotura $P = 2\,000$ N/cm² y la densidad $\rho = 11{,}3$ g/cm³.

397. Una barra de hierro AB se fija rígidamente por ambos extremos. En el medio de la barra hay un orificio en el cual se sujeta con ayuda de dos tuercas un gancho C (fig. 154). La barra está apretada por las tuercas con una fuerza F_0. ¿Cuál serán, según el valor, las fuerzas que actúan sobre las tuercas superior e inferior por parte de la barra, si en el gancho se sujeta una carga, cuyo peso puede variar de cero a $P = 2F_0$? La flexión de la barra y el peso del gancho se desprecian.

§ 18. PROPIEDADES DE LOS VAPORES

398. En un calorímetro que contiene 100 g de hielo a una temperatura de —20° C se vierten 150 g de vapor de agua a una temperatura de +100° C. ¿Qué temperatura adquirirá el contenido del calorímetro, si su capacidad calorífica es de 300 J/grad?

Tabla I

Propiedades del vapor de agua saturado

t, (°C)	Presión, (atm)	Volumen específico del vapor, (m³/kg)	t, (°C)	Presión, (atm)	Volumen específico del vapor, (m³/kg)
17,2	0,02	68,3	151,1	5	0,3818
45,4	0,1	14,96	158,1	6	0,3214
59,7	0,2	7,80	164,2	7	0,2778
75,4	0,4	4,071	169,6	8	0,2448
85,45	0,6	2 785	174,5	9	0,2189
93,0	0,8	2,127	179,0	10	0,1980
96,2	0,9	1,905	187,1	12	0,1663
99,1	1	1,726	194,1	14	0,1434
100	1,0333	1,674	200,4	16	0,1261
116,3	1,8	0,996	206,2	18	0,1125
119,6	2	0,902	211,4	20	0,1015
132,9	3	0,617	232,8	30	0,0670
142,9	4	0,4708	249,2	40	0,0506

399. ¿Por qué en el momento que se apaga el fuego en un mechero de gas sale inmediatamente un fuerte chorro de vapor de una tetera hirviendo a pesar de que hasta este momento el vapor no fue visto?

400. Demostrar que la densidad del vapor de agua, expresada en g/m^3, para las temperaturas próximas a la de ambiente, es aproximadamente igual a la presión del vapor de agua expresada en milímetros de la columna de mercurio.

401. La presión del vapor de agua saturado en un recipiente herméticamente cerrado aumenta con la temperatura como muestra la fig. 155. La presión de un gas igual,

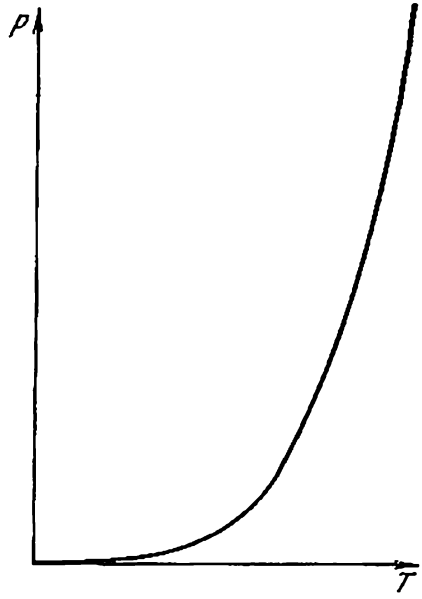


Fig. 155

siendo el volumen constante, es directamente proporcional a la temperatura. Utilizando la tabla de las propiedades del vapor de agua saturado (véase la tabla I), verificar, si es válida la ecuación de estado de un gas ideal para determinar la densidad o volumen

específico de los vapores de agua saturados. Explicar el resultado obtenido.

402. En un cilindro de pistón se comprimen isotérmicamente 9 g de vapor de agua a una temperatura de 30° C. ¿Para qué volumen el vapor comenzará a condensarse? (Utilizar la tabla I).

403. En un cuarto, a temperatura de 15° C, la humedad relativa es igual a 10%. ¿Cómo variará la humedad relativa, si la temperatura en el cuarto se eleva gradualmente en 10° C?

404. En la calle durante todo el día está lloviznando. En un cuarto está tendida la ropa lavada. ¿Secará más rápido la ropa, si abrimos la ventanilla?

405. Dos recipientes, unidos entre sí por tubos con grifos, están llenos de agua hasta diferentes niveles (fig. 156).

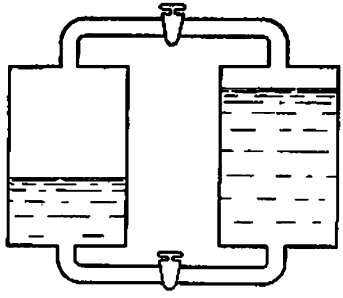


Fig. 156

El aire de los recipientes está evacuado. ¿Qué pasará, si unimos los recipientes: 1) abriendo el grifo del tubo inferior? 2) abriendo el grifo del tubo superior?

406. ¿Cuál es la humedad relativa del aire, a temperatura de $t_1 = 10°$ C, si la condensación de la humedad de este aire, calentado anticipadamente hasta $t_2 = 30°$ C, comenzó cuando la presión es de 10 atm? La presión inicial del aire es igual a 1 atm. (Utilizar los datos de la tabla I).

407. Un cuerpo poroso fue colocado, para secar, bajo la campana de una bomba de vacío. La presión bajo la campana fue mantenida en el nivel de 6,5 mm de Hg

durante una hora y después bruscamente cayó. El rendimiento de la bomba es de 60 l/min. La temperatura establecida bajo la campana de la bomba es $t = 5°$ C. ¿Qué cantidad de agua contenía el cuerpo?

408. En un cilindro aislado térmicamente se encuentran, bajo un pistón imponderable, $m = 30$ g de agua a una temperatura de 0° C. El área del pistón es $S = 512$ cm², la presión externa es $p = 1$ atm. ¿A qué altura se elevará el pistón, si el calentador eléctrico que se encuentra en el cilindro, desprende $Q = 24\,200$ J del calor?

Capítulo III

Electricidad y magnetismo

§ 19. ELECTROSTATICA

409. ¿Con qué fuerza actuarían mutuamente dos cargas puntuales de un culombio, situadas a una distancia de 1 km la una de la otra?

410. Comparar las fuerzas de atracción gravitatoria y eléctrica entre un electrón y un protón.

411. Supongamos que la fuerza que actúa entre dos cargas puntuales, depende de la distancia según la ley $1/r^{\alpha}$, donde: 1) $\alpha > 2$; 2) $\alpha < 2$. ¿Cómo se portará la carga puntual, metida dentro de una esfera cargada uniformemente? En el momento inicial la carga puntual se encontraba en reposo.

412. Dos esferas pequeñas cargadas igualmente, pero con cargas de signos opuestos, están fijas en un plano horizontal, a cierta distancia a la una de la otra. La tercera esfera cargada está colgada de un hilo. El punto de suspensión una vez se desplaza de tal modo, que esta esfera quede en estado de equilibrio, exactamente sobre la primera esfera fija, a una distancia a de la misma, y la segunda vez, sobre la segunda. Encontrar los ángulos de desviación del hilo con relación a la vertical, sabiendo que sobre la primera esfera el ángulo de desviación es dos veces mayor que éste sobre la segunda esfera.

413. Una carga eléctrica puntual $+q$ se encuentra a la distancia d de una lámina conductora grande. ¿Con qué fuerza actúa la lámina sobre la carga?

414. Dos cargas $+Q$ están fijas y situadas a una distancia a la una de la otra. A lo largo del eje de simetría del sistema de estas cargas puede desplazarse una tercera carga $-q$ que posee una masa m. Considerando pequeña la distancia desde la carga $-q$ hasta la recta que une las cargas $+Q$, determinar el período de oscilaciones de la carga $-q$.

415. Un anillo de alambre fino, de radio R, es portador de una carga eléctrica q. En el centro del anillo se encuentra otra carga Q (q y Q son cargas del mismo signo), siendo $Q \gg q$. Determinar la fuerza con que el anillo se ensancha.

416. Un cuerpo de masa m está colgado de un hilo de longitud l (fig. 157). A una distancia h debajo del mismo,

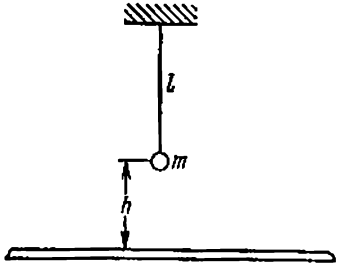


Fig. 157

se encuentra una lámina metálica infinita. El cuerpo posee carga q. Hallar el período de oscilaciones libres de este cuerpo.

417. Determinar el período de las pequeñas oscilaciones de una molécula polar en un campo eléctrico homogéneo, cuya intensidad es $E = 3 \cdot 10^4$ V/m.
La molécula polar puede ser representada esquemáticamente como unas «pesas» de longitud λ ($\lambda = 10^{-8}$ cm), en cuyos extremos se encuentran masas puntuales iguales a m ($m = 10^{-24}$ g), portadores de cargas $+q$ y $-q$, respectivamente ($q = 15{,}7 \cdot 10^{-20}$ culombios).

418. Tres cargas positivas iguales a q están situadas en los vértices de un triángulo equilátero. Los lados del triángulo son iguales a a. Encontrar la intensidad del campo

en el vértice de un triángulo regular que tiene como base este triángulo.

419. Dos cargas puntuales q_1 y q_2 se encuentran a una distancia d la una de la otra. Hallar la intensidad del campo eléctrico en el punto que se encuentra a una distancia r_1 de la carga q_1 y a una distancia r_2 de q_2. Examinar los casos de cargas del mismo signo y del signo contrario.

420. Encontrar la intensidad del campo de un dipolo eléctrico con el momento igual a $p = ql$ en el punto que está a una distancia igual a r ($r \gg l$) del eje del dipolo, en dos casos: 1) el punto permanece en una recta que pasa por el eje del dipolo; 2) el punto se halla en una recta perpendicular al eje del dipolo.
Observación. En el caso más simple, el dipolo eléctrico consta de dos cargas iguales, pero de signos contrarios ($+q$ y $-q$). Una característica importante del dipolo es el momento eléctrico $p = ql$. El momento eléctrico de un dipolo es un vector dirigido de la carga negativa a la positiva y numéricamente igual a $p = ql$, donde l es la distancia entre las cargas que forman el dipolo.

421. Una carga positiva Q está distribuida uniformemente por un anillo de alambre fino de radio R. Encontrar la intensidad del campo eléctrico en el eje del anillo en función de la distancia r del centro del anillo.

422. Un anillo de alambre fino de radio R posee cierta carga eléctrica igual a $+Q$. ¿Cómo se moverá un cuerpo puntual de masa m que posee una carga igual a $-q$, si en el momento inicial ésta estaba en reposo en un punto sobre el eje del anillo, a una distancia $x \ll R$ de su centro? El anillo está fijo.

423. Tomando en consideración las condiciones de la dimensión, encontrar (claro está que con precisión hasta un coeficiente numérico) la intensidad de un campo eléctrico creada; 1) por una lámina infinitamente extendida, cargada con densidad superficial σ; 2) por un hilo infinitamente largo, cargado con densidad lineal τ.

424. Una lámina metálica rectangular, de lados iguales a a y b, posee una carga $+q$. El grosor de la lámina c

es mucho menor que a y b. Determinar la intensidad del campo, creada por esta lámina cargada, en los puntos del espacio próximos al centro de la misma.

425. Dos láminas metálicas paralelas, cuyas áreas son iguales a S, tienen ciertas cargas Q_1 y Q_2 respectivamente.

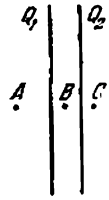


Fig. 158

La distancia entre las láminas es mucho menor que sus dimensiones lineales. Determinar la intensidad del campo eléctrico en los puntos A, B y C (fig. 158).

426. ¿Cuál será la intensidad del campo eléctrico en la superficie de un conductor, si la densidad de la carga superficial es σ?

427. Todo el espacio entre dos láminas paralelas infinitas está ocupado por una carga de densidad volumétrica constante igual a ρ. La distancia entre las láminas es a. Encontrar la dependencia de la intensidad del campo eléctrico en función de la distancia considerada a partir del centro de las láminas.

428. Dentro de una esfera de radio R existe una carga volumétrica, con densidad constante igual a ρ. Hallar la dependencia de la intensidad del campo eléctrico respecto a la distancia hasta el centro de la esfera.

429. Hallar la intensidad del campo eléctrico dentro y fuera de un cilindro infinitamente largo, cargado con densidad volumétrica igual a ρ. El radio del cilindro es R.

430. Dentro de una esfera cargada con densidad volumétrica constante ρ, hay una cavidad esférica. La distancia entre el centro de la esfera y el centro de la cavidad es igual a a. Demostrar que la intensidad E del campo eléctrico dentro de la cavidad es igual a $E = \rho a/3\,\varepsilon_0$

y está dirigida a lo largo de la recta que une los centros de las esferas.

431. Dentro de un cilindro cargado con densidad volumétrica constante ρ, hay una cavidad cilíndrica. La distancia entre los ejes del cilindro y de la cavidad es igual a a. Demostrar que la intensidad E del campo eléctrico dentro de la cavidad es igual a $E = \rho a/2\varepsilon_0$ y está dirigida paralelamente a la perpendicular que une los ejes.

432. Una molécula se encuentra a una distancia r del eje de un cilindro metálico infinitamente largo. El cilindro está cargado uniformemente; la carga que cae en una unidad de su longitud, es igual a τ. La molécula tiene la forma de unas «pesas» de longitud λ, en los extremos de las cuales se hallan cargas $+q$ y $-q$. Determinar la fuerza que actúa sobre la molécula.

433. A cierta distancia del eje de un cilindro uniformemente cargado se encuentran dos moléculas de igual masa. Una molécula tiene el momento eléctrico constante $p = q\lambda$ (véase el problema 420). La distancia entre las cargas de la otra molécula se determina por la relación $qE = k\lambda$, donde E es la intensidad media del campo que actúa sobre la molécula, y k, un coeficiente constante. En el momento inicial los momentos eléctricos de las moléculas son iguales y las velocidades de las mismas son nulas. ¿Cuál de las moléculas, bajo la acción de la fuerza de atracción, alcanzará más rápido la superficie del cilindro?

434. Una lámina metálica rectangular con los lados a y b, tiene carga $+q$. El grosor de la lámina c es mucho menor que los lados a y b. Una carga puntual $+Q$ se aproxima a una distancia d del centro de la lámina. La distancia d es mucho menor que los lados de la lámina. Determinar la fuerza con que la lámina actúa sobre la carga $+Q$. ¿En qué caso la lámina cargada positivamente atraerá una carga positiva?

435. Dentro de una esfera de radio R hay una carga volumétrica de densidad constante ρ. Encontrar la dependencia del potencial en función de la distancia del centro de la esfera.

436. A una distancia d de una carga puntual q se encuentra el centro de una esfera conductora sin carga de radio R. ¿Qué valor tendrá el potencial de la esfera?

437. A distancia R de la carga puntual $+q$ se halla una esfera conductora de radio r, unida por un alambre fino y largo con la tierra. Determinar la magnitud de la carga negativa inducida a la esfera. Puede prescindirse de la influencia del alambre.

438. Un electrón se mueve dentro de un tubo metálico de sección transversal variable (fig. 159). ¿Cómo cambiará

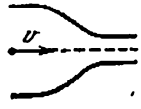


Fig. 159

la velocidad del electrón al aproximarse a la parte más estrecha del tubo?

439. Dos esferas metálicas concéntricas sin cargas, cuyos radios son R_1 y R_3, además $R_1 < R_2$, están unidas por un alambre fino. El alambre pasa por un pequeño orificio de la esfera, situada concéntricamente entre las dos primeras. Esta esfera tiene radio R_2 y posee carga $+Q$ distribuida uniformemente por ella. Despreciando la influencia del alambre de unión, determinar la carga inducida en la esfera metálica interna.

440. En una recta se encuentran tres cargas: una positiva $+q$ y dos negativas $-Q$. ¿Para qué relación de valores de las cargas estas últimas estarán en equilibrio? ¿Será este equilibrio estable? Representar gráficamente la dependencia entre la energía potencial de cada carga y su posición en la recta, considerando fijas las otras dos cargas.

441. ¿Podrá una carga eléctrica en un campo electrostático encontrarse en un estado de equilibrio estable?

442. Una esfera conductora, aislada, de radio R, posee una carga $+Q$. ¿Qué energía tiene la esfera?

443. Dos esferas metálicas, concéntricas y finas, de radios R_1 y R_2 ($R_1 < R_2$), poseen cargas Q_1 y Q_2, respectivamente. Determinar la energía de este sistema de cargas.

444. Existen n esferas metálicas, concéntricas y finas, cuyos radios en orden creciente son iguales a $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Estas esferas tienen cargas $q_1, q_2, \ldots, q_n$, respectivamente. Determinar la energía del dado sistema de cargas.

445. Las placas de un condensador plano de capacidad C están a una distancia l la una de la otra y poseen cargas $+Q$ y $-Q$ respectivamente. Un electrón entró en el medio del condensador con velocidad v_0, dirigida paralolamente a las placas. ¿Cuál será la velocidad del electrón a una distancia suficientemente grande del condensador? ¿Cuál es el carácter de la variación de la velocidad del electrón (por el valor absoluto) al moverse dentro y fuera del condensador? Examinar los casos, cuando el electrón se encuentra en el momento inicial: 1) a la misma distancia de las placas del condensador; 2) a una distancia igual a $l/4$ de la placa positiva; 3) a una distancia igual a $l/4$ de la placa negativa.

446. Dos cargas puntuales del mismo signo q_1 y q_2 y masas iguales a m_1 y m_2 se mueven la una en dirección a la otra. En el momento, cuando la distancia entre las cargas es igual a r_1, ellas tienen velocidades iguales a v_1 y v_2. ¿A qué distancia mínima r_2 se aproximarán las cargas?

447. Una carga puntual $+q$ se mueve del infinito en dirección a una lámina metálica. Determinar la energía de interacción de la carga y lámina y, también, la velocidad de la carga en el momento, cuando ésta se encuentra a una distancia d de la lámina. Al hallarse a una distancia infinitamente grande de la lámina, la carga tenía velocidad nula.

448. Por un anillo fino de radio R está distribuida uniformemente la carga $+q$. Determinar la velocidad de una carga negativa puntual ($-q$) en el momento, en que la misma pasa por el centro del anillo, si la carga $-q$ inicialmente se encontraba en reposo suficientemente

alejada del anillo, en el punto A del eje (fig. 160). La masa de la carga $-q$ es igual a m. El anillo está fijo.

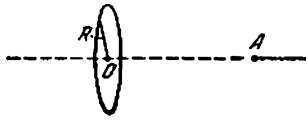


Fig. 160

449. Una carga positiva $+Q$ está distribuida uniformemente por un anillo de alambre fino de radio R. En el centro del anillo se encuentra una carga puntual $-q$, de masa igual a m. A la carga se da una velocidad inicial v a lo largo del eje del anillo. Determinar el carácter del movimiento de la carga en función de la magnitud de la velocidad inicial. El anillo está fijo.

450. Una esfera metálica de 2 m de diámetro se halla en el centro de una gran sala y está cargada con un potencial de 100 000 V. ¿Qué cantidad de calor se desprenderá, si unimos la esfera con la tierra por medio de un conductor?

451. Dos pequeñas esferas son portadoras de cargas diferentes por el valor, pero del mismo signo. Una de las esferas está fija. La segunda esfera, alejándose bajo la acción de las fuerzas electrostáticas de repulsión, puede realizar un trabajo mecánico A_1. Si antes de iniciarse el movimiento de la segunda esfera, las dos fueron unidas para un cierto tiempo por un conductor, entonces la segunda esfera, alejándose, podrá realizar un trabajo mecánico igual a A_2. Determinar la cantidad de calor desprendido por el conductor que une las esferas; aclarar a cuenta de qué energía se desprende este calor y varía el trabajo mecánico.

452. Una envoltura esférica de radio R está cargada uniformemente con carga Q. Encontrar la fuerza de extensión que actúa sobre la unidad del área de la envoltura.

453. ¿Qué carga Q puede comunicarse a una gota de radio R, si el coeficiente de tensión superficial es igual a σ?

454. Hallar la capacidad C_0 de una batería de condensadores iguales (fig. 161).

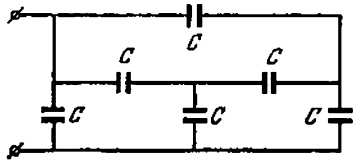


Fig. 161

455. Se hace un cubo de alambre y en cada arista de éste se conecta un condensador de capacidad C (fig. 162).

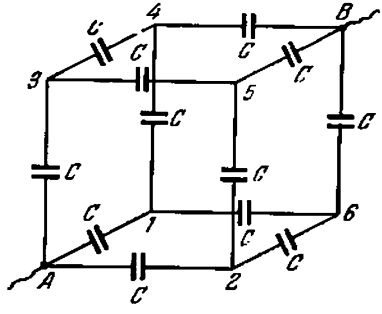


Fig. 162

Encontrar la capacidad de la batería de condensadores, si la batería se asocia al circuito mediante los conductores que unen los vértices opuestos A y B del cubo.

456. Para obtener altas tensiones de corta duración puede utilizarse el transformador—condensador de chispas de Arkádiev. El circuito de este aparato está representado en la fig. 163.

Un grupo de condensadores, unidos paralelamente por los conductores AB y CD de una resistencia muy grande, se conecta a la fuente de alta tensión. La placa superior de cada condensador se une, a través de un espacio de chispa, con la placa inferior del condensador siguiente (espacio 1, 2, 3, 4). Cada espacio siguiente es mayor que el anterior. En el momento, cuando la

diferencia de potencial entre las armaduras alcance el valor de la tensión disruptiva del primer espacio, tendrá lugar la descarga. En seguida, serán perforados el segundo, el tercero y el cuarto espacio. ¿Qué valor

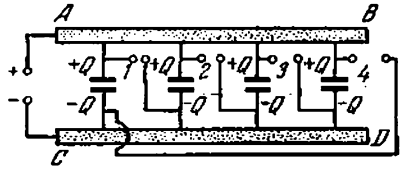


Fig. 163

alcanzará la diferencia de potencial al perforar el último espacio si hay n condensadores y la tensión aplicada es igual a V_0?

457. Las placas de un condensador plano cargado son puestas a tierra por turno. ¿Se descargará el condensador en este caso?

458. Dos condensadores planos de capacidades C_1 y C_2 están cargados hasta la diferencia de potencial U_1 y U_2, respectivamente ($U_1 \neq U_2$). Demostrar que al conectar estos condensadores en paralelo, la energía electrostática común de los mismos disminuirá. ¿Por qué ocurre esto?

459. Se sabe que los pedazos alargados de un dieléctrico se sitúan a lo largo de las líneas de fuerza de un campo eléctrico. Entretanto, las moléculas aisladas de un dieléctrico no polar, aparentemente deberían extenderse a lo largo del campo y no girar. En un dieléctrico, constituido de moléculas dipolares, el número medio de moléculas que giran, al conectar el campo en el sentido horario, es igual al de moléculas que giran en sentido antihorario. ¿Por qué razón todo el pedazo de dieléctrico girará?

460. Una esfera dieléctrica de radio R está polarizada homogéneamente, o sea, los momentos eléctricos dipolares de todas las moléculas son iguales y paralelos los unos a los otros. Encontrar la intensidad del campo eléctrico dentro del dieléctrico, si en unidad de volumen

hay N moléculas, cuyo momento dipolar es igual a $p = ql$.

461. Una esfera dieléctrica se coloca en un campo eléctrico homogéneo, de intensidad igual a E. La constante dieléctrica del material de la esfera es ε. Hallar la

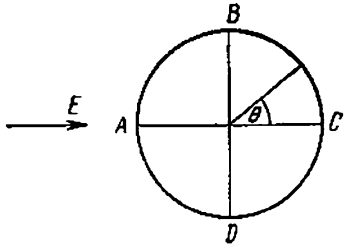


Fig. 164

intensidad del campo dentro de la esfera, así como en los puntos A, B, C y D (fig. 164) que están fuera de la esfera.

462. Hallar la ley de distribución de la carga superficial en una esfera, sabiendo que dentro de esta última dicha carga crea un campo homogéneo de intensidad E.

463. Una esfera metálica de radio R que tiene carga $+Q$, fue colocada en un campo eléctrico homogéneo de intensidad E. Encontrar la dependencia de la densidad superficial de carga en función del ángulo θ, así como la intensidad del campo eléctrico en los puntos A, B, C y D (fig. 164), que están fuera de la esfera.

464. Un cilindro infinito, de material con constante dieléctrica ε, está polarizado homogéneamente en dirección perpendicular a su eje. El radio del cilindro es igual a R. El momento dipolar de la molécula es p. El número de moléculas por unidad de volumen es igual a N. Encontrar la intensidad del campo eléctrico dentro del cilindro.

465. Un cilindro infinito de radio R hecho de material con constante dieléctrica ε, se mete en un campo eléctrico homogéneo, cuya intensidad E está dirigida perpendicularmente al eje del cilindro. Determinar la intensidad del campo dentro del cilindro, así como en los puntos A, B, C y D fuera del cilindro (fig. 164).

466. Un cilindro metálico cargado de radio R fue situado en un campo eléctrico homogéneo, cuya intensidad E está dirigida perpendicularmente al eje del cilindro. La carga que cae en unidad de longitud del cilindro es igual a $\varkappa$. Hallar la dependencia de la densidad de la carga en función del ángulo θ, así como la intensidad del campo eléctrico en los puntos A, B, C y D (fig. 164) que están fuera del cilindro.

467. Una esfera cargada uniformemente con carga q fue instalada en un dieléctrico isotrópico, ilimitado y homogéneo, con constante dieléctrica δ. Determinar la carga de polarización en el límite del dieléctrico y la esfera.

468. El espacio entre dos esferas concéntricas de radios iguales a r_1 y r_2 está lleno de dieléctrico con constante dieléctrica ε. En el centro de las esferas hay una carga puntual $+Q$. Encontrar la intensidad y el potencial en función de la distancia desde el centro de la esfera, así como el valor de las cargas de polarización.

469. El espacio entre dos esferas metálicas concéntricas finas está lleno de dieléctrico con constante dieléctrica ε. Los radios de las esferas son iguales a r_1 y r_2. Las cargas de las esferas metálicas, interna y externa, son iguales a $+Q$ y $-Q$, respectivamente. Hallar la diferencia de potencial, la densidad de las cargas de polarización y la capacidad del condensador esférico.

470. El espacio entre las armaduras de un condensador plano está lleno de dieléctrico con constante dieléctrica ε, como muestra la fig. 165. El área de las placas del

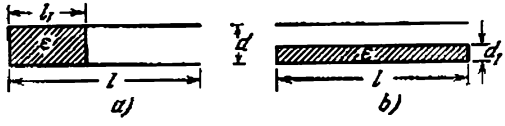


Fig. 165

condensador es S. Determinar la capacidad del condensador en ambos casos.

471. Un condensador plano, cuyas placas están cargadas con cargas $+q$ y $-q$ fue sumergido hasta la mitad de la

altura de las placas en un líquido con constante dieléctrica ε. ¿Cuál es la densidad de las cargas de polarización del dieléctrico, si el área de las placas es igual a S?

472. Un dieléctrico consta de moléculas cada una de las cuales puede ser representada en forma de dos cargas $+q$ y $-q$, situadas a una distancia x la una de la otra. En este caso, la distancia x depende de la intensidad del campo E que actúa sobre las cargas de la forma siguiente: $kx = qE$, donde k es un coeficiente constante.
Supongamos que en unidad de volumen del dieléctrico existen n moléculas. Determinar la intensidad del campo E dentro de un condensador lleno de dicho dieléctrico, si, antes de rellenarlo, la intensidad del campo era igual a E_0. Determinar la constante dieléctrica del dieléctrico.

473. Un condensador está lleno de dieléctrico, cuyas propiedades están descritas en el problema 472. Encontrar la energía acumulada en el dieléctrico como consecuencia de su polarización.

474. Dos placas metálicas están situadas paralelamente y cargadas con cargas iguales a $+q_1$ y $-q_2$, siendo $q_1 > q_2$. El espacio entre dos placas está lleno de un dieléctrico homogéneo e isotrópico con constante dieléctrica ε. ¿Cuál será la fuerza que actúa por unidad de área sobre la superficie del dieléctrico? El área de cada placa es igual a S.

475. Determinar la energía de un condensador plano, cuyo espacio entre las placas está lleno de un dieléctrico. Son conocidas la carga del condensador y la diferencia de potencial entre sus armaduras.

476. Dos láminas rectangulares de longitud l y área S están situadas paralelamente la una a la otra a una distancia d. Las láminas tienen una diferencia de potencial igual a U. En el espacio entre las láminas se introduce un dieléctrico con constante dieléctrica ε. El grosor del dieléctrico es d, su anchura es igual a la anchura de las placas y su longitud es mayor que l (fig. 166).

Encontrar la dependencia de la fuerza, que actúa sobre el dieléctrico por parte del campo en función de la distancia x.

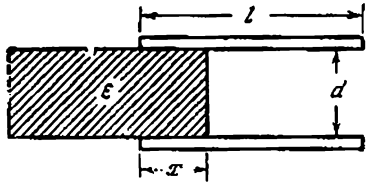


Fig. 166

477. Resolver el problema 476 en el caso, en que la diferencia de potencial entre las placas se mantiene constante e igual a U.

478. Sobre la superficie de un líquido, puesto en un gran recipiente, se encuentran las placas verticales del condensador que rozan la superficie del líquido. El área de cada placa del condensador es igual a S, la distancia entre las placas, d y la altura de las mismas es l. El condensador se conecta a una batería con f.e.m. igual a U. La densidad del líquido es ρ y su constante dieléctrica es ε. Hallar la altura máxima, a la cual se eleva el líquido en el proceso de oscilación, así como la altura del nivel del líquido establecido.

479. En el fondo de un recipiente se encuentra una lámina metálica fina, cuya área S es mucho menor que la del fondo del recipiente. En el recipiente se vierte un líquido con constante dieléctrica ε. La profundidad del líquido es mucho menor que las dimensiones lineales de la lámina. ¿Qué pasará con el líquido, si cargamos la lámina con una carga igual a $+Q$?

§ 20. CORRIENTE ELECTRICA CONTINUA

480. En la superficie de un cilindro, infinitamente largo, las cargas están distribuidas de tal modo que la mitad situada a la derecha de la sección OO' está cargada con cargas positivas y la otra, la izquierda, con cargas

negativas (fig. 167). En ambas direcciones la densidad de cargas aumenta directamente proporcional a la distancia de la sección OO'. Demostrar que en todos los puntos dentro del cilindro, la intensidad del campo

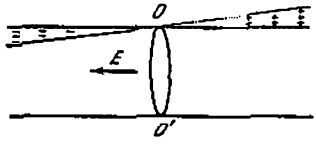


Fig. 167

eléctrico será igual y estará dirigida a lo largo del eje del cilindro, como se muestra en la figura por medio de una flecha.

481. ¿Existirá en las proximidades de la superficie de un conductor, por el cual pasa una corriente continua, un campo eléctrico?

482. Representar gráficamente la distribución de las líneas de fuerza de un campo eléctrico en torno de un conduc-

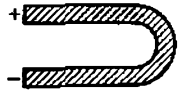


Fig. 168

tor homogéneo en forma de un arco (fig. 168). Por el conductor pasa corriente continua.

483. Dos conductores con coeficientes de temperatura de resistencia α_1 y α_2 poseen, a 0° C, resistencias iguales a R_{01} y R_{02}. Determinar el coeficiente de temperatura del circuito constituido de estos conductores, si los conductores están unidos en serie y si están unidos en paralelo.

484. Determinar la resistencia del circuito que se ve en la fig. 169. Las resistencias de los conductores de conexión $AC'C$ y $BC''D$ pueden ser despreciadas.

485. De un alambre de longitud L y de resistencia R es necesario hacer un calentador para conectarlo en una

red con tensión U. Se sabe que por el alambre puede pasar, sin miedo a quemarlo, una corriente no mayor que I_0. ¿Qué cantidad máxima de calor q se podrá ob-

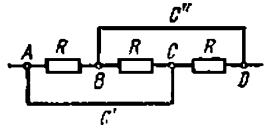


Fig. 169

tener, en unidad de tiempo, con la ayuda del calentador? Para hacer el calentador, el alambre puede cortarse en pedazos y después unirse en serie o en paralelo.

486. Hallar la resistencia de un tetraedro $ABCD$, hecho de seis hilos de resistencia R cada uno. Los hilos conductores están unidos a los vértices A y B.

487. Encontrar la resistencia del hexágono, representado en la fig. 170, conectado al circuito entre los puntos A y B. La resistencia de cada conductor del circuito es R.

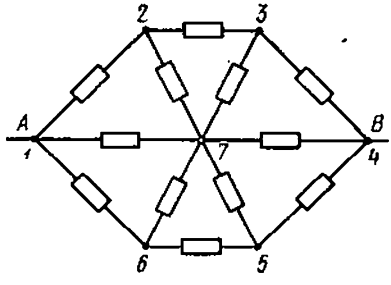


Fig. 170

488. Determinar la resistencia de un cubo, hecho de alambre, al conectarlo en un circuito entre los puntos A y B (fig. 171). La resistencia de cada arista del cubo es igual a R.

489. Un rectángulo $ADBC$ está soldado de alambres de iguales sección S y resistencia específica ρ. La diago-

nal AB es hecha también de ese mismo material y sección (fig. 172). Determinar la resistencia entre los

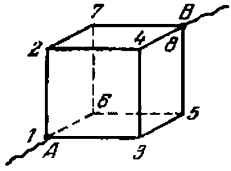


Fig. 171

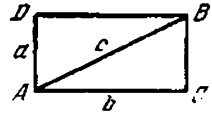


Fig. 172

puntos A y B y la resistencia entre los puntos C y D, si $AD = BC = a$ y $AC = BD = BD = b$.

490. En la fig. 173 está representado el circuito de la puente de Wheatstone para medir resistencias. R_x es la resistencia desconocida; R_0 es la resistencia estándar;

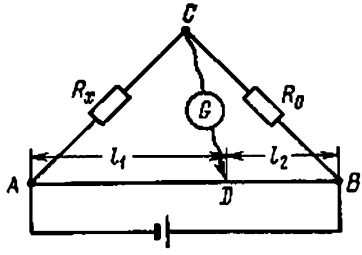


Fig. 173

G es el galvanómetro unido al contacto de corredera D con un conductor homogéneo de gran resistencia AB (hilo de resistencia). Demostrar que en ausencia de corriente a través del galvanómetro, tiene lugar la relación $R_x/R_0 = l_1/l_2$. La resistencia de los conductores de conexión puede ser despreciada.

491. ¿Qué resistencia es necesario conectar entre los puntos C y D (fig. 174) para que la resistencia de todo el circuito (entre los puntos A y B) no dependa del número de células elementales?

492. En los circuitos de salida de los generadores, para la disminución de la tensión de salida en un determinado

número de veces, se utiliza un dispositivo llamado atenuador. El atenuador tiene la forma de un reductor de tensión, montado según el circuito de la fig. 175.

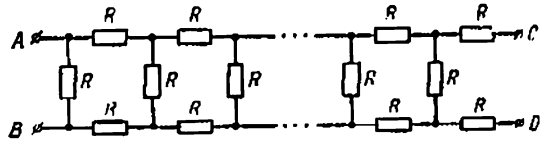


Fig. 174

Un conmutador especial permite unir con el terminal de salida el punto, cuyo potencial U_0 se produce por el generador, o cualquiera de los puntos U_1, U_2 . . . . . ., U_n, cuyo potencial es k veces menor que el potencial

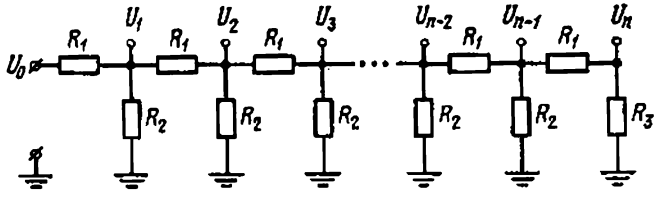


Fig. 175

del anterior ($k > 1$). El segundo terminal de salida y los extremos inferiores de las resistencias están puestos a tierra. Determinar la relación de las resistencias $R_1 : R_2 : R_3$, siendo cualquiera el número de células.

493. ¿Con qué aparatos es necesario disponer a fin de verificar experimentalmente la ley de Ohm, es decir, demostrar que la intensidad de la corriente es directamente proporcional a la diferencia de potencial?

494. A dos condensadores planos iguales, unidos en paralelo, fue transmitida una carga Q. En el momento de tiempo $t = 0$, la distancia entre las placas del primer condensador comienza a aumentar uniformemente según la ley $d_2 = d_0 + vt$, y la distancia entre las placas del segundo empieza a disminuir uniformemente según la ley $d_2 = d_0 - vt$. Despreciando

las resistencias de los conductores de conexión, hallar la intensidad de la corriente del circuito en el período de movimiento de las placas de los condensadores.

495. Encontrar el trabajo realizado por un campo electrostático (véase las condiciones del problema 494) para aumentar simultáneamente la distancia entre las placas del primer condensador y para disminuir la distancia entre las placas del segundo condensador en una magnitud a.

496. Durante el trabajo con un galvanómetro muy sensible el experimentador, sentado en una silla junto a una mesa, descubrió un fenómeno curioso. (El galvanómetro estaba fijo en la pared y los extremos de su arrollamiento estaban conectados a una llave abierta, situada en la mesa). Al levantarse de la silla y tocar la mesa con la mano, el experimentador observó un desplazamiento considerable del galvanómetro. Si el investigador tocaba la mesa sentado en la silla, tal desplazamiento no se observaba. De igual modo, la imagen del galvanómetro no se desplazaba, cuando el hombre tocaba la mesa, sin sentarse anteriormente en la silla. ¿Cómo pueden explicarse estos fenómenos?

497. En un galvanómetro muy sensible, con el circuito abierto, fue descubierto el siguiente efecto. Si se aproxima un cuerpo cargado a uno de los extremos del arrollamiento del galvanómetro, habrá un salto. Si aproximamos este cuerpo al otro extremo del arrollamiento, el salto ocurrirá en el mismo sentido. ¿Cómo explicar este fenómeno?

498. ¿Cómo está distribuido el potencial en la pila Daniell, estando abierto el circuito externo?

499. Representar gráficamente la variación aproximada del potencial a lo largo de los circuitos cerrados representados en la fig. 176. Determinar la intensidad de la corriente para cada circuito y la diferencia de potencial entre los puntos A y B. Prescindir de la resistencia de los conductores de conexión.

500. Cuando se mezcla un mol de zinc con ácido sulfúrico se desprenden cerca de $445 \cdot 10^3$ J de calor, y para la

liberación de un mol de cobre de una solución de sulfato de cobre (caparrosa azul) se utilizan cerca de

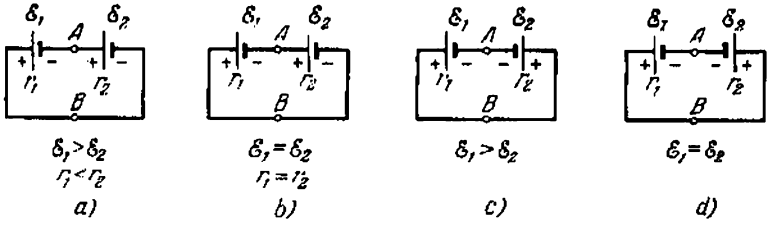


Fig. 176

$235 \cdot 10^3$ J. Encontrar por estos datos la f.e.m. de la pila Daniell.

501. Dos pilas Daniell con resistencias internas $r_1 = 0{,}8\ \Omega$ y $r_2 = 1{,}3\ \Omega$ y la misma f.e.m. están unidas en paralelo y cerradas por una resistencia externa R. Determinar la relación de la cantidad de zinc que se disuelve en estas pilas en un determinado intervalo de tiempo.

502. Una pila Daniell está hecha de materiales absolutamente puros. Determinar el gasto de zinc y de los cristales de caparrosa azul ($CuSO_4 \cdot 5H_2O$), si la pila da una corriente del 0,1 A en el período de 8 horas.

503. En una pila Daniell el cobre fue sustituido por cera cubierta con una capa de grafito. Describir los fenómenos que ocurrirán en esta pila, si unimos mediante un alambre el zinc con la capa de grafito.

504. ¿Cómo variará la f.e.m. de la batería que se ve en la fig. 177, si eliminamos la pared entre los recipientes?

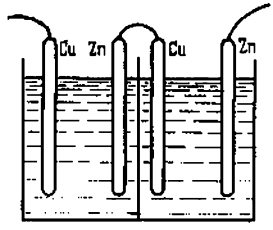


Fig. 177

La solución del ácido sulfúrico está utilizada como electrólito.

505. Una barra de carbón homogéneo se encuentra en el fondo de un recipiente con electrólito. A los extremos de la barra está conectado un voltímetro que posee gran resistencia. Sobre el medio de la barra de carbón se apoya una barra de zinc. ¿Qué mostrará el voltímetro, si la barra de zinc está en posición vertical? ¿Cómo variará su indicación si la barra de zinc se inclina para la derecha o para la izquierda?

506. Una esfera conductora hueca de radio $R = 5$ cm, fue colocada en un baño electrolítico lleno de una solución de caparrosa azul. En la superficie de la esfera oxiste una abertura de radio $r = 0{,}5$ mm. ¿En cuánto aumentará el peso de la esfera, si el depósito de cobre dura $t = 30$ min para una densidad de corriente en el electrólito igual a $j = 0{,}01$ A/cm^2?

507. Si un condensador que tiene carga Q se descarga dentro de un baño electrolítico con agua ácida, entonces habrá un desprendimiento del gas oxhídrico. Según la ley de Faraday la cantidad de substancia desprendida durante la electrólisis, depende solamente de la cantidad de electricidad que pasó. Esto significa que si descargamos el condensador dentro de N baños unidos en serie, se desprenderá N veces más de gas oxhídrico. N puede hacerse suficientemente grande y obtener cualquier cantidad de gas. Quemando este gas, obtendremos cierta cantidad de energía, lo que contradice explícitamente al principio de conservación de la energía, puesto que la energía inicial del condensador cargado no sea infinitamente grande. ¿En qué consiste la cuestión?

508. Al explotar un gas oxhídrico, para cada gramo de hidrógeno reaccionado se desprenden $145 \cdot 10^8$ J de calor. Utilizando estos datos, encontrar para qué valor mínimo de la f.e.m. de una batería puede ocurrir la electrólisis del agua?

509. Durante la electrólisis los iones positivos y negativos continuamente se neutralizan en los electrodos correspondientes. ¿Qué causas mantienen la concentración de los iones en los electrólitos en un nivel constante? ¿En qué partes del electrólito sucede la reposición de los iones neutralizados?

510. La densidad total de corriente en los electrólitos se determina como la suma de dos corrientes: la corriente de los iones positivos y la de los negativos, o sea,

$$j = e\,(n_+v_+ + n_-v_-),$$

donde e es la carga del ion, n y v son las concentraciones y velocidades de los iones positivos y negativos. ¿Por qué la cantidad de substancia desprendida, por ejemplo, en el cátodo, se considera proporcional a la corriente total y no a la corriente en_+v_+?

511. La temperatura de las extremidades calientes de una termopila es igual a $t_1 = 127$ °C, y de las extremidades frías es igual a $t_2 = 27$ °C, la f.e.m. de la batería es igual a $\mathscr{E} = 4$ V. Para mantener una temperatura constante en las extremidades calientes se transmiten a éstas, por unidad de tiempo, dos calorías. A la batería fue unido un baño electrolítico con solución del sulfato de cobre (caparrosa azul). ¿Cuál será la cantidad máxima de cobre (teóricamente) que puede ser depositada en el cátodo por unidad de tiempo?

512. Dos esferas metálicas de radios $r_1 = 1$ cm y $r_2 = 2$ cm, que se encuentran a una distancia $R = 100$ cm la una de la otra, fueron unidas a una batería con fuerza electromotriz $\mathscr{E} = 3000$ V. Encontrar la fuerza de interacción de las esferas. La interacción de los conductores de conexión puede ser despreciada.

513. Las placas de un conductor plano fueron conectadas a una batería, cuya f.e.m. es igual a $\mathscr{E}$. Calcular el trabajo mecánico realizado por el campo eléctrico para desplazar las placas, si, inicialmente, la distancia entre las placas era igual a d_1 y en el final a d_2, siendo $d_2 < d_1$. Prescindir del desprendimiento del calor en la batería y en los hilos conductores.

514. Determinar las tensiones U_1 y U_2 en los condensadores (fig. 178), si $\mathscr{E}_1 = 12 \cdot 10^3$ V, $\mathscr{E}_2 = 13 \cdot 10^3$ V, $C_1 = 3$ μF, $C_2 = 7$ μF. La conductibilidad de los dieléctricos puede ser despreciada.

515. Una de las placas de un condensador, conectado a una batería con fuerza electromotriz igual a $\mathscr{E}$, está puesta

a tierra (fig. 179). ¿Variarán los potenciales de las placas del condensador respecto a la tierra, si des-

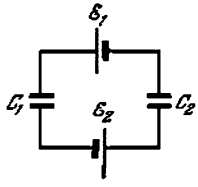


Fig. 178

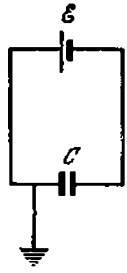


Fig. 179

conectamos el conductor que une la placa del condensador con la tierra?

516. Por un acumulador de resistencia interna r y f.e.m. $\mathcal{E}$ pasa una corriente igual a I. ¿Cuál es la diferencia de potencial en los terminales del acumulador?

517. ¿Por qué una pila galvánica, con f.e.m. de algunos voltios, produce una corriente considerable y una máquina electrostática, con f.e.m. de decenas de miles de voltios, produce una corriente insignificante?

518. ¿En qué caso dos pilas galvánicas conectadas en serie y cerradas con una resistencia externa, producirán menos corriente que una de estas pilas conectada a la misma resistencia?

519. Para determinar el lugar de deterioro del aislamiento entre los conductores de una línea telefónica bifilar, de longitud $L = 5{,}6$ km, a su extremo fue conectada una batería con f.e.m. $\mathcal{E} = 24$ V. Luego resultó que si los conductores del otro extremo de la línea están abiertos, la corriente que pasa por la batería es igual a $I_1 = 1{,}5$ A, si están cortocircuitados, la corriente que pasa por la batería es igual a $I_2 = 2$ A. La corriente de cortocircuito de la batería es $I_3 = 96$ A. La resistencia de cada conductor de la línea es igual a $r = 7\ \Omega$. Determinar la resistencia del aislamiento R en el lugar de deterioro.

520. Las pilas galvánicas con f.e.m. $\mathscr{E}_1 = 2$ V y $\mathscr{E}_2 = 1{,}5$ V están conectadas de acuerdo con el circuito representado en la fig. 180,*a*. Un voltímetro, cuyo valor cero se encuentra en el medio de la escala, muestra la tensión $U_1 = 1$ V, y su aguja se inclina para aquel lado

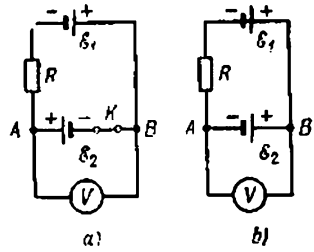


Fig. 180

como cuando la llave K está abierta. ¿Qué mostrará el voltímetro, si unimos los aparatos según el circuito que se da en la fig. 180,*b*? La corriente que pasa por el voltímetro puede ser despreciada.

521. Resolver el problema 520, con la condición que cuando la llave K está cerrada (fig. 180,*a*), la aguja del voltímetro se inclina para el lado opuesto que con la llave abierta.

522. Dos pilas con f.e.m. $\mathscr{E}_1 = 2$ V y $\mathscr{E}_2 = 1$ V están unidas de acuerdo con el circuito representado en la

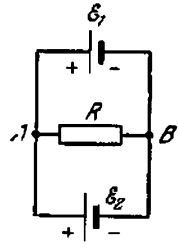


Fig. 181

fig. 181. La resistencia es $R = 0{,}5\ \Omega$. Las resistencias internas de las pilas son iguales a 1 Ω cada una. Determinar las intensidades de las corrientes que pasan por

las pilas y la resistencia R. La resistencia de los hilos conductores se desprecia.

523. ¿Para qué valor de la resistencia R en el circuito del problema 522, no pasará la corriente por la pila galvánica con f.e.m. $\mathscr{E}_2$? ¿Para cuáles valores de R la corriente que pasa por esta pila será dirigida contra la f.e.m. de la pila?

524. ¿Es posible con ayuda de 24 acumuladores, teniendo cada uno f.e.m. $\mathscr{E}_0 = 2$ V y resistencia interna $r = 0{,}3\ \Omega$, obtener la corriente $I = 21$ A, en el circuito externo, por una resistencia $R = 0{,}2\ \Omega$, juntándolos en unos grupos iguales.

525. Una estufa eléctrica, calculada para una tensión de 220 V, necesita ser modificada, sin cambiar y disminuir la espiral, para 110 V de modo que su potencia permanezca la misma. ¿Qué es necesario hacer para esto?

526. ¿Por qué, al conectar a la red un aparato calentador de una gran potencia (por ejemplo, una plancha eléctrica), el caldeo de la bombilla en un apartamento disminuye notoriamente, luego pasado un pequeño intervalo de tiempo aumenta, alcanzando aproximadamente la intensidad anterior?

527. Una tetera eléctrica tiene dos arrollamientos. Al conectar uno de ellos, el agua hervirá durante un tiempo t_1, y si conectamos el otro, entonces hervirá durante un tiempo t_2 ¿Después de cuánto tiempo hervirá la misma cantidad de agua, si conectamos dos arrollamientos al mismo tiempo: 1) en serie? 2) en paralelo?

528. Un hervidor eléctrico tiene tres arrollamientos. Si unimos dos arrollamientos en paralelo, conectando en serie el tercer a los otros dos, entonces, para diferentes combinaciones de los arrollamientos, el agua en un recipiente hierve en 20, 40 y 16 minutos respectivamente. ¿En cuánto tiempo hervirá el agua, si unimos todos los arrollamientos 1) en serie? 2) en paralelo?

529. Para transmitir la energía eléctrica a grandes distancias con ayuda de un transformador, aumentan la tensión de modo que la potencia permanezca la misma y la intensidad de la corriente se haga menor. De acuerdo con la ley de Joule—Lentz, la cantidad del

calor, desprendido en los conductores, es igual a $Q = I^2Rt$ y, consecuentemente, las pérdidas de energía al desprenderse el calor, serán diminutas a corrientes pequeñas. Por otro lado, $Q = \frac{U^2}{R}t$, o sea, la cantidad del calor desprendido incrementa con el aumento de la tensión. Explicar: ¿por qué el aumento de tensión conduce a la economía de energía eléctica durante su transmisión a grandes distancias?

530. Un acumulador con f.e.m. $\mathscr{E} = 10$ V y resistencia interna $r = 1\Omega$ está cerrado por una resistencia externa R y desprende en él una potencia de $W = 9$ W. Determinar la diferencia de potencial U en los terminales del acumulador. ¿Cuál es la causa de la ambigüedad de los resultados?

531. Dos hornillos eléctricos, conectados en paralelo a la red urbana, consumen una potencia total igual a N. Si los conectamos en serie, la potencia será mayor que la potencia de cualquier otro par de hornillos eléctricos conectados en serie que consumen una potencia N, siendo conectados en paralelo. ¿Qué potencias consumen estos hornillos siendo conectados en la misma red por separado?

532. ¿Qué potencia máxima util (potencia desprendida en una resistencia externa) puede producir un acumulador con f.e.m. $\mathscr{E} = 10$ V y resistencia interna igual a $r = 1\ \Omega$? ¿Cuál deberá ser, en este caso, la resistencia del circuito externo?

533. Determinar el rendimiento η del acumulador mencionado en los problemas 530 y 532. ¿De qué modo depende el rendimiento de la resistencia externa, permaneciendo constante la resistencia interna? ¿Cómo variará en este caso la potencia útil? ¿Podrá ser η igual a la unidad?

534. La carga de un acumulador con fuerza electromotriz inicial se realiza por una estación de carga, donde la tensión de la red es igual a U. La resistencia interna del acumulador es r. Determinar la potencia útil gastada para cargar el acumulador y la potencia gastada para el desprendimiento del calor en el acumulador.

535. ¿Sobrepasará la potencia útil gastada en la carga de un acumulador, a la cantidad del calor desprendido en éste?

536. Por un conductor pasa una corriente $I = 10$ A. El área de la sección transversal del conductor es $S = 5$ cm^2, y el número de electrones libres en 1 cm^3 de éste es $n = 10^{23}$. Definir la dirección de la velocidad v de los electrones, considerándola igual para todos los electrones.

537. Un paralelepípedo metálico, rectangular, con las dimensiones de lados d, b, c ($d \gg c$; $b \gg c$), se mueve con aceleración a en dirección al lado menor (fig. 182).

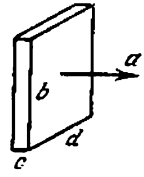


Fig. 182

Encontrar la intensidad del campo eléctrico que surge como consecuencia de la aceleración del movimiento del paralelepípedo, así como la densidad de las cargas eléctricas en las superficies laterales del mismo perpendiculares a la dirección de la aceleración.

538. Un cilindro metálico macizo de radio R gira con una velocidad angular constante ω. Hallar la dependencia de la intensidad del campo en función de la distancia hasta el eje del cilindro y la diferencia de potencial entre la superficie del cilindro y el eje.

539. Hay un disco metálico de radio R (fig. 183) que gira con una velocidad angular ω. El disco está conectado a un circuito eléctrico por medio de unos contactos corredizos que tienen contacto con el eje del disco y su borde. La resistencia del disco es insignificante en

comparación con la resistencia de la carga R_0. Determinar la cantidad del calor desprendido por unidad de tiempo. Explicar desde el punto de vista de la teo-

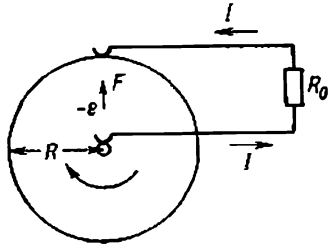


Fig. 183

ría electrónica de los metales: ¿qué es lo que frena el disco?

§ 21. CORRIENTE ELECTRICA EN LOS GASES Y EL VACIO

540. Dos partículas de masas m_1 y m_2, experimentan un choque central no elástico. La energía necesaria para ionizar la segunda partícula es igual a $\mathscr{E}_0$. ¿Qué energía mínima $\mathscr{E}_{1min}$ que tenía poseer la primera partícula del choque, para que esta ionización ocurriera? La segunda partícula antes del choque se encontraba en reposo.

541. En la fig. 184 está representado el contador de partículas elementales de Geiger—Müller. Entre el cuerpo

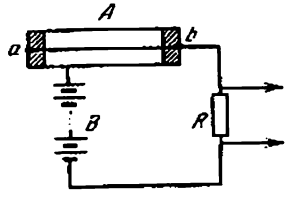


Fig. 184

del tubo A y un hilo fino se crea una tensión alta, apenas un poco menor de «la tensión crítica», necesaria al cebado de una descarga. Una partícula rápida cargada, llegando al contador, provoca la ionización de

las moléculas de gas, iniciando de este modo la descarga. El paso de la corriente por el circuito está acompañado de la caída de tensión en la resistencia grande R. Esta caída de tensión se registra después de la amplificación mediante los dispositivos correspondientes. Para que el contador corresponda a su destino necesita la extinción rápida de la descarga provocada por la partícula. ¿Cuál es la causa de la extinción de descarga en el circuito de la fig. 184?

542. A una fuente de tensión alta, a través de una resistencia $R = 10^3\ \Omega$, fue conectado un condensador $C = 10^{-11}$ F, cuya distancia entre las placas es $d = 3$ mm (fig. 185).

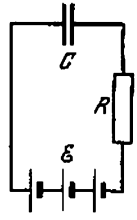


Fig. 185

El aire en el espacio entre las placas del condensador está ionizado por rayos X, de modo que en 1 cm^3 se forman $n = 10^4$ pares de iones por segundo. La carga de cada ion es igual a la carga del electrón. Encontrar la caída de tensión en la resistencia R, considerando que todos los iones alcanzan las placas del condensador sin tener tiempo de recombinar.

543. Un ionizador crea, por unidad de tiempo, en un volumen unitario de gas, Δn_0 iones de ambos signos. En determinado momento de tiempo en un volumen unitario de gas, existen n_0 iones positivos y la misma cantidad de negativos. El gas se encuentra entre dos electrodos planos y paralelos, de área S cada uno y de distancia entre ellos igual a l. La intensidad de la corriente entre los electrodos es I. Considerando que el número de iones, recombinados por unidad de tiempo, en el volumen unitario, es igual a: $\Delta n_0' = \gamma n_0^2$, donde γ es un coeficiente constante de recombinación, determinar en qué condición la concentración de los iones

entre los electrodos no variará con el tiempo. La carga de un ion es igual a q.

544. Supongamos que en el problema anterior el gas ionizado se encuentra entre los electrodos en un campo eléctrico, de intensidad igual a E. Demostrar que, siendo la condición $I/qSl \ll \gamma n^2$, la ley de Ohm es válida para la conductibilidad automantenida. Considerar en este caso que las velocidades del movimiento dirigido de los iones positivos y negativos son iguales a $u_+ = b_+E$ y $u_- = b_-E$, respectivamente, donde b_+ y b_- son coeficientes constantes (denominados movilidad iónica del gas).

545. Demostrar que la densidad de la corriente de los iones en el problema 543, para la condición $\gamma n_0^2 \ll I/qSl$ no depende de la diferencia de potencial entre los electrodos. Explicar por qué la densidad de la corriente es tanto mayor cuanto mayor sea la separación entre los electrodos.

546. Representar gráficamente la distribución de la tensión en la descarga luminiscente.

547. Describir el comportamiento de diferentes partes de la descarga luminiscente: 1) al desplazarse el ánodo en dirección al cátodo; 2) al desplazarse el cátodo en dirección al ánodo.

548. ¿Qué ocurrirá con un arco eléctrico encendido, si enfriamos bruscamente el carbón negativo? ¿Qué ocurrirá si enfriamos el carbón positivo?

549. A una máquina electrostática fueron conectados una botella de Leyden y un descargador unidos en paralelo. La corriente de la máquina electrostática es $I = 10^{-5}$ A. La capacidad de la botella de Leyden es $C = 10^{-8}$ faradios. Para que ocurra la descarga disruptiva, la máquina debe funcionar un plazo de tiempo $t = 30$ s. La duración de la descarga es $\tau = 10^{-6}$ s. Determinar la magnitud de la corriente en la descarga I_{des} y la tensión del cebado de la descarga disruptiva U_{ceb}. La capacidad del descargador puede ser despreciada.

550. El descargador de una máquina electrostática, cuyos discos giran con velocided constante, está conectado

a las armaduras de la botella de Leyden. Entre las esferas del descargador a intervalos de tiempo iguales τ_0 pasan chispas. ¿A qué intervalos de tiempo τ pasarán las chispas, si al descargador se conectan dos botellas de Leyden, unidas entre sí, una vez en paralelo y otra vez en serie? La capacidad de cada botella de Leyden es la misma que en el primer caso.

551. ¿Qué energía en ergios adquiere un electrón que recorre en el vacío una diferencia de potencial igual a 1 V? (En la física atómica esta energía tiene medida unitaria de «electrón-voltio».)

552. ¿Coincide la trayectoria del movimiento de una partícula cargada en un campo electrostático con la línea de fuerza?

553. Entre un caldeo que emite electrones, y un anillo conductor fue creada una diferencia de potencial U (fig. 186). Los electrones se mueven aceleradamente

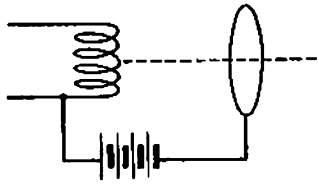


Fig. 186

a lo largo del eje del anillo. Debido a esto, una energía cinética aumenta, mientras que la batería, que crea la diferencia de potencial U, no realiza trabajo, porque la corriente no pasa por el circuito. (Se supone que los electrones no alcanzan el anillo.) ¿Cómo concordar esto con el principio de conservación de la energía?

554. Un triodo con caldeo directo está conectado a un circuito como muestra la fig. 187. La f.e.m. de la batería del ánodo es $\mathscr{E}_1 = 80$ V, de la del caldeo es $\mathscr{E}_2 = 6$ V y de la rejilla es $\mathscr{E}_3 = 2$ V. ¿Con qué energías los electrones alcanzarán el ánodo de la lámpara? ¿Cómo

variará la energía de los electrones que alcanzan el ánodo, si $\mathscr{E}_3$ variará en magnitud o incluso cambiará

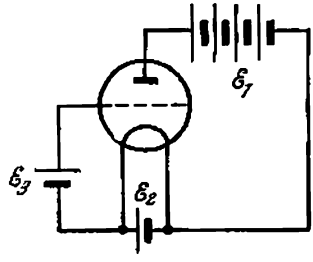


Fig. 187

el signo? La corriente anódica debe considerarse pequeña en comparación con la del caldeo.

555. La corriente anódica de un diodo, en un determinado intervalo de tensiones, puede ser relacionada con la diferencia de potencial U_a entre los electrodos mediante la ecuación $I_a = AU_a + BU_a^2$. Encontrar la corriente anódica, si el diodo está conectado en serie por la resistencia $R_a = 2 \cdot 10^4\ \Omega$ al circuito de la batería con f.e.m. $\mathscr{E} = 120$ V. Para tal diodo $A = 0{,}15$ mA/V, $B = 0{,}005$ mA/V^2. La resistencia interna de la batería puede ser despreciada.

556. Dos válvulas electrónicas están conectadas en paralelo y enchufadas en un circuito de una batería con f.e.m. $\mathscr{E} = 300$ V en serie por la resistencia $R = 4 \cdot 10^3\ \Omega$

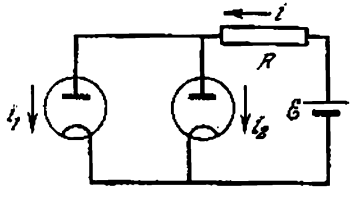


Fig. 188

(fig. 188). La dependencia de la corriente del ánodo i en función de la tensión del ánodo U_a para cada una de las válvulas puede ser aproximadamente representada por la fórmula: $i = AU_a + BU_a^2$, donde para

una de las válvulas $A_1 = 0{,}07$ mA/V, $B_1 = 0{,}005$ mA/V^2 y para la otra válvula $A_2 = 0{,}03$ mA/V, $B_2 = 0{,}01$ mA/V^2. Determinar las corrientes anódicas de las válvulas. La resistencia interna de la batería puede menospreciarse.

557. Una válvula electrónica está conectada al circuito de una batería de f.e.m. $\mathscr{E} = 250$ V en serie por la resistencia $R = 10^4\ \Omega$ (fig. 189). La rejilla de la válvula

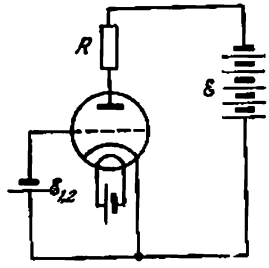


Fig. 189

está unida con el polo negativo de la batería ($\mathscr{E}_1 = 3$ V), y el cátodo, con el polo positivo. Entonces la caída de tensión en la resistencia R alcanza $U_1 = 95$ V. Si en el circuito de la rejilla se pone una batería con $\mathscr{E}_2 = 6$ V, la diferencia de potencial en la resistencia R será $U_2 = 60$ V. ¿Cuál será la diferencia de potencial entre el ánodo y el cátodo de la válvula, si cerramos en cortocircuito la rejilla y el cátodo? (En el intervalo de variación del potencial de la rejilla analizado, considerar la característica de la rejilla de la válvula como una línea recta.)

558. Tres diodos iguales, cuyas características anódicas pueden ser, aproximadamente, representadas por los segmentos de las rectas:

$$I_a = 0 \quad \text{para } U_a \leqslant 0,$$
$$I_a = kU_a \quad \text{para } U_a > 0,$$

donde $k = 0{,}12$ mA/V, fueron conectados a un circuito como muestra la fig. 190. Representar gráficamente la dependencia de la corriente I en el circuito respecto

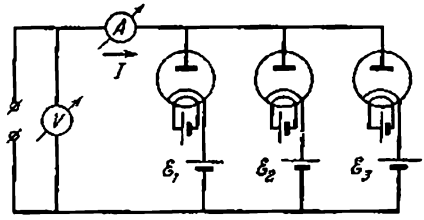


Fig. 190

a la tensión V, si $\mathscr{E}_1 = 2$ V, $\mathscr{E}_2 = 5$ V, $\mathscr{E}_3 = 7$ V, y V puede variar desde -10 V hasta $+10$ V.

559. Determinar la sensibilidad de un tubo catódico con relación a la tensión, o sea, la magnitud de desviación de la mancha en la pantalla provocada por la diferencia de potencial en 1 V en las placas dirigibles. La longitud de éstas es l, la distancia entre ellas es d, la distancia del extremo de la placa hasta la pantalla es L y la diferencia de potencial aceleradora es U_0.

§ 22. CAMPO MAGNETICO DE LA CORRIENTE. ACCION DEL CAMPO MAGNETICO SOBRE LA CORRIENTE Y LAS CARGAS EN MOVIMIENTO

560. Partiendo de los conceptos dimensionales, determinar la intensidad del campo magnético a distancia r de: 1) un hilo recto infinitamente largo, por el cual pasa la corriente I; 2) un plano infinito, por el cual pasa una corriente superficial de densidad j.

561. Por un tubo rectilíneo infinito y de paredes delgadas pasa una corriente I. Determinar la inducción del campo magnético en un punto arbitrario dentro del tubo.

562. Teniendo en cuenta que la inducción del campo magnético dentro de un conductor cilíndrico largo es $B = k \cdot 2\pi j r$, donde j es la densidad de corriente, r, la distancia del eje del conductor, k, el coeficiente que depende del sistema de unidades elegido, determinar

la inducción del campo magnético en un punto arbitrario dentro de una cavidad cilíndrica larga, cortada paralelamente al eje del conductor. Por el conductor pasa una corriente de densidad j. La distancia entre los ejes del conductor y de la cavidad es d.

563. Representar gráficamente la distribución de las líneas de inducción del campo magnético en la cavidad del conductor, descrito en el problema 562.

564. En un circuito, de forma de un círculo de radio R, pasa una corriente. Determinar la inducción del campo magnético en el centro del círculo, si la intensidad de corriente es igual a I.

Observación. Para determinar la inducción del campo magnético se puede utilizar la ley de Biot—Savart—Laplace. Esta ley afirma que un elemento del circuito Δl, por el cual pasa la corriente I, crea, en un punto arbitrario A del espacio, un campo magnético, cuya inducción es igual a:

$$\Delta B = k\frac{I\Delta l \operatorname{sen}\alpha}{r^2},$$

donde r es la distancia del elemento Δl hasta el punto A; α, el ángulo formado por el radio vector **r** con el elemento Δl; k, el coeficiente que depende del sistema de unidades elegido. La dirección de ΔB se determina por la regla de Ampere [de sacacorchos]: la dirección de rotación de la cabeza del sacacorchos corresponde a la dirección de la corriente I, en el elemento del circuito Δl. El vector Δ**B** es perpendicular al plano que contiene el elemento Δl y el radio vector **r**.

565. Por un circuito en forma de un anillo de radio R pasa una corriente I. Determinar la inducción del campo magnético en un punto arbitrario situado en la perpendicular trazada del centro del anillo al plano de éste.

566. Por un conductor infinitamente largo ABC, doblado bajo un ángulo recto, pasa una corriente I (fig. 191). ¿En cuánto variará la intensidad del campo magnético en el punto M, si al punto B conectamos un conductor recto infinitamente largo BD, de modo que

la corriente I se ramifique en el punto B en dos partes iguales y la corriente del conductor AB siga siendo la misma?

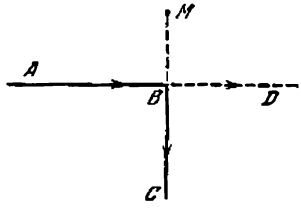


Fig. 191

567. Por un conductor, situado en un plano, como muestra la fig. 192, pasa una corriente. Encontrar la inducción

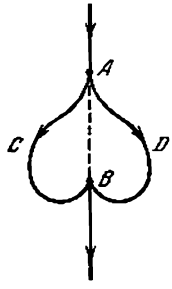


Fig. 192

del campo magnético en un punto arbitrario de la línea AB, siendo ésta el eje de simetría del conductor.

568. Un conductor de longitud l fue colgado debajo de un neumático horizontal largo en dos muelles iguales (el coeficiente de elasticidad de cada muelle es igual a k). Cuando por el neumático y el conductor no pasan corrientes, la distancia entre ellos es h. Hallar la distancia entre el neumático y el conductor, si por el neumático pasa una corriente I y por el conductor, i. El conductor no puede salir del plano vertical.

569. Determinar la fuerza con que actúa un conductor recto, infinitamente largo, sobre un circuito en forma rectangular, situado en el plano del conductor. Se sabe que

por el conductor pasa una corriente I y por el circuito, I_1. Los lados del circuito AD y BC tienen longitud a y son paralelos al conductor. La distancia entre AD

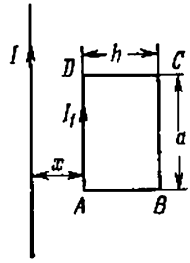


Fig. 193

y el conductor es x. La longitud de los lados es $AB = DC = h$. Las direcciones de las corrientes se indican en la fig. 193 por medio de flechas.

570. Un conductor de cobre de sección S está doblado de modo, que forma tres lados de un cuadrado y el mismo puede girar en torno de un eje horizontal (fig. 194).

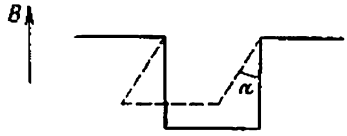


Fig. 194

El conductor se encuentra en un campo magnético homogéneo dirigido verticalmente. Cuando por el conductor pasa una corriente I, éste se desvía en un ángulo α, con relación a la vertical. Determinar la inducción del campo. La densidad del cobre es igual a ρ.

571. En el centro de un solenoide largo, en cada centímetro de longitud del cual hay n espiras, se encuentra una bobina corta, constituida de N espiras y de sección S. El eje de esta bobina es perpendicular al eje del solenoide largo y está dirigido verticalmente. La bobina interna se sujeta en el extremo de una balanza, la cual en la ausencia de corriente se encuentra en equi-

librio. Cuando por ambas bobinas pasa la misma corriente I, para equilibrar la balanza en el brazo derecho de ésta (fig. 195) es necesario colocar un peso P. La

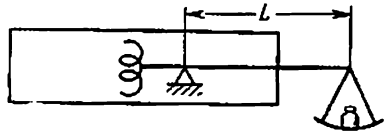


Fig. 195

longitud del brazo derecho de la balanza es igual a L. Determinar la intensidad de corriente I.

Observación. La inducción del campo magnético en las proximidades del centro del solenoide largo es igual a $B = \mu_0 nI$, donde n es el número de espiras por unidad de longitud del solenoide y I, la intensidad de corriente que pasa por el solenoide.

572. Por un anillo de alambre de radio R, colgado en dos conductores flexibles, pasa una corriente I. El anillo está situado en un campo magnético homogéneo con inducción B. Las líneas de inducción son horizontales. ¿Con qué fuerza está estirado el anillo?

573. Un anillo conductor de radio R, se encuentra en un campo magnético heterogéneo, cuyas líneas de inducción

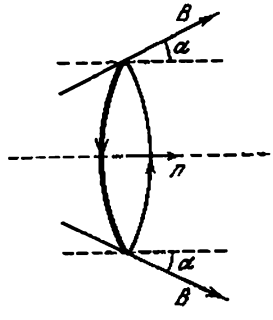


Fig. 196

forman en los puntos de intersección con el anillo un ángulo α respecto a la normal al plano del anillo (fig. 196). La inducción de un campo magnético que

actúa sobre el anillo es igual a B. Por el anillo pasa una corriente I. ¿Con qué fuerza actúa el campo magnético sobre el anillo?

574. Un circuito rectangular $ABCD$, cuyos lados tienen longitud a y b, se encuentran en un campo magnético homogéneo de inducción B y puede girar en torno del eje OO' (fig. 197). En el circuito pasa una corriente

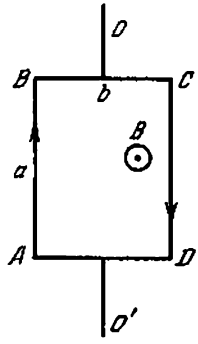


Fig. 197

constante I. Determinar el trabajo realizado por el campo magnético, al girar el circuito en 180°, si, inicialmente, el plano del circuito era perpendicular al campo magnético y estaba situado como muestra la fig. 197.

575. ¿Cómo se moverá un electrón en un campo magnético homogéneo, si en el momento inicial su velocidad forma un ángulo α con las líneas de inducción del campo?

576. Una corriente I pasa por una cinta metálica de anchura $AB = a$. Esta última se sitúa en un campo magnéti-

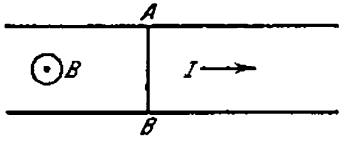


Fig. 198

co, cuya inducción es perpendicular a la cinta (fig. 198). Determinar la diferencia de potencial entre los puntos A y B de la cinta.

577. Una barra metálica sin carga tiene la forma de un paralelepípedo rectangular con lados a, b, c ($a \gg c$, $b \gg c$). La barra se mueve en un campo magnético en dirección del lado a con velocidad v. La inducción del campo magnético es B y perpendicular a la base de la barra con lados a y c (fig. 199). Determinar la intensidad del

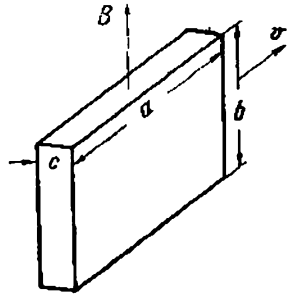


Fig. 199

campo eléctrico en la barra y la densidad de las cargas eléctricas en las superficies laterales del paralelepípedo formadas por los lados a, b.

578. Un cilindro metálico sin carga de radio r gira en un campo magnético con velocidad angular ω en torno a su eje. La inducción del campo magnético está dirigida paralelamente al eje del cilindro. ¿Cuál deberá ser el valor de la inducción del campo magnético a fin de que en el cilindro no surja un campo electrostático?

579. Encontrar la intensidad del campo electrostático en el cilindro (véase el problema 578), si la inducción del campo magnético es igual a B.

580. Un haz de iones de la misma carga alcanza una región del espacio, donde existe un campo eléctrico homogéneo con intensidad $E = 100$ N/C y un campo magnético homogéneo con inducción $B = 0{,}02$ N/(A·m). Los campos eléctrico y magnético están dirigidos perpendicularmente el uno al otro y ambos, perpendicularmente al haz. Los iones pasan por los campos eléctrico y magnético sin desviación y, pasando a través de una abertura, alcanzan una región de campo magné-

tico homogéneo con inducción $B' = 0.09$ N/(A·m) que está dirigida perpendicularmente al movimiento de los iones. Si los iones tienen la forma de una mezcla de masas iguales a 20 y 22 unidades de masa atómica, entonces ¿a qué distancia el uno del otro estos iones se encontrarán, recorriendo la mitad de un círculo?

§ 23. INDUCCION ELECTROMAGNETICA CORRIENTE ALTERNA

581. Un avión de propulsión a chorro, cuya envergadura de las alas es de 20 m, vuela directamente al norte con velocidad 960 km/h y a tal altura, donde la componente vertical de la inducción del campo magnético de la Tierra es $6 \cdot 10^{-5}$ T. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los extremos de las alas? ¿En qué ala el potencial es mayor?

582. Por dos cremalleras metálicas dirigidas se mueve, sin rozamiento y con velocidad constante, un conductor de longitud l y resistencia eléctrica igual a r. Las cremalleras están unidas por un conductor inmóvil de resistencia R. Todos los conductores están distribuidos en un mismo plano y se encuentran en un campo magnético homogéneo de inducción igual a B, dirigida perpendicularmente al plano de los conductores (fig. 200).

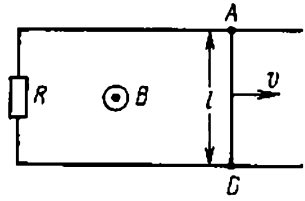


Fig. 200

La resistencia eléctrica de las cremalleras es pequeña con relación con r y R. Determinar la diferencia de potencial del campo eléctrico entre los puntos A y B. Explicar la causa del surgimiento de la corriente eléctrica.

583. Por dos cremalleras verticales AB y CD, unidas por la resistencia R, puede deslizar, sin rozamiento, un

conductor de longitud l y masa m. El sistema se halla en un campo magnético homogéneo de inducción B, dirigida perpendicularmente al plano de la figura

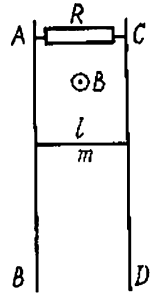


Fig. 201

(fig. 201). ¿Cómo se conducirá el conductor móvil en el campo de la fuerza de gravedad, si se desprecia la resistencia del propio conductor y de las cremalleras?

584. Por dos cremalleras metálicas paralelas, situadas en un plano horizontal y cerradas por un condensador de capacidad C, puede moverse, sin rozamiento, un conductor de masa m y longitud l. Todo el sistema se encuentra en un campo magnético homogéneo de inducción B que está dirigida hacia arriba. En el centro del conductor, perpendicularmente al mismo y paralelamente a las cremalleras, se aplica la fuerza F (fig. 202).

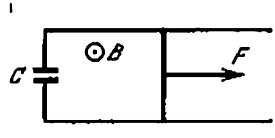


Fig. 202

Determinar la aceleración del conductor móvil, si la resistencia de las cremalleras, de los hilos conductores y del conductor móvil es igual a cero. ¿En cuáles tipos de energía se transforma el trabajo de la fuerza F? Considerar que en el momento inicial la velocidad del conductor es nula.

585. Un cuadro rectangular está situado en el plano de un conductor rectilíneo infinito, por el cual circula una corriente, y los lados AD y BC son paralelos al conductor (fig. 203). En el medio del lado DC está conec-

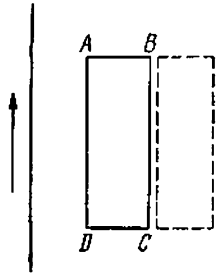


Fig. 203

tado un aparato que mide la cantidad de carga que pasa por el cuadro (en la figura no está representado). El cuadro puede ser colocado en una nueva posición, representada en la fig. 203 por las líneas punteadas, por dos métodos: 1) desplazándola paralelamente a sí misma; 2) girándola en 180° en torno del lado BC. ¿En qué caso será mayor la carga que pasa por el aparato?

586. Una bobina de n espiras fue conectada a un galvanómetro balístico. El área de cada espira es S. (El galvanómetro balístico mide la cantidad de cargas eléctricas que pasan por él.) La resistencia de todo el circuito es R. Inicialmente, la bobina se encuentra entre los polos de un imán, en la región donde el campo magnético es homogéneo y su inducción es B y perpendicular al área de las espiras. Después la bobina fue desplazada para un espacio, donde no existe campo magnético. ¿Cuál es la cantidad de electricidad que pasa por el galvanómetro?

587. Un circuito rectangular $ABCD$ se desplaza, en movimiento de avance, en un campo magnético de una corriente I que pasa por un conductor rectilíneo largo OO'. Los lados AD y BC son paralelos al conductor. Determinar el valor y la dirección de la corriente inducida

en el circuito si éste se desplaza con una velocidad constante v. $AD = BC = a$, $AB = DC = b$. La resistencia del circuito es R (fig. 204).

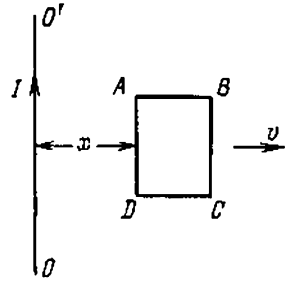


Fig. 204

588. Un anillo de alambre de radio r se encuentra en un campo magnético, cuya inducción es perpendicular al plano del anillo y varía con el tiempo según la ley $B = kt$. Determinar la intensidad del campo eléctrico en la espiral.

589. Un anillo de sección rectangular (fig. 205) fue hecho de un material de resistencia específica ρ. El anillo

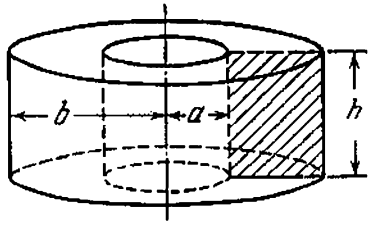


Fig. 205

se encuentra en un campo magnético homogéneo. La inducción del campo magnético está dirigida según el eje del anillo y aumenta proporcionalmente con el tiempo $B = kt$. Encontrar la intensidad de corriente inducida en el anillo.

590. La mitad de un anillo de alambre de radio r tiene resistencia R_1 y la otra mitad, R_2. El anillo se encuentra en

un campo magnético homogéneo, cuya inducción es perpendicular al plano del anillo y varía con el tiempo según la ley $B = B_0 + kt$ (B_0 es una magnitud constante). Hallar la intensidad del campo electrostático en el anillo.

591. Determinar la intensidad de corriente en los conductores del circuito diseñado en la fig. 206, si la induc-

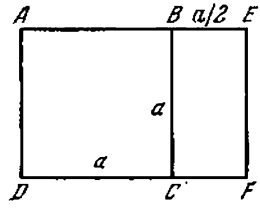


Fig. 206

ción del campo magnético homogéneo es perpendicular al plano del diseño y varía con el tiempo según la ley $B = kt$. La resistencia, por unidad de longitud de los conductores, es igual a

592. En un anillo conductor, circular y uniforme, fue creada una corriente contínua de inducción I. El campo magnético variable, que crea esta corriente, es perpendicular

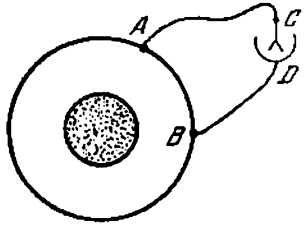


Fig. 207

al plano del anillo y está concentrado en las proximidades de su eje de simetría que pasa a través del centro del anillo (fig. 207). ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los puntos A y B? ¿Qué mostrará un electrómetro conectado a estos puntos?

593. Un campo magnético variable crea en un conductor circular $ADBKA$ una fuerza electromotriz constante $\mathscr{E}$ (véase el problema 592). Las resistencias de los conductores ADB, AKB y ACB (fig. 208) son iguales

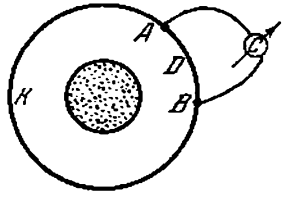


Fig. 208

a R_1, R_2 y R_3, respectivamente. ¿Qué intensidad de la corriente indicará el amperímetro C? El campo magnético está concentrado en el eje del conductor circular.

594. La resistencia del conductor ACB (véase el problema 593) es $R_3 = 0$. Encontrar las intensidades de corrientes I_1, I_2 y I_3 y la diferencia de potencial $U_A - U_B$.

595. Por dos cremalleras metálicas paralelas cerradas por la resistencia R, se mueve un conductor de longitud l. La velocidad del desplazamiento del conductor es

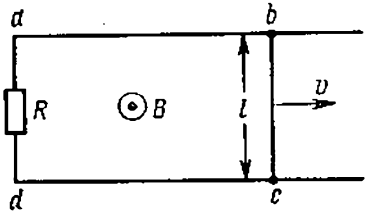


Fig. 209

igual a v. Todo el sistema se encuentra en un campo magnético homogéneo, cuya inducción está dirigida perpendicularmente al plano, en el cual están situadas las cremalleras, y varía con el tiempo según la ley $B = B_0 + kt$. En el momento inicial, el área $abcd$ es igual a S_0. Determinar la intensidad de corriente en el circuito (fig. 209).

596. En un campo magnético homogéneo se halla un anillo de alambre, que es capaz de girar en torno del diámetro, perpendicular a las líneas de inducción magnética. La inducción del campo comienza a crecer. Encontrar las posibles posiciones de equilibrio del anillo e indicar la posición de equilibrio estable. ¿Qué cambiará si la inducción empieza a decrecer?

597. En un cilindro de material no magnético están arrollados N espiras de alambre (solenoide). El radio del cilindro es r y su longitud es l ($r \ll l$). La resistencia del alambre es R. ¿Cuál debe ser la tensión en los extremos del alambre, a fin de que la corriente crezca directamente proporcional al tiempo, o sea, para satisfacer la igualdad $I = kt$?

598. El solenoide (véase el problema 597) está conectado a una batería, cuya f.e.m. es igual a $\mathscr{E}$. En el momento de tiempo $t = 0$ se cierra la llave. ¿Cuál será la intensidad de corriente en el circuito del solenoide, si prescindimos de las resistencias R del solenoide, de la batería y de los hilos conductores?

599. Calcular el trabajo de la batería (véase el problema 598) durante el tiempo τ. ¿En qué tipo de energía se transforma este trabajo?

600. El anillo de un superconductor está situado en un campo magnético homogéneo, cuya inducción crece de cero a B_0. El plano del anillo es perpendicular a las líneas de inducción del campo magnético. Determinar la intensidad de corriente inducida que surge en el anillo. El radio del anillo es r, la inductancia es L.

601. En un campo magnético homogéneo con inducción B se encuentra un anillo superconductor de radio r. Las líneas de la inducción magnética son perpendiculares al plano del anillo. En el anillo no circula corriente. Hallar el flujo magnético que penetra en el anillo después de haber sido desconectado el campo magnético.

602. Delante del polo de un electroimán fue colgado en un hilo largo un anillo superconductor (fig. 210). ¿Qué ocurrirá con el anillo, si por el arrollamiento del electroimán dejamos pasar corriente alterna?

603. De un conductor de longitud l fue hecho un solenoide de longitud l_0. El diámetro del solenoide es $d \ll l_0$. Determinar la inductancia del solenoide.

604. Por un solenoide de 1 m de longitud que posee 2000 espiras de 10 cm de diámetro, pasa una corriente de 1 A.

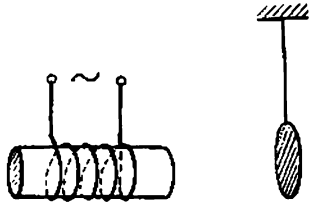


Fig. 210

El solenoide se estira uniformemente con velocidad de 40 cm/s, además la diferencia de potencial aplicada al solenoide varía continuamente de tal modo, que la corriente permanece constante. ¿Cuál será la variación de la diferencia de potencial en el momento, en que el solenoide se extiende el doble? La variación del diámetro del solenoide durante la extensión puede ser despreciada.

605. Un campo magnético, dentro de un solenoide abierto, es homogéneo y su inducción varía con el tiempo según la ley $B = B_0 \cos \omega t$. Determinar la tensión U que surge como consecuencia de ello en los extremos del solenoide. El solenoide tiene N espiras y su radio es igual a r.

606. Un solenoide que tiene N espiras y radio r es conectado en serie a una resistencia óhmica R. El campo magnético dentro del solenoide es homogéneo y la inducción del mismo varía con el tiempo según la ley $B = B_0 \cos \omega t$. Determinar la tensión U_{AB} entre los puntos A y B, y la corriente I en el circuito. (Fig. 211.)

607. A un solenoide fue conectado un condensador de capacidad C y resistencia óhmica R. El solenoide tiene N espiras de radio r. El campo magnético dentro del solenoide es homogéneo y su inducción varía con el

tiempo según la ley $B = B_0 \cos \omega t$. Determinar la tensión U_{AB} entre los puntos A y B, la tensión U_{BC}

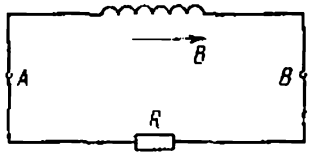


Fig. 211

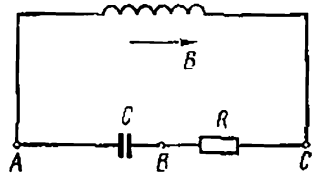


Fig 212

entre B y C, así como la corriente I en el circuito, (fig. 212.)

608. 1) Del medio de una bobina con núcleo de hierro (el arrollamiento es un conductor de cobre grueso con un gran número de espiras) fue hecha una derivación C (fig. 213). Entre los puntos B y C se crea una tensión constante U_1. Encontrar la tensión U_2 entre los puntos A y B.

2) Entre los puntos B y C fue aplicada una tensión alterna (por ejemplo, de la red urbana) con amplitud U_1. Hallar la amplitud U_2 de la tensión alterna entre los puntos A y B.

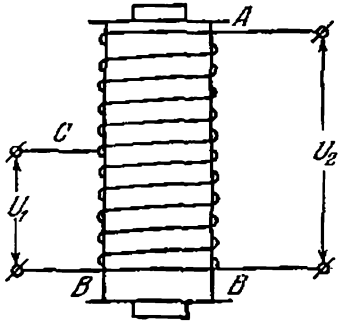


Fig. 213

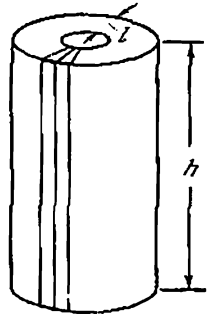


Fig. 214

609. El devanado de un autotransformador regulable está arrollado en un núcleo de hierro que tiene la forma de un toroide rectangular (fig. 214). Para la protección contra las corrientes de Foucault, el núcleo fue construido de placas finas de hierro, aisladas la una de la otra

por una capa de barniz. Esto se puede hacer de diferentes modos: 1) montando el núcleo de anillos finos colocados uno sobre el otro; 2) arrollando una cinta larga que tiene una anchura h; 3) haciéndolo de placas rectangulares de dimensiones $l \times h$, distribuyéndolas a lo largo de los radios de los cilindros.
¿Qué método es el mejor?

610. Por una bobina que no tiene resistencia óhmica pasa una corriente alterna sinusoidal. La inductancia de la bobina es L. Representar gráficamente la variación del producto de la corriente por la tensión (potencia instantánea) en función del tiempo. Explicar el carácter de la curva. ¿Cuál es la potencia media por período, utilizada por la bobina?

611. Encontrar el valor efectivo de la corriente alterna, si ésta varía según la ley:

$$I = I_0 \quad \text{para} \quad 0 < t < \frac{T}{8};$$
$$I = 0 \quad \text{para} \quad \frac{T}{8} < t < \frac{T}{2};$$
$$I = -I_0 \quad \text{para} \quad \frac{T}{2} < t < \frac{5}{8}T;$$
$$I = 0 \quad \text{para} \quad \frac{5}{8}T < t < T;$$
$$I = I_0 \quad \text{para} \quad T < t < \frac{9}{8}T,$$

etc., (fig. 215).

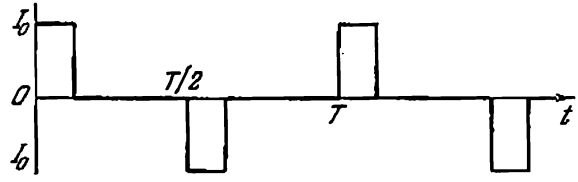


Fig. 215

612. ¿Por qué la presencia de una tensión muy alta en el devanado secundario de un transformador elevador no conduce a grandes pérdidas de energía en el desprendimiento del calor en el propio devanado?

613. ¿Por qué en los circuitos de corriente alterna, que contienen un gran número de aparatos eléctricos de inductancia considerable (por ejemplo, bobinas), los condensadores se conectan en paralelo a estos aparatos?

614. Para determinar la potencia transmitida por una corriente alterna a una bobina, con coeficiente de autoinducción L y resistencia óhmica R_L, a veces se utiliza el método de tres voltímetros que consta en lo siguiente: se conecta una resistencia conocida R y tres voltímetros como muestra la fig. 216. Al medir

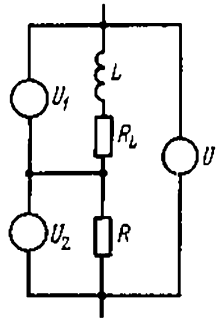


Fig. 216

con ayuda de estos tres voltímetros las tensiones efectivas: U_1, en la bobina; U_2, en la resistencia R y U, entre los terminales de la bobina y la resistencia, se determina la potencia incógnita W. ¿Cuál será esta potencia?

615. En un solenoide largo que tiene N_1 espiras, longitud l y área de la sección S, fue arrollado compactamente, en toda su longitud, un segundo solenoide, que tiene N_2 espiras y la misma sección S. Determinar el coeficiente de inducción mútua de los solenoides. (El coeficiente de inducción mutua L_{12}, de dos circuitos es numéricamente igual al flujo de inducción magnética que atraviesa el segundo circuito, en el caso de pasar por el primero una corriente $I = 1$ A).

616. En un solenoide largo fue arrollado compactamente una bobina. La corriente en el solenoide crece directamente

proporcional al tiempo. ¿Cuál es el carácter de la dependencia de la corriente en la bobina en función del tiempo?

617. Dos anillos superconductores de radio r, se encuentran a una distancia d el uno del otro, además $d \gg r$. Los centros de los anillos están en una recta OO', perpendicular a los planos de ambos anillos. Los anillos pueden desplazarse solamente a lo largo de esta recta.

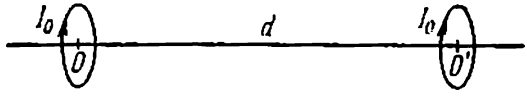


Fig. 217

En el momento inicial por los anillos pasan, en una misma dirección, corrientes del mismo valor I_0. ¿Qué corrientes se establecerán en los anillos después de que éstos se acerquen? (fig. 217).

618. Describir el carácter del movimiento de los anillos del problema 617, si en el momento inicial pasan por ellos corrientes de diferentes intensidades. Analizar solamente las fuerzas de interacción magnética.

619. Demostrar que, al despreciar la corriente de un transformador sin carga y la resistencia óhmica de sus arrollamientos, tiene lugar la relación $I_1/I_2 = N_2/N_1$, donde I_1 e I_2 son las corrientes en los arrollamientos, y N_1 y N_2, los números de espiras en éstos. Los arrollamientos se consideran como bobinas de una misma sección transversal.

620. Sobre un solenoide largo que tiene longitud l, sección S y número de espiras N_1, compactamente, en toda la longitud, se arrolla un segundo solenoide que tiene el número de espiras N_2 y la misma sección S que la primera. Por el primer solenoide pasa la corriente I_1, por el segundo, la corriente I_2. Encontrar la energía del campo magnético de este sistema.

621. ¿Para cuáles tensiones disruptivas deben ser calculados el condensador C y el diodo L, si el rectificador (fig. 218) puede trabajar tanto con la carga como sin ella?

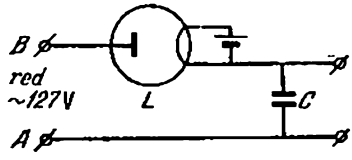


Fig. 218

§ 24. MAQUINAS ELECTRICAS

622. La resistencia de carga en el circuito de un generador de corriente alterna aumentó. ¿Cómo deberá variar la potencia del motor que hace girar el generador, para que la frecuencia de la corriente alterna continúe la misma?

623. A los terminales de un generador, de f.e.m. sinusoidal y *amplitud constante*, se conectan los condensadores C_1 y C_2. La primera vez los condensadores se unen entre sí en paralelo y la segunda vez, en serie. ¿En cuánto deberá variar la frecuencia del generador para que la corriente, que pasa por éste, sea la misma en ambos casos? La resistencia interna del generador puede ser despreciada.

624. La fuerza que actúa sobre una partícula cargada en movimiento, por parte de un campo magnético (fuerza de Lorentz), siempre es perpendicular a la velocidad; por lo tanto esta fuerza no realiza trabajo. ¿Por qué, entonces, trabaja el motor eléctrico? En realidad, la fuerza que actúa sobre un conductor con corriente aparece como resultado de la acción del campo sobre partículas cargadas aisladas, cuyo movimiento forma la corriente.

625. ¿Podrá un motor de conexión en serie de corriente continua, conectado a una red de tensión $U = 120$ V, desarrollar una potencia $W = 200$ vatios, si la resistencia de su devanado es $R = 20\ \Omega$?

626. Un motor de conexión en serie que se alimenta de una fuente de tensión constante, trabaja en un régimen que permite obtener máxima potencia mecánica W. ¿Qué cantidad de calor, por unidad de tiempo, desprenderá el motor, si su eje para (enchaveta)?

627. ¿Qué parámetros de una red determinarán la potencia de un motor eléctrico de corriente continua, conectado a este circuito, en caso de que su devanado sea hecho de un superconductor?

628. Determinar el rendimiento de motores de conexión en serie y shunt, a condición de que la potencia, desarrollada por ellos, sea máxima. La tensión en los terminales es U; las resistencias del devanado del rotor R_1 y del estator R_2 de ambos motores son iguales y se suponen conocidas.

629. ¿Por qué un motor de conexión en serie, conectado a un circuito sin carga, «se acelera», o sea, su rotor adquiere una velocidad que amenaza a la resistencia mecánica del motor?

630. El rotor de un modelo de motor de corriente continua está constituido de una espira en forma rectangular. La inducción del campo magnético B, creada por un imán permanente (a la izquierda está el norte, a la

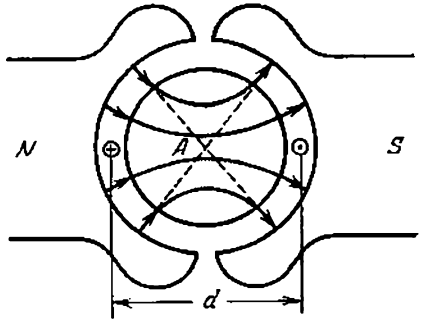


Fig. 219

derecha, el sur), está dirigida según el radio, puesto que el espacio entre los terminales polares y el cilindro de hierro A es muy pequeño (fig. 219). A la espira que tiene área S y resistencia R, fue aplicada una dife-

rencia de potencial U. Determinar la potencia del motor como función de la velocidad angular ω. ¿Para qué velocidad angular la potencia será máxima? ¿Cuál será, en este caso, la intensidad de corriente?

631. Valiéndose de la condición del problema anterior, determinar la dependencia del momento giratorio M respecto a la velocidad angular.

632. Determinar el carácter de la dependencia entre la potencia de un modelo de motor de corriente continua (véase el problema 630) y la inducción del campo magnético B para un número prefijado de rotaciones. ¿Para cuál valor de B la potencia será máxima?

633. Determinar la inducción del campo magnético en el modelo de un motor de corriente continua (véase el problema 630), en el cual el momento giratorio M es máximo. El número de rotaciones del inducido es conocido.

634. Un motor eléctrico shunt de corriente continua, que tiene una tensión $U = 120$ V aplicada en los terminales, desarrolla una potencia mecánica $W = 160$ W. El número de rotaciones por segundo del inducido del motor es $n = 10$ rps. Determinar el número de rotaciones, máximo posible, del motor para la tensión dada. La resistencia del inducido es $R = 20\ \Omega$.

635. Un motor shunt de corriente continua, teniendo en los terminales una tensión $U = 120$ V, posee una velocidad angular de rotación del inducido $\omega = 100$ rad/s. La resistencia del devanado del inducido es $R = 20\ \Omega$. ¿Cuál será la fuerza electromotriz que alcanza este motor en función de generador, si gira con la misma velocidad angular? La tensión en el devanado del estator se mantiene constante y es igual a 120 V. El momento mecánico inicial en el eje del motor para la velocidad indicada es $M = 1{,}6$ N·m.

636. ¿Cómo variará la velocidad de rotación de un motor shunt al aumentar la intensidad de corriente en el devanado del estator, si la tensión U en el inducido y el momento mecánico M aplicado al eje del inducido permanecen constantes?

637. Demostrar que si los valores de las inducciones de los campos magnéticos, creados por tres pares de imanes eléctricos, son iguales en amplitud y desfasados en $2\pi/3$ (fig. 220) el campo magnético resultante puede

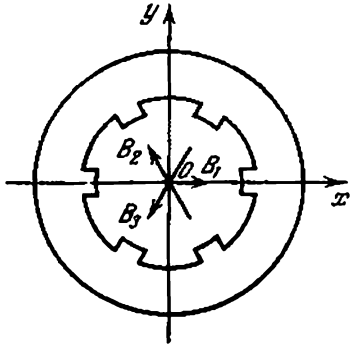


Fig. 220

ser representado por un vector que gira con velocidad angular constante ω en torno del punto O. Cada par de imanes eléctricos crea campos magnéticos, que tienen la dirección de los diámetros correspondientes del anillo: B_1, B_2, B_3. Los imanes eléctricos se alimentan por corriente alterna de frecuencia ω.

638. Un campo magnético de inducción B gira en el plano del diseño con velocidad angular ω. En este campo se encuentra un cuadro de lados iguales a a y b. La resis-

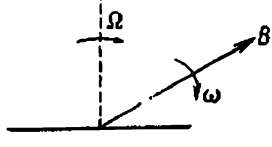


Fig. 221

tencia óhmica del cuadro es R. La normal al plano del cuadro gira en el plano del diseño con velocidad angular Ω. Encontrar la intensidad de la corriente inducida en el cuadro (fig. 221).

639. Hallar el momento de las fuerzas aplicadas al cuadro, descrito en el problema 638.

Capítulo IV

Oscilaciones y ondas

§ 25. OSCILACIONES MECANICAS

640. Una tabla se encuentra sobre un cilindro circular fijo de radio R, como muestra la fig. 222. El grosor de la tabla es h. Encontrar las condiciones según las cuales,

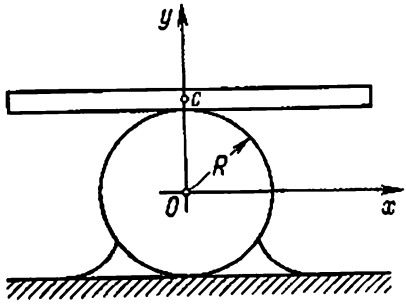


Fig. 222

después de una desviación en un pequeño ángulo de la horizontal, la tabla oscilará en la proximidad de la posición de equilibrio. No hay deslizamiento.

641. Determinar con precisión hasta un coeficiente adimensional el período de oscilaciones de un cuerpo de masa m, sujetado a un muelle con coeficiente de rigidez k.

642. Demostrar que el período de oscilaciones de un péndulo simple aumenta con el crecimiento del ángulo máximo de desviación con relación a la posición de equilibrio.

643. Partiendo de los conceptos dimensionales, determinar el período de oscilaciones de un péndulo simple.

644. Dos vigas de masas m_1 y m_2 están unidas por un muelle de rigidez k. El muelle está comprimido con ayuda

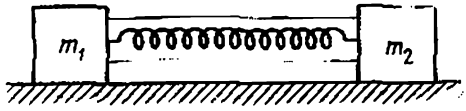


Fig. 223

de dos hilos, como muestra la fig. 223. Los hilos se queman. Determinar el período de oscilaciones de las vigas.

645. Dos pesos con masas m_1 y m_2 están unidos por un muelle con coeficiente de rigidez k. Inicialmente el muelle está comprimido en una magnitud x de modo, que el

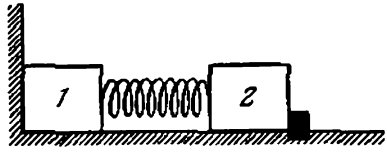


Fig. 224

primer peso se encuentra apretado contra la pared (fig. 224) y el segundo peso se mantiene por un tope. ¿Cómo se moverán los pesos si eliminamos el tope?

646. ¿Cómo variará el período de oscilaciones verticales de un peso, colgado por dos muelles iguales, si sustituimos la unión en serie de los muelles por una unión en paralelo?

647. Dos péndulos simples de longitud l cada uno están unidos por un muelle imponderable, como muestra la fig. 225. El coeficiente de elasticidad del muelle es igual a k. En equilibrio, los péndulos están en posi-

ción vertical y el muelle no se deforma. Determinar la frecuencia de las pequeñas oscilaciones de dos péndulos unidos en dos casos: cuando los péndulos se des-

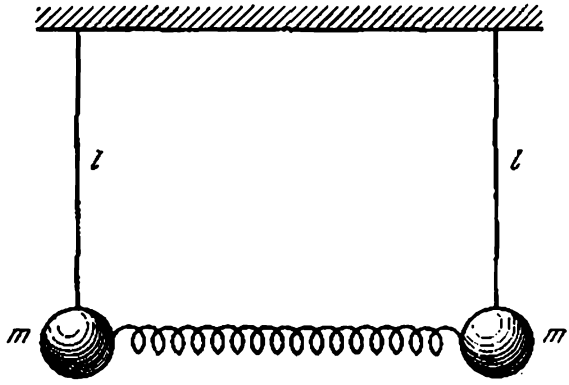


Fig. 225

vían a un lado en ángulos iguales (oscilaciones en fase) y para lados opuestos (oscilaciones en antifase).

648. Un peso, colgado en un hilo largo, puede realizar oscilaciones en un plano vertical, inclinándose en un ángulo α con relación a la vertical (péndulo simple). Este mismo peso puede girar por una circunferencia describiendo un cono (péndulo cónico). ¿En qué caso la tensión del hilo, inclinado en el ángulo α respecto a la vertical, será mayor?

649. Un reloj de péndulo funciona con precisión en la superficie de la tierra. ¿En qué caso atrasará este reloj en 24 horas: si lo elevamos a una altura de 200 m o si lo metemos en un pozo de profundidad de 200 m?

650. En los extremos de una barra imponderable de longitud $d = 1$ m, están sujetadas dos pequeñas esferas de masas $m = 1$ g. La barra está colgada, por medio de una articulación, del modo que puede girar sin rozamiento, junto a su eje vertical, el cual pasa por el medio de ésta. Dos esferas grandes con masas $M = 20$ kg están sujetadas en la misma recta que la barra. La distancia

entre los centros de las esferas grande y pequeña es $L = 16$ cm (fig. 226) Calcular el período de las osci-

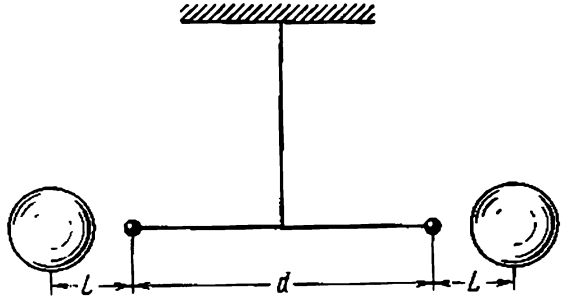


Fig. 226

laciones pequeñas circunscritas por el péndulo giratorio.

651. ¿Cuál es el período de oscilaciones de un péndulo simple que se encuentra en un vagón que se mueve horizontalmente con aceleración a?

652. Determinar el período de oscilaciones de un péndulo en un ascensor que se mueve verticalmente con aceleración a dirigida hacia arriba.

653. Resolver el problema anterior en el caso en que la aceleración a está dirigida hacia abajo.

654. Un cubo pequeño realiza pequeñas oscilaciones en un plano vertical, moviéndose sin rozamiento por la superficie interna de una taza esférica. Determinar el período de oscilaciones del cubo, si el radio interno de la taza es R, y la arista del cubo es mucho menor que R.

655. ¿Cómo variará el período de oscilaciones de un cubo pequeño en una taza (véase las condiciones del problema 654), si sobre la taza, además de la fuerza de gravedad, actúa también la fuerza F, dirigida verticalmente hacia arriba? La masa de la taza M es mucho mayor que la masa m del cubo.

656. ¿Cómo variará el período de oscilaciones de un cubo en una taza (véase el problema 654), si la taza está situa-

da en una superficie horizontal lisa por la cual ella puede moverse sin rozamiento?

657. Un aro de masa m y radio r puede girar, sin deslizamiento, por la superficie interna de un cilindro de radio R (fig. 227). Determinar el período de oscilaciones del aro, considerando el ángulo φ pequeño.

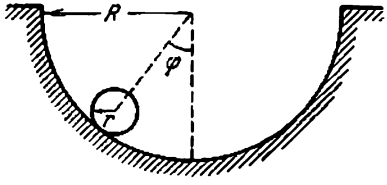


Fig. 227

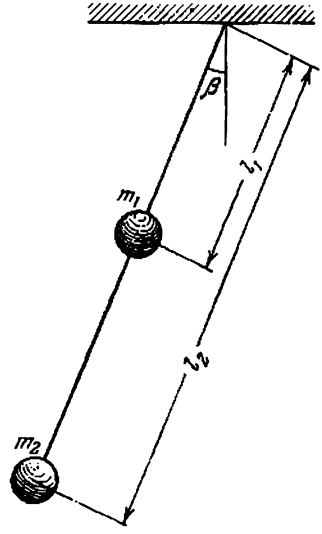


Fig. 228

658. Encontrar el período de oscilaciones del péndulo representado en la fig. 228. La barra, en la cual están instaladas las masas m_1 y m_2, debe considerarse imponderable.

659. Determinar el período de oscilaciones de un péndulo, constituido de un semianillo fino y homogéneo, de radio r, colgado por los hilos imponderables OA y OB, como muestra la fig. 229.

660. En la fig. 230 está representado un sistema mecánico, constituido de un peso de masa m, del muelle A con coeficiente de elasticidad k y de la polea de masa M.

El peso, mediante un hilo que se apoya sobre la polea, está unido al muelle. Hallar el período de oscilaciones del peso, si la polea tiene la forma de un cilindro de paredes delgadas.

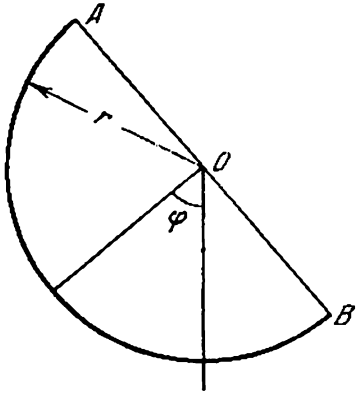


Fig. 229

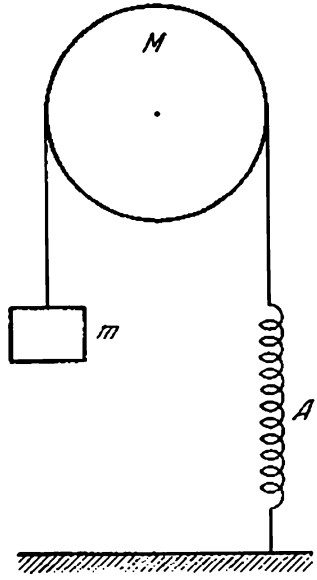


Fig. 230

661. ¿Con qué frecuencia oscilará una vara de masa $m = 2$ kg y área de la sección transversal $S = 5$ cm², que flota en la superficie del agua en posición vertical? (Tomar en consideración que el período de oscilaciones del peso en el muelle se da por la expresión: $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, donde k es el coeficiente de elasticidad del muelle).

662. En vasos cilíndricos comunicantes fue echado mercurio. Determinar el período de oscilaciones del mercurio, si el área de la sección transversal de cada vaso es $S = 0{,}3$ cm², la masa del mercurio es $m = 484$ g. La densidad del mercurio es $\rho = 13{,}6$ g/cm³.

663. Supongamos la existencia de una mina que penetra en la tierra por uno de sus diámetros. ¿Después de cuánto tiempo un cuerpo, lanzado en esta mina, alcan-

zará el centro de la tierra? No hay resistencia al movimiento.

664. Una cuerda, fijada en los extremos, está extendida con la fuerza f. En el medio de la cuerda está sujetado un peso pequeño de masa m (fig. 231). Determinar el

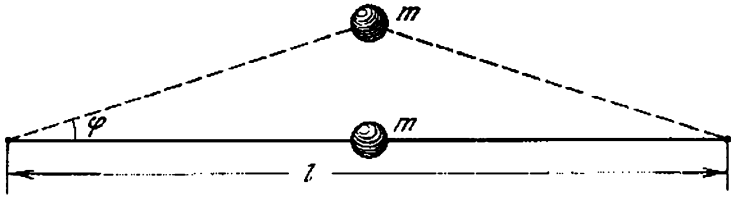


Fig. 231

período de las oscilaciones pequeñas del peso sujetado. (Despreciar la masa de la cuerda y no tener en cuenta la fuerza de gravedad).

665. Dos pesos iguales, de masa m, están unidos por muelles como muestra la fig. 232 y situados en una superficie absolutamente lisa y horizontal. Los muelles

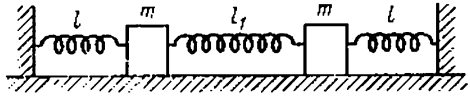


Fig. 232

están extendidos por una fuerza F. Los pesos se desplazan en dirección perpendicular a la longitud de los muelles, en una misma distancia pequeña e igual a x a una parte de la posición de equilibrio (fig. 233, *a*). Determinar el período de oscilaciones de los pesos.

666. Los pesos de masa m están unidos por medio de muelles como muestra la fig. 232 y situados en una mesa absolutamente horizontal y lisa. Los muelles se extiran por una fuerza F. Los pesos se desplazan a una misma distancia pequeña x, en dirección perpendicular a la longitud de los muelles, para los lados opuestos de la posición de equilibrio y luego se sueltan (fig. 233, *b*). Determinar el período de oscilasiones de los pesos.

667. Para mantener en equilibrio una puerta abierta en una estación del Metropolitano (la puerta se abre para ambos lados y vuelve a la posición de equilibrio por medio de muelles), es necesario aplicar al tirador de puerta

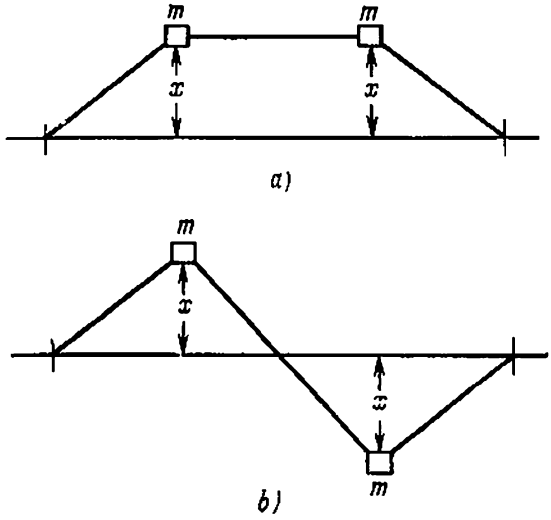


Fig. 233

una fuerza de 50 N. ¿Sería posible abrir la puerta con una fuerza de 1 N, aplicada al mismo tirador? El rozamiento en las bisagras de la puerta puede ser despreciado.

668. A una polea imponderable de radio r está unida rígidamente una barra que carece de peso y es de longitud l En el extremo de la barra se encuentra un cuerpo de masa m (fig. 234). En la polea se arrolla un hilo, al extremo libre del cual fue colgada una carga de masa M. ¿En qué condiciones el movimiento del sistema tendrá un carácter oscilatorio, si en el momento inicial el ángulo α entre la barra y la vertical es igual a cero?

669. Determinar la relación de las frecuencias de las oscilaciones para tres moléculas: de hidrógeno, deuterio y tritio.

Observación. La posición de equilibrio de dos protones en la molécula posee una determinada distancia entre ellos. Si estos dos protones se aproximan o se alejan de la posición de equilibrio surge una fuerza

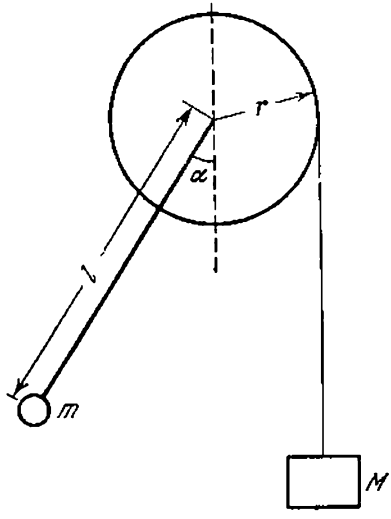


Fig. 234

que los hace volver a la posición de equilibrio. Esta fuerza es proporcional al valor de la desviación.

670. Encontrar las frecuencias de las oscilaciones longitudinales de una cadena lineal infinita de átomos iguales. En la posición de equilibrio la distancia entre los átomos es igual a a. La masa de cada átomo es m. El coeficiente de rigidez de acoplamiento entre los átomos es k.

§ 26. OSCILACIONES ELECTRICAS

671. ¿Para qué en un auricular telefónico es necesario tener un imán permanente? ¿Por qué la intensidad del campo magnético de este imán debe ser mayor que la intensidad máxima del campo magnético creado por la

corriente que pasa por el devanado de la bobina del aparato telefónico?

672. Encontrar la frecuencia de las oscilaciones propias en un circuito, constituido por un solenoide de longitud $l = 15$ cm, de área de la sección transversal $S_1 = 1$ cm^2, y un condensador plano, cuyas placas tienen área $S_2 = 6$ cm^2, siendo la distancia entre ellas $d = 0{,}1$ cm. El número de espiras del solenoide es $N = 1000$.

673. Un circuito eléctrico consta de un condensador de capacidad constante y una bobina, en la cual se puede introducir un núcleo. Un núcleo está prensado del polvo de un compuesto de hierro magnético (ferrita) y es aislante. El otro núcleo fue hecho de cobre. ¿Cómo cambiará la frecuencia de las oscilaciones propias del circuito, si introducimos en la bobina: 1) ¿el núcleo de cobre? 2) ¿el núcleo de ferrita?

674. ¿Qué pasará, si unimos, a través de un superconductor, un condensador cargado con un condensador del mismo tipo pero sin carga?

675. A las placas de desviación verticales de un oscilógrafo se aplica una tensión $V_1 = V_{10} \cos \omega t$ y a las placas de desviación horizontales, una tensión $V_2 = V_{20} \cos \times (\omega t - \varphi)$. Encontrar la trayectoria de un rayo electrónico en la pantalla del oscilógrafo, si las diferencias de fase entre las tensiones en las placas son $\varphi_1 = \pi/2$ y $\varphi_2 = \pi$.

676. En la fig. 235 está representado un circuito constituido por una batería E, una lámpara de neón N, un conden-

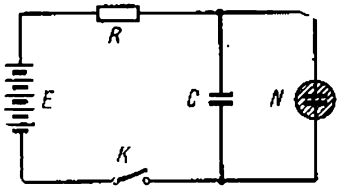


Fig. 235

sador C y una resistencia R. La característica de la lámpara de neón (dependencia de la corriente en la lámpara con relación a la tensión) tiene la forma que

vemos en la fig. 236. Para tensiones pequeñas la corriente no pasa por la lámpara. Cuando el potencial en la lámpara alcanza la magnitud V_{enc} (potencial del encendido), la lámpara se enciende, la corriente alcanza, de un salto, la magnitud final I_{enc} y, posteriormente, crece proporcionalmente a V. Al disminuir la tensión, la caída de la corriente transcurre con

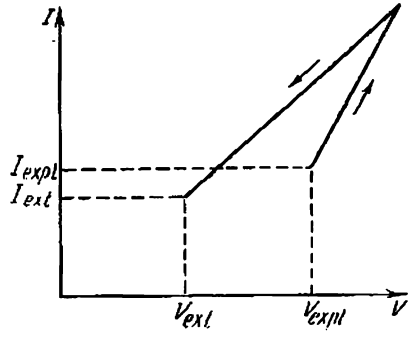


Fig. 236

más lentitud que su aumento. La lámpara se apaga alcanzando el potencial de extinción V_{ext}. Representar gráficamente la dependencia aproximada de la variación de la tensión, en el condensador, en función del tiempo, cuando la llave K se cierra.

677. ¿Cómo cambiará el período de las oscilaciones de relajación en el circuito de una lámpara de neón (véase el problema 676) con la variación de la capacidad del condensador C y de la resistencia R?

678. Un condensador plano que forma parte de un circuito oscilatorio está hecho de modo que sus placas pueden desplazarse las unas respecto a las otras. ¿De qué manera, por medio del movimiento de las placas, puede realizarse la amplificación paramétrica del circuito?

§ 27. ONDAS

679. Valiéndose de conceptos dimensionales, determinar la velocidad de propagación de ondas en la superficie de un líquido, teniendo en consideración solamente la

fuerza de la gravedad (ondas largas de gravitación). Se supone que la profundidad del líquido en el recipiente es $H \gg \lambda$ y la amplitud de las oscilaciones de las partículas en la onda es $a \ll \lambda$ (λ es la longitud de onda).

680. Partiendo de conceptos dimensionales, determinar la velocidad de propagación de ondas en la superficie de un líquido, considerando solamente las fuerzas de capilaridad (ondas de pequeña longitud). Se supone que la profundidad del líquido en el recipiente es $H \gg \lambda$ y la amplitud de las oscilaciones de las partículas en la onda es $a \ll \lambda$ (λ es la longitud de onda). La densidad del líquido es ρ.

681. En la fig. 237 está representada la sección transversal de un recipiente infinitamente grande con un líquido.

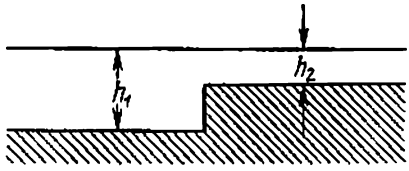


Fig. 237

A la izquierda del medio, que tiene una profundidad h_1, y bajo un ángulo φ_1 con relación a la superficie de separación, se mueve una onda plana, cuya longitud es $\lambda \gg h_1$. ¿Qué ángulo con la superficie de separación formará esta onda al propagarse en el medio, cuya profundidad del líquido es h_2? Se sabe que la velocidad de propagación de ondas largas de gravitación en un recipiente infinitamente grande es igual a $c = k\sqrt{gh}$, donde k es un factor constante de proporcionalidad y h es la profundidad del recipiente.

682. Valiéndose de conceptos dimensionales, determinar con precisión hasta un coeficiente adimensional la velocidad de propagación de ondas longitudinales en un medio elástico de densidad ρ, cuyo módulo de elasticidad es E.

683. Una cuerda fina fue sustituida por otra del mismo material, pero que tiene el diámetro dos veces mayor. ¿En cuántas veces deberá ser aumentada la tensión de la cuerda para que la frecuencia de oscilaciones de ésta no cambie?

684. Encontrar las frecuencias propias de las oscilaciones de una cuerda de acero de longitud $l = 50$ cm y de diámetro $d = 1$ mm, si la tensión de la cuerda es $T = 0{,}1$ N. La densidad del acero es $\rho = 7{,}8$ g/cm^3.

685. Hallar las frecuencias propias de las oscilaciones de una columna de aire en un tubo cerrado por ambos extremos, cuya longitud es $l = 3{,}4$ m.

686. Sobre un recipiente cilíndrico de 1 m de altura suena un diapasón que tiene una frecuencia propia de oscilación $\nu = 340$ Hz. El recipiente se llena lentamente del agua. ¿En qué posiciones del nivel del agua en el recipiente el sonido del diapasón aumenta considerablemente?

687. ¿Qué forma tiene el frente de onda de choque que surge en el aire, en consecuencia del movimiento de una bala con velocidad superior a la velocidad del sonido?

688. Un avión de retropropulsión a chorro vuela con velocidad de 500 m/s a una distancia de 6 km de un hombre. ¿A qué distancia del hombre estaba el avión, cuando el hombre oyó su ruido?

689. Se sabe que si una fuente sonora y un hombre se encuentran, por ejemplo, a una altura más o menos igual entonces, en la dirección del viento el sonido se oye mejor que en sentido contrario. ¿Cómo se explica este fenómeno?

690. ¿Por qué la recepción estable de una transmisión de televisión es posible solamente dentro de los límites de la visibilidad directa?

691. Un radar funciona en régimen de impulsos. La frecuencia de repetición de los impulsos es $f = 1700$ Hz, la duración de impulso es $\tau = 0{,}8$ μs. Hallar el alcance máximo y mínimo de detección, donde se encuentra el objetivo detectado por este radar.

692. La antena de un televisor (punto C en la fig. 238), además de la onda que llega directamente de la estación transmisora (punto A), capta la onda reflejada del techo de hierro de un edificio (punto B). Como resultado de ello, la imagen se duplica. ¿En cuántos centímetros se desplazan las imágenes, la una respecto a la

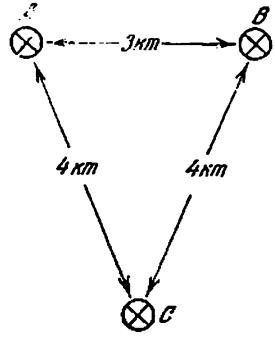


Fig. 238

otra, si la antena y el techo del edificio se encuentran a las distancias, indicadas en la fig. 238? La anchura de la pantalla del televisor es $l = 50$ cm. (Tener en cuenta que la imagen en el televisor está dividida en 625 líneas y se transmiten 25 imágenes por segundo).

693. Un dipolo que tiene longitud $l = 0{,}5$ m, fue sumergido en un recipiente con keroseno ($\varepsilon = 2$). ¿Cuál es (después de la salida del recipiente), la longitud de una onda electromagnética en el vacío irradiada por el dipolo dado?

Capítulo V

Optica geométrica

§ 28. FOTOMETRIA

694. Una sala circular de diámetro $D = 30$ m, está alumbrada por una lámpara colgada en el centro del techo. Determinar la altura h de la sala, sabiendo que la iluminación mínima de la pared de la sala es dos veces mayor que la iluminación más débil del piso.

695. A una altura $H = 2$ m, sobre el centro de una mesa circular de diámetro $D = 3$ m, está colgada una lámpara de $I_1 = 100$ candelas.*) Esta lámpara fue sustituida por otra de $I_2 = 25$ candelas, en tanto que cambiando la distancia hasta la mesa de modo, que la iluminación del centro de la mesa quedó igual. ¿Cómo cambiará la iluminación del borde de la mesa?

696. En los vértices de un triáng ulo rectángulo isósceles se encuentran las fuentes de luz S_1 y S_2 de igual intensi-

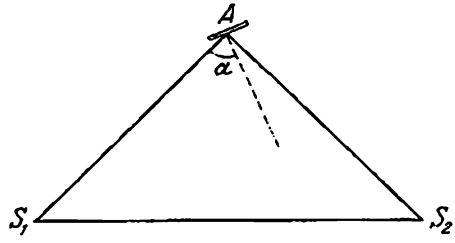


Fig. 239

dad (fig. 239). ¿Cómo debe ser instalada una pequeña placa A, para que su iluminación sea máxima? Los lados del triángulo son $AS_1 = AS_2 = a$.

*) Candela es la unidad de intensidad de luz equivalente a una bujía (vela), la cual es mucho más conocida en la práctica (*Nota del Trad.*).

697. Al determinar la intensidad luminosa de cierta fuente, el intento de utilizar un fotómetro no tuvo éxito, ya que la intensidad luminosa era muy grande y no fue posible igualar la iluminación de los campos del fotómetro con ayuda de una fuente estándar, incluso colocando la fuente examinable en el extremo de un banco óptico. Entonces se utilizó una tercera fuente, cuya intensidad era menor que la de la sometida a examen. La fuente estándar, permaneciendo a una distanaia de $r_1 = 10$ cm del fotómetro, proporcionaba la misma iluminación de los campos del fotómetro que la tercera fuente, mientras que esta última se hallaba a una distancia de $r_2 = 50$ cm. Luego la fuente estándar fue sustituida por la sujeta a examen y se obtuvo una igualdad de iluminación para las distancias del fotómetro $r_3 = 40$ cm (fuente examinable) y $r_4 = 10$ cm (fuente auxiliar). Determinar en cuántas veces la intensidad luminosa de la fuente sometida a exámen es mayor que la de la fuente estándar.

698. Una lámpara, cuya intensidad luminosa es $I = 100$ candelas, está colgada en el techo de un cuarto. Determinar el flujo luminoso total que llega a todas las paredes y al suelo de la habitación.

699. En el eje de un cilindro hueco de radio R_1 fue instalado un filamento incandescente, cuya longitud es mucho mayor que la altura del cilindro. ¿En cuántas veces cambiará la iluminación de la superficie interna del cilindro, si su radio se hace igual a R_2 ($R_2 < R_1$)?

700. ¿A qué altura sobre el centro de una mesa circular es necesario instalar una lámpara para obtener la máxima iluminación en los bordes de la mesa?

701. ¿Por qué podemos leer un texto a través de un papel de seda, solamente en aquel caso si ponemos e papel directamente sobre la página del libro?

§ 29. LEYES FUNDAMENTALES DE LA OPTICA

702. ¿Por qué la sombra de las piernas en la tierra tiene un contorno neto, y la de la cabeza es más difusa? ¿En qué condiciones la sombra de todas las partes se verá bien?

703. ¿Cómo debe sostenerse un lápiz sobre la mesa con el fin de obtener una sombra bien ostensible, si la fuente luminosa es una lámpara de luz diurna en forma de un tubo largo, colgada en el techo?

704. En el otoño, cuando los árboles pierden su follaje, con frecuencia se puede ver la sombra de dos ramas paralelas. La inferior proyecta una sombra oscura, bien visible y la superior, una sombra más ancha y clara.

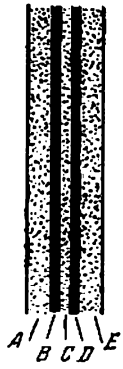


Fig. 240

Si ambas sombras se sobreponen casualmente, vemos una franja clara, luminosa en el medio de la sombra más oscura, de tal modo que esta sombra parece como si fuera doble (fig. 240). ¿Cómo explicar este fenómeno? (Minnart «Luz y color en la naturaleza».)

705. Los rayos solares, pasando a través de un pequeño orificio entre el follaje de la cima de un árbol alto, proyectan en la tierra una sombra en forma de elipse. Los ejes mayor y menor del elipse son iguales a $a = 12$ cm y $b = 10$ cm, respectivamente. ¿Cuál es la altura H del árbol? Las dimensiones angulares del disco solar $\beta = 1/108$ rad.

706. ¿Cuál debe ser la altura mínima de un espejo plano, sujeto verticalmente en una pared, para que un hombre pueda verse su imagen sin mover la cabeza? ¿A qué distancia del suelo debe encontrarse el borde inferior del espejo?

707. Los rayos solares, reflejándose de un espejo colocado horizontalmente, caen sobre una pantalla puesta verticalmente. En el espejo se encuentra un objeto alar-

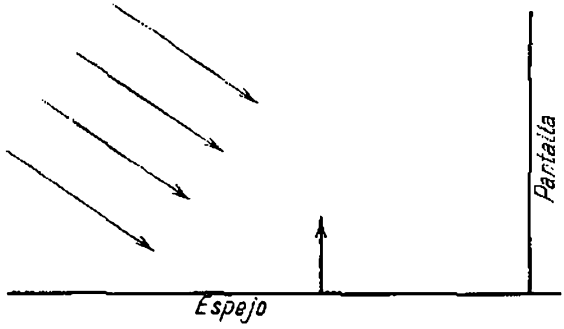


Fig. 241

gado (fig. 241). Describir el carácter de la sombra en la pantalla.

708. ¿Para qué condiciones la forma de la reflexión solar de un espejo pequeño no dependerá de la forma del espejo?

709. ¿Cómo dist nguir en una fotografía un paisaje real de su reflexión en el agua tranquila?

710. Encontrar gráficamente para qué posiciones del ojo, el observador puede ver en un espejo, de dimensiones

Fig. 242

finitas, la imagen de un segmento de recta, situado con relación al espejo de manera, como muestra la fi . 242.

711. Un espejo plano se coloca paralelamente a una pared, a una distancia l de ésta. La luz provocada por una fuente puntual, sujetada en la pared, cae sobre el espejo y, reflejándose, forma en la pared una imagen. ¿Con qué

velocidad se moverá la imagen por la pared, si aproximamos el espejo a ésta con velocidad v? ¿Cómo cambiarán las dimensiones de la imagen?

712. Aprovechando las condiciones del problema 711, determinar si cambiará la iluminación de la pared en el lugar, donde se encuentra la imagen, al moverse el espejo. Considerar las dimensiones del espejo mucho menores que la distancia entre el espejo y la fuente luminosa.

713. Un espejo plano gira con una velocidad angular constante. El número de rotaciones por segundo es $n = 0{,}5$. ¿Con qué velocidad se desplazará una imagen por una pantalla esférica de radio igual a 10 m, si el espejo se encuentra en el centro de curvatura de la pantalla?

714. Las experiencias de A.A. Belopolski acerca de la investigación experimental del efecto óptico Doppler, consistían en la observación de la luz reflejada repetida-

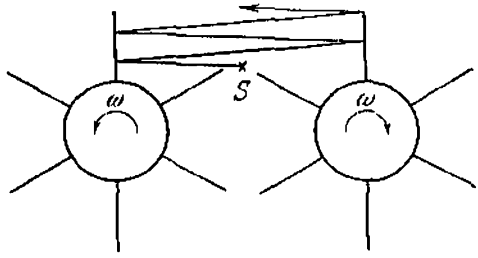


Fig. 243

mento de los espejos en movimiento (fig. 243). Los espejos fueron instalados en discos que giraban en sentidos opuestos.

1) Conociendo la velocidad angular ω de rotación de los discos, encontrar la velocidad angular Ω de rotación del rayo que sufre n reflexiones sucesivas de los espejos.

2) Encontrar la velocidad lineal de la enésima imagen en el momento, en que los espejos están paralelos el uno al otro y se mueven sus partes reflectores con velocidad v en sentidos opuestos.

715. Resolver el problema 714 para las condiciones en que los discos giran en el mismo sentido.

716. Un haz fino de luz S incide en un ángulo diedro $\alpha = 60°$ formado por espejos planos iguales OM y ON, sujetados en el eje O (fig. 244). Después de reflejarse en los

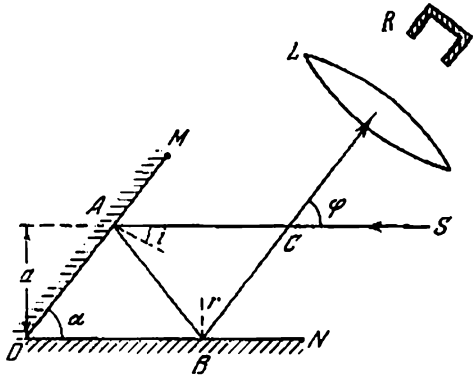


Fig. 244

espejos, la luz se enfoca por una lente L y cae sobre un receptor fijo R. Los espejos giran con una velocidad angular constante.
¿Qué parte de la energía luminosa del haz, en un espacio de tiempo mucho mayor que el período de rotación, alcanzará el receptor, si el haz pasa a una distancia a del eje, igual a la mitad de la longitud del espejo OM?

717. ¿Podría utilizarse un espejo plano en vez de una pantalla común para proyecciones de las películas?

718. Dos espejos planos AO y OB forman un ángulo diedro $\varphi = 2\pi/n$, donde n es un número entero. Una fuente puntual S se encuentra entre los espejos a una misma distancia de cada uno de ellos. Hallar el número de imágenes de la fuente en los espejos.

719. Dos espejos planos AO y OB forman un ángulo diedro arbitrario $\varphi = 2\pi/a$, donde a es un número cualquiera mayor que 2. Una fuente puntual S se encuentra entre los espejos a igual distancia de cada uno de ellos. Hallar el número de imágenes de la fuente en los espejos.

720. ¿En qué dirección es necesario dirigir un rayo de luz del punto A (fig. 245), que se encuentra dentro de una caja de espejos, para que éste caiga en el punto B,

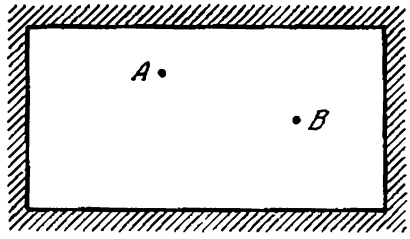


Fig. 245

reflejándose una sola vez de todas las cuatro paredes? Los puntos A y B están en un mismo plano, perpendicular a las paredes de la caja (o sea, en plano de la figura).

721. ¿Por qué, si desde un avión que vuela sobre el mar miramos hacia abajo, tenemos la impresión de que el agua es mucho más oscura directamente abajo de que en el horizonte?

722. ¿A qué distancia se desplazará un rayo que pasa a través de una placa plano-paralela, si su espesor es d, el índice de refracción es n y el ángulo de incidencia del rayo es i? ¿Podrá ser el desplazamiento del rayo mayor que el espesor de la placa?

723. ¿Para qué valores del índice de refracción de un prisma rectangular es posible la trayectoria del rayo representada en la fig. 246? La sección del prisma es un triángulo isósceles; el rayo incide normalmente en la cara AB.

724. Una cuña de vidrio rectangular fue puesta en el agua. El índice de refracción del vidrio es $n_1 = 1{,}5$. ¿Para qué valores del ángulo α (fig. 247) el rayo de luz, incidiendo normalmente en la cara AB, alcanza totalmente la cara AC?

725. En días solares y claros en estradas asfaltadas, distantes de las ciudades, los chóferes frecuentemente ven el

siguiente cuadro: unas partes del asfalto, situadas delante del automóvil a una distancia de 80 a 100 m, parecen estar cubiertas de agua. Cuando el chófer se

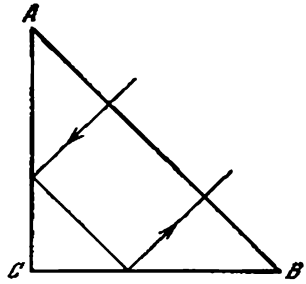


Fig. 246

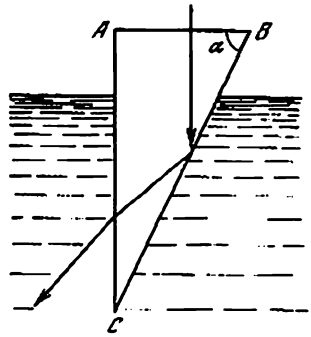


Fig. 247

aproxima al lugar, el agua desaparece y surge nuevamente adelante, en otros lugares, aproximadamente a la misma distancia. ¿Cómo explicar este fenómeno?

726. Una placa gruesa está hecha de un material transparente, cuyo índice de refracción cambia en la cara superior donde es n_1 hasta n_2 en la cara inferior. El rayo entra en la placa bajo un ángulo α. ¿Bajo qué ángulo el rayo saldrá de la placa?

727. Un recipiente cúbico, con paredes opacas, fue colocado de tal modo, que el ojo de un observador no ve su fondo,

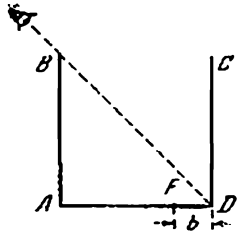


Fig. 248

pero ve toda la pared CD (fig. 248). ¿Qué cantidad de agua necesita verterse en el recipiente para que el

observador puede ver un objeto F que se encuentra a una distancia $b = 10$ cm del ángulo D? La arista del cubo $a = 40$ cm.

728. La sección de un prisma de vidrio tiene la forma de un triángulo equilátero. Un rayo cae sobre una de las caras del prisma perpendicularmente a ella. Encontrar el ángulo φ entre los rayos incidente y refractado por por el prisma. El índice de refracción del vidrio es $n = 1{,}5$.

729. La sección de un prisma de vidrio tiene la forma de un triángulo isósceles. Una de sus caras está cubierta de plata. Un rayo incide normalmente en la cara no cubierta de plata y después de dos reflexiones, él sale por la base del prisma, perpendicularmente a ésta. Encontrar los ángulos del prisma.

730. Un rayo incide en la cara del prisma y sale de él por una cara adyacente, después de la refracción. ¿Cuál es el máximo valor admisible del ángulo de refracción α del prisma, si el prisma fue hecho de vidrio con un índice de refracción $n = 1{,}5$?

731. Un rayo luminoso penetra en un prisma de vidrio bajo el ángulo α y sale del prisma para el aire bajo el ángulo β; al pasar por el prisma, sufre un desplazamiento de la dirección inicial en un ángulo γ. Determinar el ángulo de refracción del prisma φ y el índice de refracción del material de que está fabricado.

732. Los lados de un prisma $ABCD$, hecho de vidrio con índice de refracción n, forman ángulos diedros: $\angle A = 90°$, $\angle B = 75°$, $\angle C = 135°$, $\angle D = 60°$ (prisma de Abbe). Un rayo luminoso incide en la cara AB y después de una reflexión total de la cara BC, sale del prisma a través de la cara AD. Encontrar el ángulo de incidencia α del rayo en la cara AB, conociendo que el rayo que pasa a través del prisma es perpendicular al incidente.

733. Si en una hoja de papel echamos cola o agua, resulta que a través del papel se puede leer un texto escrito en el lado inverso de la hoja. Explicar ¿por qué?

734. Un haz de rayos paralelos incide en una placa planoparalela, transparente e infinita. En cada paso por la

superficie de separación de dos medios, una parte de la energía reflejada es igual a p, es decir, $E_{ref} = pE_{inc}$; no existe absorción en el material de la placa. ¿Qué parte de la energía total del haz incidente poseerá la luz que pasa?

§ 30. LENTES Y ESPEJOS ESFERICOS

735. Un punto luminoso se mueve por el eje de un espejo esférico cóncavo, aproximándose a éste. ¿Para qué distancias del punto al espejo, la distancia, entre el punto y su imagen en el espejo, será igual a 0,75 R, donde R es el radio de curvatura del espejo?

736. Una lente convergente plano-convexa fue fabricada de vidrio con índice de refracción $n = 1,5$. Determinar la relación entre la distancia focal f de esta lente y el radio de curvatura R de su superficie convexa.

737. Las superficies de refracción de una lente tienen la forma de superficies esféricas concéntricas. El radio mayor de curvatura es $R = 20$ cm, el espesor de la lente es $l = 2$ cm y el índice de refracción del vidrio es $n = 1,6$. ¿Será la lente convergente o divergente? Determinar su distancia focal.

738. Una lente biconvexa, hecha del vidrio con índice de refracción $n = 1,6$, tiene la distancia focal $f = 10$ cm. ¿Cuál será la distancia focal de esta lente, si la colocamos en un medio transparente que tiene índice de refracción $n_1 = 1,5$? Determinar la distancia focal de esta lente en un medio con índice de refracción $n_2 = 1,7$.

739. Un tubo metálico corto está cerrado por uno de los extremos, con una lente plano-convexa, y por el otro, con una lámina fina plano-paralela. El sistema fue sumergido en un líquido con índice de refracción n_1. Determinar la distancia focal del sistema, si el radio de curvatura de la superficie de la lente es igual a R y ella fue fabricada de una substancia con índice de refracción n_2.

740. Una lente de vidrio, delgada, tiene una potencia $D = 5$ dioptrías. Cuando esta lente está sumergida en un líquido con índice de refracción n_2, ella actúa como

una lente divergente con distancia focal igual a $f = 100$ cm. Determinar el índice de refracción n_2 del líquido, si el índice de refracción del vídrio de la lente es $n_1 = 1,5$.

741. Una lente de vidrio biconvexa, con radios de curvatura de superficies iguales, tiene en el aire una distancia focal F_1 y en el agua F_2. ¿En qué distancias F' y F'' de la lente se encontrarán sus focos, cuando esta lente sea colocada] en la superficie de separación entre el aire y el agua? El índice de refracción del aire es igual a la unidad y del agua, $n = 4/3$.

742. La distancia entre dos fuentes luminosas puntuales es $l = 24$ cm. ¿En qué punto entre ellas es necesario colocar una lente convergente con distancia focal $f = 9$ cm, para que las imágenes de ambas fuentes coincidan?

743. La altura de la llama de una vela es 5 cm. Una lente proyecta en una pantalla la imagen de esta llama de 15 cm de altura. Sin mover la lente, la vela se desplaza en $l = 1,5$ cm, apartándola aún más de la lente, y, después de correr la pantalla, se observa nuevamente una imagen nítida de la llama de 10 cm de altura. Determinar la distancia focal principal de la lente.

744. Un haz de rayos convergente incide en una lente divergente de tal modo, que las continuaciones de todos los rayos se intrsecan en un punto situado en el eje óptico de la lente, a una distancia $b = 15$ cm de ésta. Determinar la distancia focal de la lente en dos casos:

1) después de refractarse en la lente, los rayos se convergen en un punto, situado a una distancia $a_1 = 60$ cm de la lente;

2) las continuaciones de los rayos refractados se intersecan en un punto, situado en frente de la lente a una distancia $a_2 = 60$ cm de ella.

745. La distancia entre una lámpara eléctrica y una pantalla es $d = 1$ m. ¿Para qué posiciones de una lente convergente, con distancia focal $f = 21$ cm, la imagen del filamento incandescente de la lámpara será nítida?

¿Podrá obtenerse una imagen, si la distancia focal es igual a $f' = 26$ cm?

746. Una lente convergente delgada proyecta la imagen de un cierto objeto en una pantalla. La altura de la imagen es igual a h_1. No cambiando la distancia entre el objeto y la pantalla, desplazan la lente y encuentran una segunda imagen nítida, de altura igual a h_2. Determinar la altura H del propio objeto.

747. Una fuente luminosa se instala a una altura sobre un pozo de agua. Una lente, fabricada de vidrio con índice de refracción $n = 3/2$ y colocada en el agua ($n_1 = 4/3$), proyecta en el fondo una imagen nítida de la fuente, cuando la fuente se sitúa a una distancia $f_1 = 20$ cm ó $f_2 = 80$ cm del fondo. Determinar la distancia focal de tal lente en el aire.

748. ¿Cuál es el radio R de un espejo cóncavo que se encuentra a una distancia $a = 2$ m de la cara de un hombre que ve en el espejo su imagen vez y media mayor que en un espejo plano situado a la misma distancia de la cara del hombre?

749. En la fig. 249 está representado un rayo AB que pasa a través de una lente divergente. Trazar el trayecto

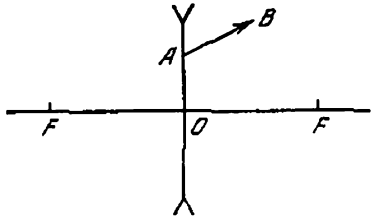


Fig. 249

del rayo hasta la lente, si la posición de sus focos F es conocida.

750. En la fig. 250 está representado un punto luminoso y su imagen proyectada por una lente, cuyo eje óptico es N_1N_2. Encontrar la posición de la lente y de sus focos.

751. Hallar gráficamente el centro óptico y los focos principales en el eje óptico N_1N_2 de una lente, siendo

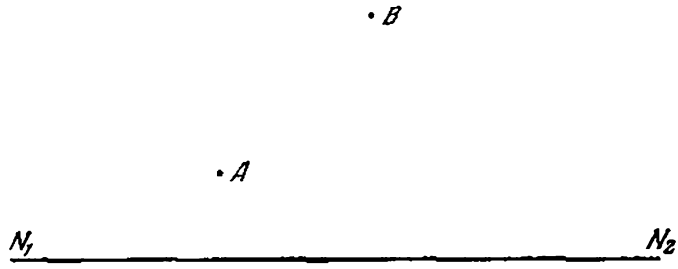


Fig. 254

conocida la posición de la fuente S y de su imagen S' (fig. 251).

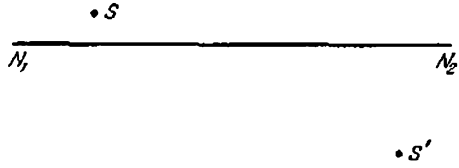


Fig. 251

752. Son dados la posición del eje óptico N_1N_2, el trayecto del rayo AB, incidente en la lente, y el rayo refractado

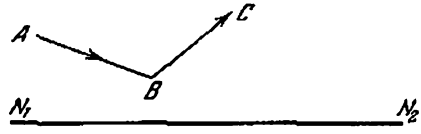


Fig. 252

BC (fig. 252). Encontrar gráficamente la posición de los focos principales de la lente.

753. Una lente convergente proyecta la imagen de una fuente en el punto S' situado en el eje óptico principal. La posición del centro de la lente O y de sus focos F es conocida, además $OF < OS'$. Determinar gráficamente la posición de la fuente S.

754. El punto S' es la imagen de una fuente luminosa puntual en un espejo esférico, cuyo eje óptico es N_1N_2

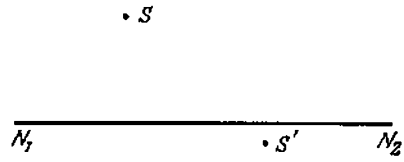


Fig. 253

(fig. 253). Encontrar gráficamente la posición del centro del espejo y de su foco.

755. Son dadas: las posiciones del eje óptico N_1N_2 de un espejo esférico, de la fuente y de su imagen (fig. 254).

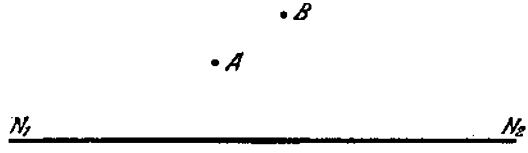


Fig. 250

Hallar gráficamente la posición del centro del espejo, de su foco y del polo para los casos siguientes:
1) A es la fuente, B es la imagen;
2) B es la fuente, A es la imagen.

756. Una fuente luminosa puntual, instalada a una distancia de una plantalla, crea en el centro de la pantalla una iluminación de 2,25 lux. ¿Cómo cambiará esta iluminación, si al otro lado de la fuente y a la misma distancia colocamos:
1) un espejo plano infinito, paralelo a la pantalla?
2) un espejo cóncavo, cuyo centro coincide con el de la pantalla?
3) un espejo convexo que tiene igual radio de curvatura que el cóncavo?

757. Deseando tener la foto de una cebra, un fotógrafo retrató a un burro blanco, adaptando al objetivo de la cámara fotográfica un vidrio con trazos negros. ¿Qué obtuvo el fotógrafo en la foto?

758. Una lente estratiforme, mostrada en la fig. 255, fue hecha de dos tipos de vidrios. ¿Qué imagen se obtendrá

Fig. 255

con ayuda de esta lente, en el caso de una fuente puntual situada en el eje óptico? La reflexión de la luz en el límite de las capas puede ser despreciada.

759. Las dimensiones de los discos del Sol y de la Luna, vistos en el horizonte, parecen mayores en comparación con las dimensiones de los mismos, vistos en el cenit. ¿Cómo se puede demostrar experimentalmente, con ayuda de una lente, que este aumento es imaginatorio?

§ 31. SISTEMAS E INSTRUMENTOS OPTICOS

760. En una lente convergente, con distancia focal igual a 40 cm, incide un haz de rayos paralelo. ¿Dónde es necesario colocar una lente divergente, con distancia focal igual a 15 cm, para que el haz de rayos, después de pasar por dos lentes, continúe paralelo?

761. ¿A qué distancia de una lente biconvexa, con distancia focal $f = 1$ m, es necesario colocar un espejo esférico cóncavo que tiene un radio de curvatura $R = 1$ m, para que el rayo que incide en la lente paralelamente al eje óptico principal del sistema, después de refle-

jarse en el espejo, salga de la lente y continúe paralelo al eje óptico? Encontrar las imágenes de un objeto proyectadas por este sistema óptico.

762. Un sistema óptico consta de dos lentes convergentes con distancias focales $f_1 = 20$ cm y $f_2 = 10$ cm. La distancia entre las lentes es $d = 30$ cm. El objeto se encuentra a una distancia $a_1 = 30$ cm de la primera lente. ¿A qué distancia de la segunda se obtendrá la imagen?

763. Determinar la distancia focal de un sistema óptico, constituido por dos lentes delgadas: la una divergente con distancia focal f_1 y la otra convergente con distancia focal f_2. Las lentes están situadas muy cerca una de la otra. Los ejes ópticos de las lentes coinciden.

764. Dos lentes divergentes iguales están colocadas en el mismo eje de tal modo, que el foco anterior de una y el foco posterior de la otra, están situados en el mismo punto A del eje. La tercera lente se coloca en este mismo eje para que su centro óptico se encuentre en el punto A. La distancia focal de la tercera lente es tal, que el sistema produce la imagen real de cualquier objeto situado fuera del sistema, pero en su eje. ¿Qué aumento dará el sistema, cuando la distancia entre el objeto y su imagen es la mínima?

765. Un haz paralelo de luz cae en un sistema de tres lentes delgadas con el eje óptico común. Las distancias focales de las lentes son iguales a $f_1 = +10$ cm, $f_2 = -20$ cm y $f_3 = +9$ cm, respectivamente. La distancia entre la primera y la segunda lentes es 15 cm, entre la segunda y la tercera es 5 cm. Determinar la posición del punto de convergencia del haz al salir del sistema de las lentes.

766. Cierto sistema óptico proyecta la imagen real de una fuente en un punto A. La dimensión de la imagen es 1 mm. Otro sistema óptico consta de dos lentes convergentes, situadas de modo, que el centro de la una coincide con el foco de la otra e inversamente. El segundo sistema se coloca en el mismo eje que el primero de tal modo, que el punto A se encuentre entre las lentes, aproximadamente en el medio. Hallar

la dimensión de la imagen proyectada por el segundo sistema.

767. Un sistema óptico consta de dos lentes con distancias focales iguales en magnitud absoluta. Una de las lentes es convergente y la otra es divergente. Las lentes están instaladas en el mismo eje, a cierta distancia la una de la otra. Se sabe que al cambiar las lentes, la imagen real de la Luna, proyectada por el sistema, se desplaza en $l = 20$ cm. Encontrar la distancia focal de cada una de las lentes.

768. ¿Cuál deberá ser la distancia focal F_x de una lente convergente que proyecte una imagen de la Luna, igual, en magnitud, a la imagen proyectada por el sistema de dos lentes mencionado en el problema 767? La distancia entre las lentes es $a = 4$ cm.

769. ¿Para qué posición (una de las dos) de las lentes, indicadas en el problema 767, las dimensiones de la imagen real de la Luna serán mayores?

770. Una lente con distancia focal $f = 30$ cm proyecta en una pantalla la imagen nítida de un objeto situado a una distancia $a = 40$ cm de la lente. Entre la lente y el objeto, perpendicularmente al eje óptico de la lente, fue colocada una lámina plano-paralela, de espesor $d = 9$ cm. ¿A qué distancia es necesario desplazar la pantalla para que la imagen del objeto continúe nítida?
El índice de refracción del vidrio de la lámina es $n = 1{,}8$.

771. Un objeto AB se encuentra a una distancia $a = 36$ cm de una lente con distancia focal $f = 30$ cm. A una distancia $l = 1$ m, detrás de la lente está instalado un espejo plano, inclinado en 45° con relación al eje óptico (fig. 256). ¿A qué distancia H del eje óptico es necesario colocar el fondo de una cubeta con agua para obtener en él una imagen nítida del objeto? La profundidad del agua en la cubeta es $d = 20$ cm.

772. Una cuña de vidrio, con pequeño ángulo de refracción α, fue colocada a cierta distancia de una lente convergente con distancia focal f, siendo una de las superficies de la cuña perpendicular al eje óptico de la lente.

Al otro lado de la lente, en su foco se encuentra una fuente luminosa puntual. Los rayos reflejados por la cuña proyectan, después de reflejarse en la lente,

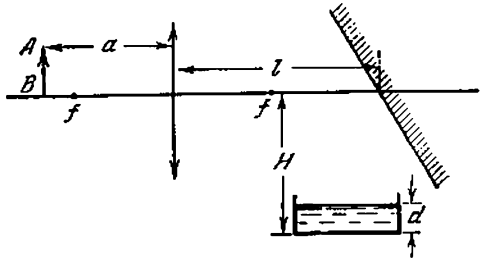


Fig. 256

dos imágenes de la fuente, desplazadas la una relativamente de la otra, a una distancia d. Encontrar el índice de refracción del vidrio de la cuña.

773. En el espejo cóncavo que tiene la forma de una semiesfera de radio $R = 55$ cm, se vierte una capa fina de un líquido desconocido transparente. Gracias a ello, se tiene la impresión de que tal sistema óptico, en determinada posición de la fuente, proyecta dos imágenes reales, una de las cuales coincide con la propia fuente y la otra está de la fuente a una distancia $l = 30$ cm. Hallar el índice de refracción n del líquido.

774. Una lente biconvexa tiene una distancia focal $f_1 = 10$ cm. Una de las superficies de la lente que tiene el radio de curvatura $R = 10$ cm, está cubierta de plata. Construir gráficamente la imagen de un objeto proyectada por este sistema óptico y encontrar la posición de la imagen, conociendo que el objeto está a una distancia $a = 15$ cm de la lente.

775. Una lente plano-convexa de vidrio (el índice de refracción es n) con un lado plano plateado tiene distancia focal F_1. ¿Qué distancia focal tendrá esta lente, si plateamos el lado convexo y no el plano?

776. En la superficie plana de un pedazo macizo de vidrio (el índice de refracción es n) fue abierto un orificio en forma de un segmento de esfera. La parte retirada del vidrio tiene la forma de una lente convergente

delgada con distancia foca f. Encontrar las distancias focales f_1 y f_2 de la superficie esférica obtenida.

777. En una esfera transparente que tiene un radio R e índice de refracción n, incide un haz fino de rayos luminosos paralelos en dirección de uno de los diámetros. ¿A qué distancia f del centro de la esfera los rayos se enfocarán?

778. Una esfera de diamante ($n = 2{,}4$) de radio R está cubierta de plata en la parte de atrás. ¿A qué distancia d delante de la esfera debe situarse una fuente luminosa puntual para que los rayos que se refractan en la superficie delantera, se reflejan en la parte posterior, y refractándose nuevamente en la delantera, proyecten una imagen que coincida con la fuente?

779. Encontrar gráficamente la posición de los planos principales de una esfera transparente utilizada como lente.

780. Un objeto se halla a una distancia $d = 2{,}5$ cm de la superficie de una esfera de vidrio que tiene un radio $R = 10$ cm. Encontrar la posición de la imagen proyectada por la esfera. El índice de refracción del vidrio es $n = 1{,}5$.

781. Un matraz esférico, cuyo espesor de las paredes ΔR es mucho menor de que su radio R, fue hecha de vidrio con el índice de refracción n. Considerando este matraz como un sistema óptico y examinando solamente los rayos, próximos a la recta que pasa por el centro de la esfera, determinar la posición de los focos y de los planos principales del sistema.

782. En una gota de agua que tiene forma esférica, incide, bajo el ángulo i, un rayo luminoso. Encontrar el ángulo θ de desviación del rayo en relación a la dirección inicial, en el caso de la existencia de la única reflexión de la superficie interna de la gota.

783. En una gota de agua de forma esférica, incide un haz de rayos paralelo.
1) Determinar los valores de los ángulos θ do desviación de los rayos, con relación a la dirección inicial, para diferentes ángulos de incidencia: 0°, 20°, 40°, 50°, 55°, 60°, 65°, 70°.

2) Construir gráficamente la dependencia de θ respecto a i y, valiéndose del gráfico, encontrar el valor aproximado del ángulo de desviación mínima θ_{min}.
3) Determinar en las proximidades de qué valores del ángulo θ, los rayos refractados en la gota, se propagarán aproximadamente de modo paralelo.
El índice de refracción del agua debe considerarse igual a $n = 1{,}333$. (Este valor de n es válido para los rayos rojos).

784. ¿Por qué en las cámaras fotográficas que utilizan vidrio mate para la nitidez del enfoque, no se utilizan vidrios transparentes?

785. Dos faroles del mismo brillo se encuentran a distancias diferentes de un observador.
1) ¿Tendrán los faroles el mismo brillo para el observador?
2) ¿Tendrán el mismo brillo las imágenes de los faroles, en una fotografía, si los faroles están fotografiados en diferentes cuadros para que las imágenes se enfoquen?

786. Un mismo objeto fue fotografiado de una pequeña distancia por dos cámaras fotográficas con la misma luminosidad, pero diferentes distancias focales. ¿Será la exposición la misma en ambas cámaras?

787. Con ayuda de una lente reciben sucesivamente dos imágenes del mismo objeto con aumentos de $k_1 = 5$ y $k_2 = 2$. ¿En cuántas veces cambió la iluminación de la pantalla en el lugar de obtención de la imagen al pasar de un aumento para el otro?

788. Una fuente luminosa puntual se encuentra en el eje de una lente divergente a una distancia $a = 30$ cm de ésta. En una pantalla, situada al otro lado de la lente, a una distancia $l = 10$ cm, se obtiene una mancha luminosa. Si aumentamos 4 veces la distancia entre la lente y la pantalla, la iluminación del centro de la mancha disminuirá 4 veces. Encontrar la distancia focal de la lente.

789. La distancia entre una fuente puntual y una lente lconvergente es $d = 30$ cm, entre la lente y una pantalla es $l = 60$ cm. Se sabe que la iluminación del centro de una mancha luminosa en la pantalla aumentará

$n = 4$ veces, si la pantalla se instala junto a la lente. Determinar la distancia focal de la lente.

790. Una pequeña cantidad de líquido opaco cubre una parte plateada en el fondo de un recipiente esférico negro, en cuyo centro se encuentra una fuente luminosa puntual. Cuando el líquido fue sustituido por un líquido transparente, la iluminación del punto superior del recipiente aumentó en 25%. Determinar el índice de refracción del líquido transparente.

791. Las lentes, que fueron mencionadas en el problema 767, tienen el mismo diámetro. Comparar la iluminación de la imagen de la Luna en la primera y en la segunda posición de las lentes, utilizando una lente equivalente.

792. Tenemos la impresión de que una pared blanca, iluminada por el ocaso del Sol, es más clara que la superficie de la Luna, que se encuentra a una misma altura en el horizonte que el Sol. ¿Significará esto que la superficie de la Luna está constituida de rocas oscuras? (*Minnart* «Luz y color en la naturaleza»).

793. ¿Por qué, al abrir los ojos bajo el agua, vemos apenas el contorno difuso de los objetos y, al ponernos una máscara para zambullidas, los objetos se ven absolutamente nítidos?

794. Un hombre miope, cuyo límite de acomodación de los ojos está entre $a_1 = 12$ cm y $a_2 = 60$ cm, usa gafas, mediante los cuales puede ver muy bien objetos distantes. Determinar la menor distancia posible a_3, para la cual este hombre puede leer un libro llevando las gafas.

795. Dos hombres, un hipermétrope y un miope, usando sus gafas, ven como una persona con vista normal. Una vez, casualmente, ellos se cambiaron de gafas. Poniendo las gafas del miope, el hipermétrope notó que puede ver con claridad solamente objetos que están bien lejos. ¿Cuál es la menor distancia a que posibilita al miope leer letras pequeñas, usando las gafas del hipermétrope?

796. Un objeto se ve desde una distancia D a simple vista. ¿Cuál será el aumento angular, si este objeto se mira a través de una lupa colocada a una distancia r de los

ojos y situada de tal modo que la imagen se encuentre a una distancia L de los ojos? La distancia focal de la lente es igual a f. Analizar los casos: 1) $L = \infty$; 2) $L = D$.

797. De un tubo óptico, enfocado para el infinito, sacaron el objetivo y lo sustituyeron por el diafragma de diámetro D. Como resultado de ello, a cierta distancia del ocular, en una pantalla, se recibió la imagen real del diafragma con diámetro d. ¿Cuál fue el aumento del tubo?

798. Para la construcción de una lente doble del objetivo de una cámara fotográfica un constructor utilizó una lente divergente con distancia focal $f_1 = 5$ cm, colocándola a una distancia $l = 45$ cm de la película. ¿Dónde es preciso colocar la lente convergente con distancia focal $f_2 = 8$ cm, para que en la película resulte una imagen nítida de objetos distantes?

799. Para tres diferentes posiciones de las lentes, halladas en el problema 798, calcular el diámetro D de la imagen de la Luna obtenida en el negativo. El diámetro de la Luna se ve de la Tierra bajo el ángulo medio $\varphi = 31'5'' \approx 0{,}9 \cdot 10^{-2}$ rad.

800. La distancia focal principal del objetivo de un microscopio es $f_{obj} = 3$ mm, del ocular $f_{oc} = 5$ cm. Un objeto se encuentra a una distancia $a = 3{,}1$ mm del objetivo. Encontrar el aumento del microscopio para un ojo normal. Considerar los casos siguientes: 1) la imagen está a una distancia $D = 25$ cm; 2) en el ojo desde el ocular inciden unos haces de rayos paralelos.

Capítulo VI

Optica física

§ 32. INTERFERENCIA DE LA LUZ

801. Dos ondas luminosas sobreponiéndose una sobre la otra, en un determinado lugar del espacio, se extinguen mutuamente. ¿Significará esto que la energía luminosa se transforma en otras formas?

802. Dos fuentes luminosas coherentes S_1 y S_2 se encuentran a una distancia l la una de la otra. A una distancia $D \gg l$ de las fuentes se instala una pantalla (fig. 257).

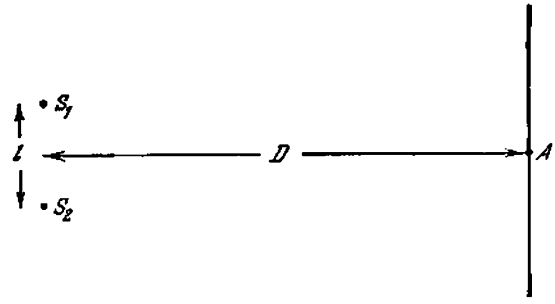


Fig. 257

Encontrar la distancia entre las franjas de interferencia vecinas cerca del centro de la pantalla (punto A), si las fuentes emiten luz de longitud de onda λ.

803. Dos espejos planos forman entre sí un ángulo próximo a 180° (fig. 258). A distancias iguales b de los espejos

se encuentra una fuente luminosa S. Determinar el intervalo entre las franjas de interferencia vecinas en la pantalla MN, situada a una distancia $OA = a$ del punto de intersección de los espejos. La longitud

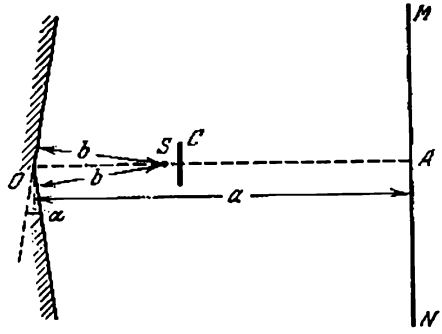


Fig. 258

de onda luminosa es conocida y es igual a λ. (La cortina C impide la incidencia directa de la luz de la fuente en la pantalla).

804. El experimento de interferencia de Lloyd consistió en obtener en una pantalla la imagen de la fuente S y su imagen virtual S' en el espejo AO (fig. 259).

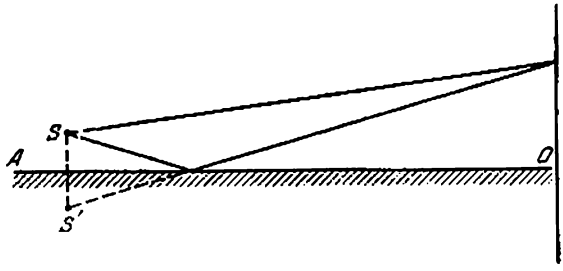


Fig. 259

¿Cuál será la diferencia entre el cuadro de interferencia de las fuentes S y S' y el analizado en el problema 802?

805. Dos fuentes puntuales coherentes están situadas en una recta, perpendicular a una pantalla, a una distancia

entre ellas $l \gg \lambda$. La fuente más próxima se encuentra a una distancia $D \gg \lambda$ de la pantalla. ¿Cuál será la forma que tendrán las franjas de interferencia en la pantalla? ¿Cuál será la distancia entre la perpendicular y la franja luminosa más próxima en la pantalla (para las condiciones $l = n\lambda$, donde n es un número entero)?

806. Encontrar el radio r_k del k-ésimo anillo luminoso (véase el problema 805) para las condiciones de $D = l = n\lambda$, $n \gg 1$, $k = n, n-1, n-2, \ldots$

807. ¿Cómo se puede realizar en la práctica el experimento descrito en el problema 805?

808. En biprisma de Fresnel, mostrado en la fig. 260, cae la luz de la fuente S. Los haces luminosos que sufren refracción por diferentes caras del prisma, en parte

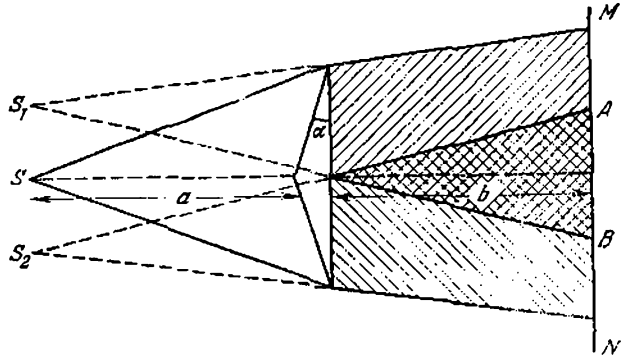


Fig. 260

se sobreponen y forman en el sector AB de la pantalla un cuadro de interferencia. Encontrar la distancia entre las franjas de interferencia vecinas, si la distancia entre la fuente y el prisma es $a = 1$ m y entre el prisma y la pantalla $b = 4$ m; el ángulo de refracción del prisma es $\alpha = 2 \cdot 10^{-3}$ rad. El vidrio, del cual está hecho el prisma, tiene el índice de refracción $n = 1{,}5$. La longitud de onda luminosa es $\lambda = 6000$ Å.

809. ¿Cuántas franjas de interferencia se observan en una pantalla de un sistema óptico, con un biprisma descrito en el problema anterior?

810. La dificultad de fabricar un biprisma con ángulo próximo a 180° (véase el problema 808), nos obliga a recurrir al método siguiente. Un biprisma con ángulo β que se diferencia radicalmente de 180°, fue colocado en un recipiente lleno de líquido con índice de refracción n_1, o el mismo puede ser una de las paredes de este recipiente (fig. 261). Calcular el ángulo δ del

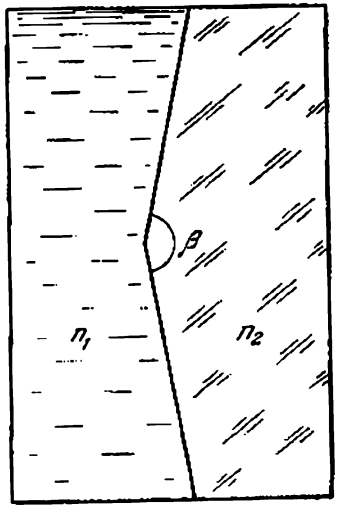


Fig. 261

biprisma equivalente que se encuentra en el aire. El índice de refracción del material del prisma es n_2. Hacer los cálculos para $n_1 = 1{,}5$ (benzol), $n_2 = 1{,}52$ (vidrio), $\beta = 170°$.

811. Una lente convergente, cuya distancia focal es $f = 10$ cm, fue cortada al medio y las mitades fueron desplazadas a una distancia $d = 0{,}5$ mm (lente doble). Calcular el número de franjas de interferencia en la pantalla, situada detrás de la lente a una distancia $D = 60$ cm, si delante de la lente existe una fuente puntual de luz monocromática ($\lambda = 5000$ Å), alejada de ella en $a = 15$ cm.

812. De una lente convergente, con distancia focal $f = 10$ cm, fue cortada su parte central de la anchura

$d = 0{,}5$ mm, como muestra la fig. 262. Ambas mitades fueron acercadas muy juntamente. En la lente incide una luz monocromática ($\lambda = 5000$ Å) de una fuente puntual situada a una distancia $a = 5$ cm de la lente.

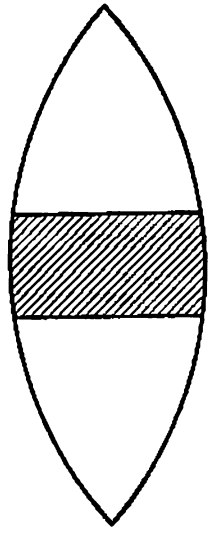


Fig. 262

¿A qué distancia del otro lado de la lente debe instalarse una pantalla para que en ella puedan ser observadas tres franjas de interferencia? ¿Cuál es el número máximo posible de franjas de interferencia que puede observarse en tal sistema óptico?

813. Encontrar la distancia entre las franjas vecinas de un cuadro de interferencia, creado por una lente de radio $R = 1$ cm, mencionada en el problema **812**, con condición de que esta distancia no depende de la posición de la pantalla. ¿Para qué posición de la pantalla, el número de franjas de interferencia será el máximo? La fuente luminosa emite luz monocromática de longitud de onda $\lambda = 5000$ Å.

814. ¿Qué pasará con el cuadro de interferencia en el sistema óptico, descrito en el problema **812**, si introducimos en el haz luminoso, que pasa por la mitad superior

de la lente, una lámina de vidrio plano-paralela de espesor $d_1 = 0{,}11$ cm, y en el haz luminoso, que pasa por la mitad inferior de la lente, una lámina de espesor $d_2 = 0{,}1$ cm? El índice de refracción del vidrio es $n = 1{,}5$. Las láminas se colocan normalmente en relación a los haces luminosos que pasan a través de éstas.

815. ¿Por qué los anillos de Newton se forman solamente como consecuencia de la interferencia de los rayos *2* y *3*, reflejados de los límites de la capa de aire existente entre la lente y el vidrio (fig. 263), y el

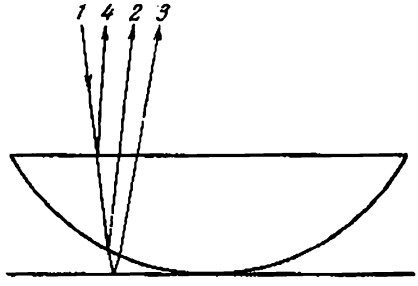


Fig. 263

rayo *4*, reflejado de la cara plana de la lente, no influye en el carácter del cuadro de interferencia?

816. ¿Cambiará el carácter del cuadro de interferencia, en el sistema óptico, descrito en el problema 803, si retiramos la cortina *C*? Considerar la distancia *a* muy grande (igual a 1 m). Las ondas emitidas por la fuente no son monocromáticas.

817. ¿En qué caso los anillos de Newton serán vistos más claramente: en luz reflejada o cuando ella atraviesa el medio?

818. Entre una lente plano-convexa y una lámina de vidrio, sobre la cual ella fue colocada, no hay contacto por causa del polvo. El radio del quinto anillo oscuro de Newton, por causa de ello es igual a $r_1 = 0{,}08$ cm. Si eliminamos el polvo, el radio de este anillo aumenta hasta $r_2 = 0{,}1$ cm. Encontrar el espesor de la capa

de polvo d, si el radio de curvatura de la superficie convexa de la lente es $R = 10$ cm.

819. Sobre la superficie de una lente bicóncava que tiene un radio de curvatura igual a R_1, fue colocada la parte convexa de una lente plano-convexa de radio de curvatura de la superficie $R_2 < R_1$. Encontrar los radios de los anillos de Newton que surgen alrededor del punto de contacto de las lentes, si en el sistema cae normalmente una luz monocromática de longitud de onda λ.

820. Para disminuir el factor de reflexión de la luz de los espejos ópticos, la superficie de los espejos se cubre con una capa fina de una substancia transparente, cuyo índice de refracción n es menor que el índice de refracción del vidrio. (El llamado «método de clarificación de aparatos ópticos»). Calcular el espesor de la capa puesta, considerando que los rayos luminosos inciden en el vidrio óptico casi normalmente.

821. Un ojo normal es capaz de diferenciar los matices de los colores para una diferencia de longitud de ondas igual a 100 Å. Tomando en cuenta este hecho, calcular el espesor máximo de una capa fina de aire, en la cual se puede observar, en luz blanca, un cuadro de interferencia provocado por la superposición de los rayos reflejados de los límites de esta capa.

822. En una cuña de vidrio, fina, de una fuente distante, incide casi normalmente un flujo de ondas monocromáticas de longitud de onda λ. A una distancia d de la cuña fue instalada una pantalla, en la cual una lente, con distancia focal f, proyecta un cuadro de interferencia, que surge en la cuña. La distancia entre las franjas de interferencia en la pantalla es conocida e igual a Δl. Encontrar el ángulo α de la cuña, si el índice de refracción del vidrio es n.

§ 33. DIFRACCION DE LA LUZ

823. Calcular los radios de las zonas de Fresnel, de una onda esférica de radio a para el punto B, que se halla de la fuente de ondas monocromáticas con longitud de

onda λ, a una distancia $a + b$, considerando que: $a \gg \lambda$ y $b \gg \lambda$.

824. Calcular los radios de las zonas de Fresnel de una onda plana para el punto B, que se encuentra a una distancia igual a $b \gg \lambda$ de la frente de onda, donde λ es la longitud de onda de la fuente.

825. Una fuente puntual de luz monocromática de longitud de onda $\lambda = 5\,000$ Å, se encuentra a distancia $a = 6{,}75$ m de una cortina con abertura de diámetro $D = 4{,}5$ mm. A distancia $b = a$ de la cortina fue colocada una pantalla (fig. 264). ¿Cómo cambiará la

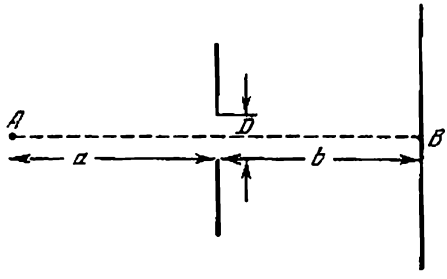


Fig. 264

iluminación en el punto B de la pantalla, situado en el eje del haz, si aumentamos el diámetro de la abertura hasta $D_1 = 5{,}2$ mm?

826. ¿Cómo explicar, de acuerdo con el principio de conservación de la energía, el hecho de que el aumento de la abertura (véase las condiciones del problema 825) puede llevar a la disminución de la iluminación en en el ejo del haz? Es evidente que el incremento de la abertura conduce al crecimiento del flujo luminoso total que penetra a través de la cortina.

827. Una onda plana, luminosa ($\lambda = 6\,000$ Å) incide en una cortina con diafragma circular. Detrás del diafragma, a distancia $b = 2$ m, fue colocada una pantalla. ¿Para qué diámetro D del diafragma será máxima la iluminación de la pantalla en el punto B, que se encuentra en el eje del haz luminoso?

828. Apreciar para qué condiciones la difracción de ondas luminosas de longitud λ, en la abertura de la cortina será expresada suficientemente nítida, considerando las distancias desde la fuente hasta la cortina y desde la cortina hasta la pantalla aproximadamente iguales a a. (La intensidad en el eje del haz dependerá del diámetro de la apertura).

829. Demostrar que detrás de una pantalla circular C, en el punto B (fig. 265), se observará una mancha clara, si

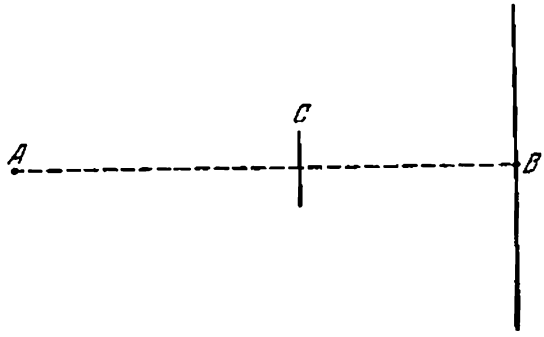


Fig. 265

las dimensiones de la pantalla son suficientemente pequeñas.

830. ¿A qué distancia se encontrarán dos hombres para que los ojos puedan distinguirlos a una distancia de unos 11 km? La capacidad de resolución de un ojo humano constituye aproximadamente 1′.

831. Una onda luminosa plana (la longitud de onda λ) incide normalmente en una abertura estrecha de anchura b. Determinar las direcciones en los mínimos de iluminación.

832. Determinar las dimensiones óptimas del orificio de una «cámara con aberturas», en dependencia de la longitud de onda, o sea, el radio del orificio r, para el cual una fuente puntual aparece en la pared de la cámara como un círculo de diámetro mínimo, si la distancia entre la fuente luminosa y la cámara es grande en comparación con su profundidad d. Las direcciones en los mínimos de iluminación, por orden

de magnitud, se determinan por la misma fórmula que en el caso de la abertura (véase el problema 831), sólo que en el lugar de la anchura de la abertura b hay que tomar el diámetro del orificio igual a $2r$.

833. Una onda monocromática incide en una rejilla de difracción que tiene un período $d=4\cdot10^{-4}$ cm. Apreciar la longitud de onda λ, si el ángulo entre los espectros de segundo y tercer orden es igual a $\alpha = 2°30'$. Los ángulos de desviación deben considerarse pequeños.

834. En una rejilla de difracción que tiene 500 líneas por milímetro, incide una onda plana monocromática ($\lambda = 5\cdot10^{-5}$ cm). Determinar el mayor orden del espectro k que podrá observarse por la incidencia normal de rayos en la rejilla.

835. Determinar la constante de una rejilla d, capaz de analizar radiaciones ultrarrojas, con longitudes de ondas hasta $\lambda = 2\cdot10^{-2}$ cm. La radiación incide en la rejilla normalmente.

836. En una rejilla de difracción que tiene un período $d = 4\cdot10^{-4}$ cm, incide normalmente una onda monocromática. Detrás de la rejilla se encuentra una lente que tiene una distancia focal $f = 40$ cm y proyecta la imagen del cuadro de difracción en una pantalla. Determinar la longitud de onda λ, si el primer máximo se obtiene a una distancia igual a $l = 5$ cm del máximo central.

837. Una fuente de luz blanca, una rejilla de difracción y una pantalla fueron metidos en el agua. ¿Qué cambios sufrirá por causa de esto el cuadro de difracción, si los ángulos de desviación de los rayos luminosos de la rejilla son pequeños?

838. La luz, después de pasar a través de un filtro óptico, incide normalmente en una rejilla de difracción que tiene un período $d = 2\cdot10^{-4}$ cm. El filtro permite el paso de ondas de longitud desde $\lambda_1 = 5000$ Å hasta $\lambda_2 = 6\,000$ Å. ¿Se sobrepondrán los espectros de diferentes órdenes unos sobre otros?

839. Resolver el problema 834, suponiendo que una onda plana ($\lambda = 5\cdot10^{-5}$ cm) incide en la rejilla bajo el ángulo de 30°.

840. Resolver el problema 835, suponiendo que la incidencia de los rayos en la rejilla puede ser inclinada.

841. Encontrar la condición que determina la dirección en los máximos principales, debido a la incidencia inclinada de ondas luminosas en una rejilla, si el período de la red es $d \gg k\lambda$ (donde k es el orden del espectro).

§ 34. DISPERSION DE LA LUZ Y COLORES DE LOS CUERPOS

842. Un rayo de luz blanca incide bajo el ángulo $\alpha = 30°$ en un prisma, cuyo ángulo refringente es $\varphi = 45°$. Determinar el ángulo θ entre los rayos extremos del espectro que salen del prisma, si los índices de refracción del vidrio del prisma para los rayos extremos del espectro visible son iguales a $n_{\text{rojo}} = 1{,}62$ y $n_{\text{viol}} = 1{,}67$.

843. En una lente biconvexa, cuyos radios de curvatura de las superficies son iguales a $R_1 = R_2 = 40$ cm, incide luz blanca de una fuente puntual, situada en el eje óptico de la lente a una distancia igual a $a = 50$ cm de ésta. Muy junto a la lente se coloca un diafragma, de diámetro $D = 1$ cm, que limita la sección transversal del haz luminoso. Los índices de refracción para los rayos extremos del espectro visible son iguales a $n_{\text{rojo}} = 1{,}74$ y $n_{\text{viol}} = 1{,}8$. ¿Qué cuadro podrá observarse en una pantalla, situada a distancia $b = 50$ cm de la lente perpendicularmente a su eje óptico?

844. Aprovechando los resultados del problema 783, elaborar una teoría elemental del arco iris, es decir, demostrar que el centro del arco iris se encuentra en una recta trazada desde el Sol hasta el ojo de un observador, y que el arco del arco iris es parte de una circunferencia, cuyos puntos se ven bajo el ángulo de 42° (para la luz roja) con relación a una recta que une el ojo del observador y el centro del arco iris.

845. Explicar cualitativamente las causas del surgimiento de un arco iris doble. ¿Qué alternaciones sufren los colores en el primero (fundamental) y en el segundo arco iris?

846. ¿Podrá en Moscú, durante el solsticio de verano (22 de junio), observarse un arco iris al mediodía? (En este tiempo el Sol en el hemisferio septentrional se encuentra lo más alto posible sobre el horizonte).

847. La longitud de onda en el agua disminuye n veces, donde n es el índice de refracción. ¿Significará esto que un zambullista no puede ver los objetos circundantes en su color natural?

848. En un cuaderno fue escrito la palabra «perfecto» con un lápiz rojo y la palabra «bien» con un lápiz verde. Se toman dos vidrios: uno verde y uno rojo. ¿A través de qué vidrio es necesario mirar para ver bien la palabra «perfecto»?

849. ¿Por qué los objetivos después de la clarificación (véase el problema 820) tienen una tonalidad purpúreo-violeta?

850. Los colores de las películas finas (por ejemplo, las manchas de petróleo en el agua) y los colores del arco iris tienen tonalidades absolutamente diferentes. ¿Por qué?

851. Una película de jabón está colocada en un cuadro vertical. Al iluminar con luz blanca en la película se observan tres franjas coloridas: purpúrea (carmesí), amarilla y azul (verde-azulada). Encontrar la posición y el orden de las franjas.

852. ¿Por qué la Luna durante el día tiene un color blanco puro y después de la puesta del Sol adquiere una tonalidad amarillenta?

853. ¿Por qué una columna de humo que sube sobre los tejados de las casas teniendo como fondo objetos circundantes oscuros, parece ser azul, y teniendo como fondo el cielo claro parece ser amarilla e incluso rojiza?

854. ¿Por qué los colores de los objetos mojados parecen ser más profundos, más saturados que de los secos?

RESPUESTAS Y SOLUCIONES

Capítulo I

Mecánica

§ 1. CINEMATICA DEL MOVIMIENTO RECTILINEO Y UNIFORME

1. En el transcurso de 1 hora, pasada después del encuentro, la lancha se alejaba de las balsas. Durante 30 min, cuando el motor se reparaba, la distancia entre ellas, no aumentaba. La lancha alcanzará las balsas dentro de una hora, ya que la velocidad de la lancha, respecto al agua y por lo tanto a las balsas, permanece constante y es igual a:

$$v = S/t = 7{,}5/(1 + 0{,}5 + 1) = 3 \text{ km/h}.$$

2. La distancia entre los trenes eléctricos es $S = vt$, por otra parte $S = v\tau + u\tau$. De donde

$$u = v\,(t - \tau)/\tau = 45 \text{ km/h}.$$

3. En la fig. 266 AMN es la representación gráfica del movimiento común del coche. CD es el gráfico del trayecto del

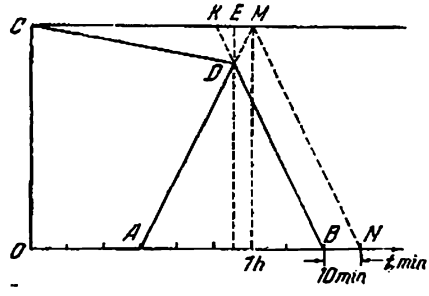


Fig. 266

ingeniero hasta encontrar el coche en el punto D. DB es la representación gráfica del movimiento del automóvil después

del encuentro con el ingeniero. Según las condiciones del problema $BN = KM = 10$ min. El tiempo del movimiento del ingeniero hasta el encuentro con el coche es igual a:

$$CE - CM - EM = CM - KM/2 = 55 \text{ min.}$$

4. Una vez que el tiempo se calcula con relación al último que llega, éste será el menor posible, cuando todos los tres turistas lleguen al mismo tiempo. El gráfico del movimiento de los turistas está representado en la fig. 267. Del gráfico se deduce

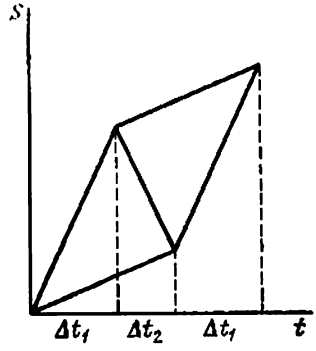


Fig. 267

que el movimiento a pie del segundo y del tercer turistas ocupó un intervalo de tiempo igual a $(\Delta t_1 + \Delta t_2)$, donde Δt_2 es el tiempo del movimiento de regreso del ciclista. Por lo tanto

$$v_1(\Delta t_1 + \Delta t_2) + v_2 \Delta t_1 = v_{med}(\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_1),$$
$$v_2 \Delta t_1 - v_2 \Delta t_2 = v_1(\Delta t_1 + \Delta t_2).$$

De las ecuaciones resulta que la velocidad media de los turistas es

$$v_{med} = \frac{3v_1 + v_2}{3v_2 + v_1} v_2 = 10 \text{ km/h}.$$

5. Los gráficos del movimiento de las gasolineras que navegan simultáneamente están representados por las líneas quebradas MEB y KEA, donde E es el punto de encuentro de las gasolineras (fig. 268). Como la velocidad de las gasolineras respecto al agua, es igual, entonces MA y KB son líneas rectas. Ambas gasolineras permanecerán en el camino el mismo tiempo, si se encuentran a mitad de la distancia entre los atracaderos. El punto de encuentro de las gasolineras O está situado en la intersección de la línea KB con la perpendicular trazada del medio del segmento KM. Los gráficos del movimiento de las

gasolineras están representados por las líneas KOD y COB. Como se ve de la figura: $\triangle MAF \sim \triangle COF$ y, por consiguiente, el tiempo que queremos encontrar es $MC = 45$ min.

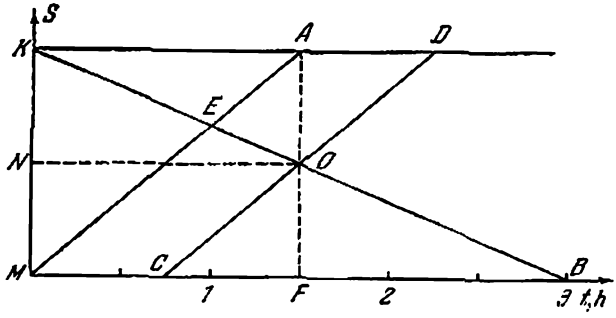


Fig. 268

6. La velocidad de las gasolineras respecto al agua v_1 y la velocidad del río v_2 se determinan de las ecuaciones $S = t_1(v_1 + v_2)$ y $S = t_2(v_1 - v_2)$, donde t_1 y t_2 son los tiempos del movimiento de las gasolineras a favor y en contra de la corriente. De acuerdo con las condiciones del problema tenemos $t_1 = 1{,}5$ h y $t_2 = 3$ h. Resolviendo el sistema de ecuaciones, recibimos que:

$$v_1 = \frac{S(t_1 + t_2)}{2t_1t_2} = 15 \text{ km/h},$$

$$v_2 = \frac{S(t_2 - t_1)}{2t_1t_2} = 5 \text{ km/h}.$$

El punto de encuentro está situado a una distancia igual a 20 km del atracadero M.

7. Supongamos que las aguas del río cubren el trayecto de C hasta T con velocidad v_0. Considerando que el tiempo de movimiento del bote y de la gasolinera es igual, podemos escribir la ecuación

$$\frac{S}{v_1 + v_0} = 2\left(\frac{S}{v_2 + v_0} + \frac{S}{v_2 - v_0}\right),$$

donde S es la distancia entre los atracaderos. De ahí

$$v_0^2 + 4v_2v_0 + 4v_2v_1 - v_2^2 = 0.$$

Por lo tanto,

$$v_0 = -2v_2 \pm \sqrt{5v_2^2 - 4v_1v_2} = -20 \pm 19{,}5 \text{ km/h}.$$

La solución $v_0 = -39{,}5$ km/h debe omitirse, ya que con esta velocidad del río ni el bote ni la gasolinera podrían navegar

contra la corriente. Por consiguiente, $v_0 = -0{,}5$ km/h, es decir, el río corre del atracadero T al C.

8. La distancia R del extremo de la sombra partiendo del punto O, que se encuentra en la tierra bajo el farol, está relacionada con la distancia r del hombre desde el mismo punto mediante la relación $R = \frac{H}{H-h} r$. Por lo tanto, la trayectoria de la sombra es semejante a la del hombre (el centro de similitud se encuentra en el punto O). Por eso el vector de velocidad del extremo de la sombra v_s tiene el mismo sentido que el vector de velocidad del hombre v y es $\frac{H}{H-h}$ veces mayor que el hombre (fig. 269).

Fig. 269

9. Supongamos que en el intervalo de tiempo Δt la primera vela mengüe, al quemarse, en una magnitud Δh_1 y la segunda, en

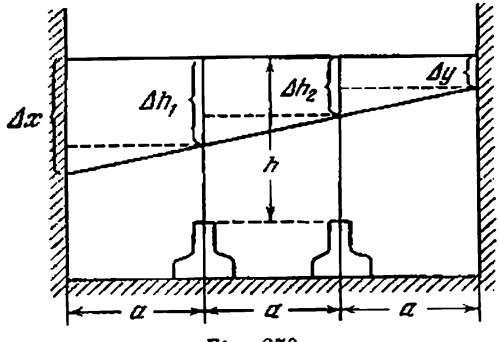


Fig. 270

una magnitud Δh_2 (fig. 270). Entonces la sombra en la pared izquierda (de la primera vela) bajará a una distancia

$$\Delta x = \Delta h_1 + (\Delta h_1 - \Delta h_2) = 2\Delta h_1 - \Delta h_2.$$

La sombra en la pared derecha descenderá a una distancia

$$\Delta y = \Delta h_2 - (\Delta h_1 - \Delta h_2) = 2\Delta h_2 - \Delta h_1.$$

Considerando que $\Delta h_1 = \frac{h}{t_1}\Delta t$, $\Delta h_2 = \frac{h}{t_2}\Delta t$, obtenemos:

$$v_1 = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2h}{t_1} - \frac{h}{t_2} = \frac{h}{t_1 t_2}(2t_2 - t_1),$$

$$v_2 = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{2h}{t_1} - \frac{h}{t_1} = \frac{h}{t_1 t_2}(2t_1 - t_2).$$

$t_2 > t_1$, por lo tanto $v_1 > 0$, mientras que v_2 puede ser una magnitud negativa, o sea, en la pared derecha la sombra puede desplazarse hacia arriba.

10. Una vez que la velocidad del movimiento en el agua es menor que la velocidad del movimiento por la orilla, el trayecto AB no ocupará obligatoriamente el tiempo mínimo. Supongamos que la trayectoria del movimiento del hombre está represen-

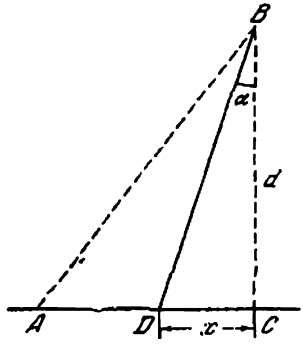


Fig. 271

tada por la línea quebrada ADB (fig. 271). Es necesario determinar para qué valor de x el tiempo será el mínimo. El tiempo del movimiento t es igual a:

$$t = \frac{\sqrt{d^2 + x^2}}{v_1} + \frac{S - x}{v_2} = \frac{v_2\sqrt{d^2 + x^2} - v_1 x + v_1 S}{v_1 v_2}.$$

Este tiempo será mínimo si $y = v_2\sqrt{d^2 + x^2} - v_1 x$ tiene el valor mínimo. Es evidente que x, correspondiente al tiempo mínimo t, no depende de la distancia S. Para determinar x que corresponda al valor mínimo de y, expresamos x por y y obtenemos una ecuación de segundo grado:

$$x^2 - \frac{2yv_1}{v_2^2 - v_1^2}x + \frac{v_2^2 d^2 - y^2}{v_2^2 - v_1^2} = 0.$$

La solución de esta ecuación conduce a la siguiente expresión:

$$x = \frac{v_1 y \pm v^2 \sqrt{y^2 + d^2 v_1^2 - v_2^2 d^2}}{v_2^2 - v_1^2}.$$

Ya que x no puede ser una magnitud compleja, $y^2 + d^2 v_1^2 \geqslant v_2^2 d^2$. El mínimo valor de y será igual a $y_{\min} = d\sqrt{v_2^2 - v_1^2}$. A este valor de y le corresponde el valor de $x = dv_1/\sqrt{v_2^2 - v_1^2}$. Si $S \leqslant dv_1/\sqrt{v_2^2 - v_1^2}$, entonces es necesario desde el comienzo nadar por la recta AB en dirección al punto B. En caso contrario, es preciso recorrer por la orilla una distancia $AD = S - dv_1/\sqrt{v_2^2 - v_1^2}$, y después nadar en dirección a B. Subrayemos que para el trayecto correspondiente al tiempo mínimo, $\operatorname{sen} \alpha = v_1/v_2$.

11. El autobús se encuentra en el punto A y el hombre en el punto B (fig. 272). El punto C es el lugar donde se encuentran los dos,

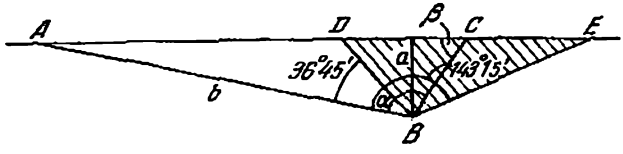


Fig. 272

α es el ángulo entre la dirección hacia el autobús y la que debería recorrer el hombre, $AC = v_1 t_1$, $BC = v_2 t_2$, donde t_1 y t_2 son los tiempos del movimiento del autobús y el hombre hasta el punto C. Del ΔABC vemos que $AC = b \operatorname{sen} \alpha / \operatorname{sen} \beta$, donde $\operatorname{sen} \beta = a/BC$. Por consiguiente, $\operatorname{sen} \alpha = \frac{a}{b} \frac{v_1 t_1}{v_2 t_2}$. Según la condición del problema $t_1 \geqslant t_2$, por eso $\operatorname{sen} \alpha \geqslant av_1/bv_2 = 0{,}6$. De donde obtenemos que $36°45' \leqslant \alpha \leqslant 143°15'$.

Las direcciones por las cuales puede correr el hombre, se encuentran dentro de los límites del ángulo DBE. Corriendo a lo largo de BD ó BE, el hombre alcanzará la autopista simultáneamente con el autobús. Cualquier punto de la autopista que se halle entre los puntos D y E, el hombre alcanzará antes de la llegada del autobús.

12. La velocidad mínima puede determinarse según las siguientes condiciones: $t_1 = t_2$, $\operatorname{sen} \alpha = av_1/bv_2 = 1$. De éstas obtenemos $v_2 = \left(\frac{a}{b}\right) v_1 = 2{,}4$ m/s, siendo $\alpha = 90°$. Por lo tanto la dirección en que debe correr el hombre es perpendicular a la del autobús.

13. Un punto arbitrario D de la autopista el autobús alcanza en un tiempo $t = l/v_1$, donde l es la longitud del trayecto AD de la autopista. A este mismo punto en un intervalo de tiempo igual o menor que t, el hombre podrá llegar, si él se encuentra dentro de los límites del círculo de radio $r = v_2 t$ y con el centro

en el punto D. Dibujando círculos semejantes para otros puntos situados en la autopista, encontramos la región buscada. Los límites de esta región son dos tangentes comunes a los círculos.

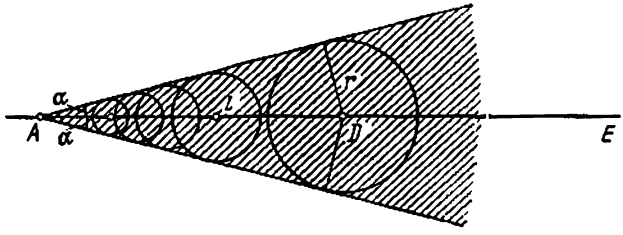


Fig. 273

El ángulo α, formado por los límites con la autopista, se determina según la igualdad $\operatorname{sen} \alpha = r/l = v_2/v_1$ (fig. 273).

14. La velocidad del bote v respecto a la orilla, está dirigida hacia AB (Fig. 274). Es evidente que $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{u}$. Son conocidas:

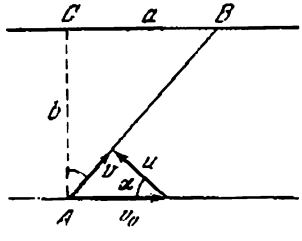


Fig. 274

la dirección del vector $\mathbf{v}$, así como el valor y el sentido del vector $\mathbf{v}_0$. El vector $\mathbf{u}$ tendrá el valor mínimo, como se ve de la figura cuando $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$. De esta manera

$$u_{\text{mín}} = v_0 \cos \alpha, \qquad \cos \alpha = b / \sqrt{a^2 + b^2}.$$

15. Supongamos que la velocidad u esté dirigida bajo un ángulo α con relación a la orilla (fig. 275). De esta manera resulta que:

$$(u \cos \alpha - v)\, \tau = BC = a, \quad (u \operatorname{sen} \alpha)\, \tau = AC = b,$$

donde τ es el tiempo de movimiento del bote. Excluyendo α de estas ecuaciones, obtendremos:

$$(u^2 - v^2)\, \tau^2 - 2va\tau - (a^2 + b^2) = 0.$$

Resolviendo esta ecuación, recibimos $\tau = 15/21$ horas. Por lo tanto, es imposible recorrer la distancia AB en 30 minutos.

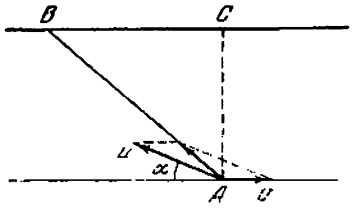


Fig. 275

16. Sea $\mathbf{u}_0$ la velocidad del viento respecto a la gasolinera. Entonces la bandera en la gasolinera estará dirigida a lo largo de $\mathbf{u}_0$. Si $\mathbf{v}$ es la velocidad de la gasolinera con relación a la orilla,

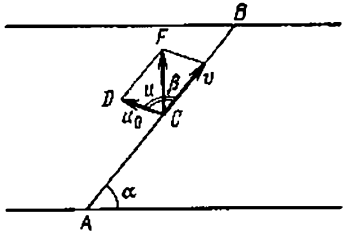


Fig. 276

tenemos que $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{v}$ (fig. 276). En el $\triangle FCD$, $\angle DCF = \beta + \alpha - \pi/2$ y el $\angle FDC = \pi - \beta$. Según el teorema de los senos

$$\frac{v}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta-\pi/2)} = \frac{u}{\operatorname{sen}(\pi-\beta)}.$$

De esta igualdad resulta: $v = u\,\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta-\pi/2)}{\operatorname{sen}(\pi-\beta)}$. Determinar la velocidad de la corriente del río por la velocidad conocida de la gasolinera respecto a la orilla, es imposible, ya que desconocemos la dirección de la gasolinera en movimiento respecto al agua.

17. Introduzcamos las siguientes designaciones: $\mathbf{u}_{12}$ es la velocidad del segundo automóvil respecto al primero, $\mathbf{u}_{21}$ es la velocidad

del primer automóvil respecto al segundo. Es evidente que: $u_{12} = u_{21}$ y $u_{12}^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos\alpha$ (fig. 277). El tiempo que buscamos es $t = S/u_{12}$.

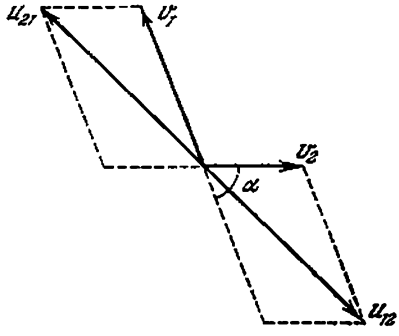


Fig. 277

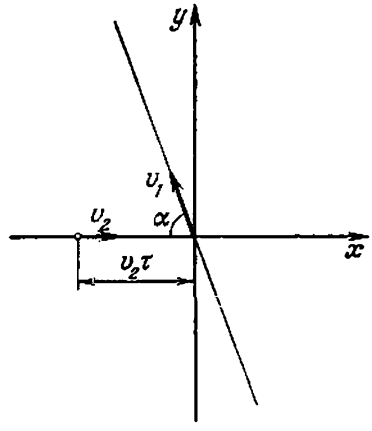


Fig. 278

18. Tomemos el momento del paso por el cruce del primer automóvil como origen de la lectura del tiempo. En el sistema de coordenadas representado en la fig. 278, el movimiento de los automóviles está expresado por las ecuaciones:

$$x_1 = -(v_1 \cos\alpha)\, t, \qquad y_1 = (v_1 \operatorname{sen}\alpha)\, t,$$
$$x_2 = -v_2\tau + v_2 t, \qquad y_2 = 0.$$

La distancia entre los automóviles en cualquier momento de tiempo es igual a:

$$S = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y - y_2)^2}.$$

Sustituyendo en esta ecuación los valores de x y y, recibimos que:

$$S^2 = (v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos\alpha)\, t^2 -$$
$$-2v_2\,(v_1 \cos\alpha + v_2)\,\tau t + v_2^2\tau^2.$$

Encontrando el mínimo del trinomio cuadrado, obtenemos la distancia mínima que es

$$S_{\text{mín}} = \frac{v_1 v_2}{u_{12}}\,\tau \operatorname{sen}\alpha$$

(véase la resolución del problema 17).

19. Durante el tiempo Δt la recta AB se desplazará en una distancia igual a $v_1 \Delta t$, la recta CD, en una distancia igual a $v_2 \Delta t$. Debido a ello, el punto de intersección de las rectas pasará para el punto O' (fig. 279). El desplazamiento OO' del punto

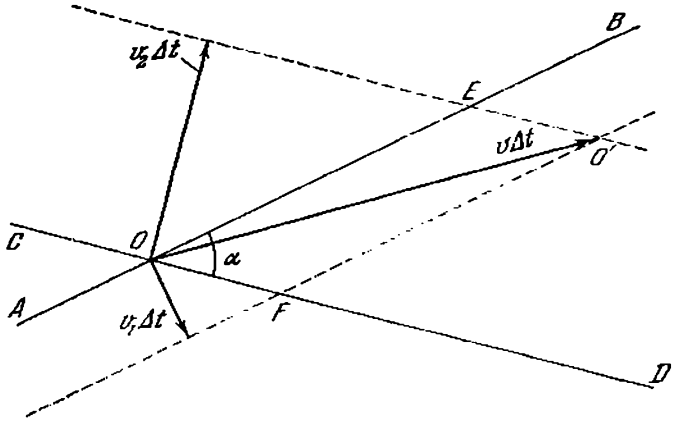


Fig. 279

de intersección de las rectas se obtiene del triángulo OFO' ó OEO', donde $OF = v_1 \Delta t/\text{sen}\,\alpha = EO'$. $OE = v_2 \Delta t/\text{sen}\,\alpha = FO'$:

$$OO' = \sqrt{OF^2 + OE^2 + 2OF \cdot OE \cos\alpha} = v\Delta t;$$

de ahí recibimos que:

$$v = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha} \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos\alpha}.$$

§ 2. CINEMATICA DEL MOVIMIENTO RECTILINEO IRREGULAR Y UNIFORMEMENTE ALTERNO

20. Sea S el camino recorrido por el punto en 5 s, numéricamente igual al área encerrada entre la línea quebrada $Oabcd$ y el eje de tiempo (fig. 280): $S_1 = 10{,}5$ cm. La velocidad media de movimiento del punto en 5 s es $v_1 = S_1/t_1 = 2{,}1$ cm/s. La aceleración media del punto en este mismo intervalo de tiempo es $a_1 = \Delta v/t_1 = 0{,}8$ cm/s². El camino recorrido en 10 s es igual

a $S_2 = 25$ cm. Por consiguiente la velocidad media y la aceleración media son iguales a: $v_2 = S_2/t_2 = 2.5$ cm/s y $a_2 = 0.2$ cm/s².

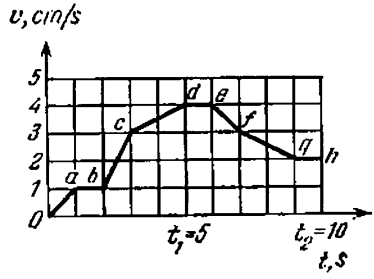


Fig. 280

21. En un pequeño intervalo de tiempo Δt la proa del bote se desplazará del punto A al punto B (fig. 281). $AB = v_1 \Delta t$, donde v_1 es la velocidad del bote. En este mismo intervalo

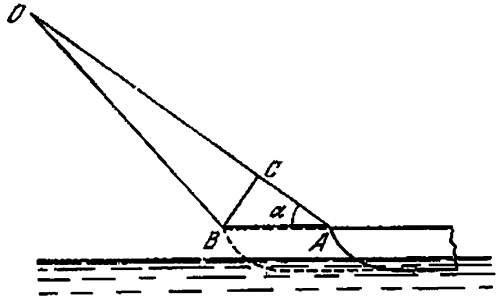


Fig. 281

de tiempo será recogido un pedazo de la cuerda $OA - OB = CA = v\,\Delta t$. El ΔABC puedo considerarse rectangular, ya que $AC \ll OA$. Por consiguiente, $v_1 = v/\cos\alpha$.

22. Supongamos que en el momento inicial $t = 0$ el objeto se encontraba en el punto S (fig. 282) y en el momento de tiempo igual a t adquirió la posición CD. La semejanza de los ΔSCD y ΔSBA nos conduce a la igualdad $AB = hl/SD = hl/v_1 t$. La velocidad del punto B, en el momento de tiempo dado, será igual a $v_2 = BB'/\Delta t$, con la condición de que el tiempo Δt, durante el cual el extremo de la sombra se desplaza a una distancia igual a BB' tienda a cero. Puesto que:

$$BB' = AB - AB' = \frac{hl}{v_1}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+\Delta t}\right) = \frac{hl\Delta t}{t(t+\Delta t)},$$

entonces $v_2 = \frac{hl}{v_1 t (t + \Delta t)}$, o, considerando que $\Delta t \ll t$, recibimos:

$$v_2 = \frac{hl}{v_1 t^2}.$$

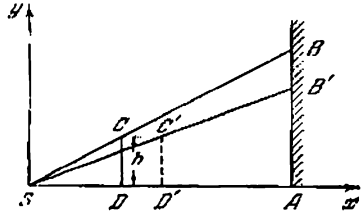


Fig. 282

23. Para el movimiento uniformemente acelerado tenemos $x = x_0 + v_0 t + at^2/2$. De esta manera, $v_0 = 35$ cm/s, $a = 82$ cm/s² y $x_0 = 11$ cm, donde x_0 es la coordenada inicial del punto.

24. $$a = \frac{2}{t_3 - t_1}\left(\frac{x_3 - x_1}{t_3 - t_2} - \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\right) = 5 \text{ cm/s}^2.$$

25. Del gráfico de la velocidad (véase la fig. 8) se deduce que la velocidad inicial $v_0 = 4$ cm/s ($OA = 4$ cm/s). La aceleración $a = OA/OB = 1$ cm/s². Inicialmente la velocidad del cuerpo disminuye. En el momento $t_1 = 4$ s la velocidad del cuerpo es igual a cero y después aumenta en magnitud. El segundo gráfico (véase la fig. 9) representa también un movimiento uniformemente alterno. Hasta pararse el cuerpo recorre una distancia igual a $h = 10$ cm. Según el gráfico anterior el camino recorrido hasta la parada es numéricamente igual al área del ΔOAB, o sea, 8 cm. Por lo tanto, los gráficos representan diferentes movimientos. Al segundo gráfico le corresponde otra velocidad inicial: $v_0' = 2h/t_1 = 5$ cm/s y otra aceleración: $a' = 2h/t_1^2 = 1{,}25$ cm/s².

26. El gráfico de movimiento del segundo automóvil tiene la forma de una parábola representada en la fig. 283. Es evidente que la velocidad del primer automóvil no puede ser excesivamente grande, porque en este caso el adelantamiento ocurre una sola vez (el punto B en la fig. 283, ya que el punto A corresponde al encuentro de los automóviles). La velocidad tampoco puede ser excesivamente pequeña (la recta OC en la fig. 283), puesto que, en el caso contrario, los automóviles jamás pasarán el uno al lado del otro. De tal modo, la ecuación que expresa la igualdad de las coordenadas de los automóviles: $v_1 t = l - v_0 t + at^2/2$ debe tener dos soluciones reales, además,

ambas corresponden a momentos ulteriores de tiempo, que el

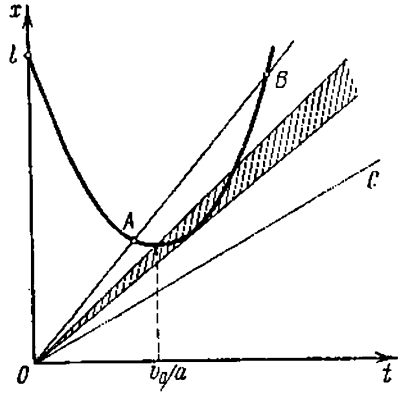


Fig. 283

momento de parada (instantánea) del segundo automóvil, determinada por la igualdad $-v_0 + at = 0$. De las dos condiciones se deduce que:

$$\sqrt{2al} - v_0 < v_1 < \frac{al}{v_0} - \frac{v_0}{2},$$

ó 8 m/s $< v_1 <$ 9 m/s.

27. La mayor velocidad de la bola, al tocar el soporte será igual a $v_{máx} = \sqrt{2gH}$. Al chocar, la velocidad de la bola obtendrá

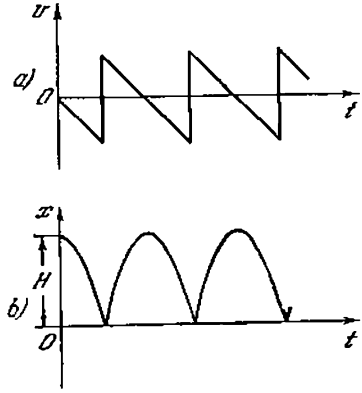


Fig. 284

la dirección contraria, permaneciendo invariable en magnitud absoluta. El gráfico de velocidad está representado en la fig. 284, *a*. En la fig. 284, *b* se representa la variación de la coordenada en función del tiempo.

28. El tiempo de caída de la primera bola es $t_1 = \sqrt{2h_1/g} = 0{,}3$ s. La relación de las velocidades máximas de las bolas es $v_2/v_1 = \sqrt{h_2/h_1} = 1/2$. Como se deduce del gráfico de velocidades (fig. 285), el tiempo mínimo es $\tau = 0{,}3$ s. Además, la segunda

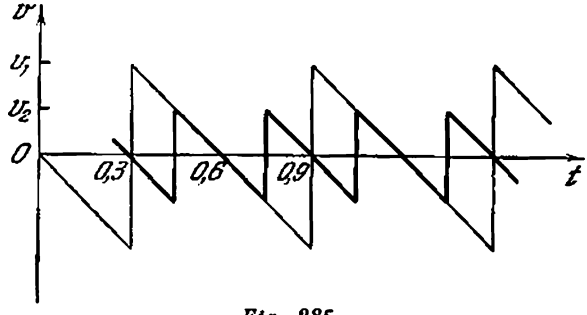


Fig. 285

bola puede iniciar la caída cada 0,6; 0,9; 1,2 s, etc., después del comienzo de la caída de la primera bola. El tiempo t, durante el cual las velocidades de ambas bolas coinciden, es igual a 0,3 s. El proceso se repite periódicamente cada 0,6 s.

29. Las ecuaciones originales son las siguientes:

$$gt^2/2 = n, \quad g(t-\tau)^2/2 = n-1,$$

donde τ es el tiempo de movimiento del cuerpo en el enésimo centímetro del trayecto. De ahí resulta que:

$$t = \sqrt{\frac{2n}{g}}, \qquad t-\tau = \sqrt{\frac{2(n-1)}{g}},$$

$$\tau = \sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right).$$

30. Designando por x_1 y v_1 la coordenada y la velocidad del primer cuerpo respecto a la torre y por x_2 y v_2, la coordenada y la velocidad del segundo, podemos escribir las siguientes ecuaciones:

$$x_1 = v_0 t - gt^2/2, \qquad v_1 = v_0 - gt,$$

$$x_2 = -v_0(t-\tau) - g(t-\tau)^2/2, \qquad v_2 = -v_0 - g(t-\tau).$$

(Aquí consideramos como positiva la dirección hacia arriba.) La velocidad del primer cuerpo, con relación al segundo, es igual a $u = v_1 - v_2 = 2v_0 - g\tau$ y no cambia con el tiempo. La distancia entre los cuerpos es igual a

$$S = x_1 - x_2 = (2v_0 - g\tau)t - v_0\tau + g\tau^2/2.$$

Un cuerpo con relación al otro se mueve uniformemente y por lo tanto la distancia entre ellos cambia linealmente con el tiempo.

31. Según las condiciones del problema $AA' = vt$, $CC' = at^2/2$ (fig. 286). De la semejanza de los triángulos $AA'O$, $BB'O$ y $CC'O$, tenemos:

$$AA'/AO = BB'/BO = CC'/CO.$$

Como vemos en la fig. 286, $AO = AB + BO$, $CO = BC - BO$. Estas relaciones permiten determinar que

$$BB' = \frac{(AA' - CC')}{2} = \frac{vt}{2} - \frac{at^2}{4}.$$

De este modo, el punto B se mueve con velocidad inicial $v/2$ dirigida hacia arriba y con aceleración constante $a/2$, dirigida

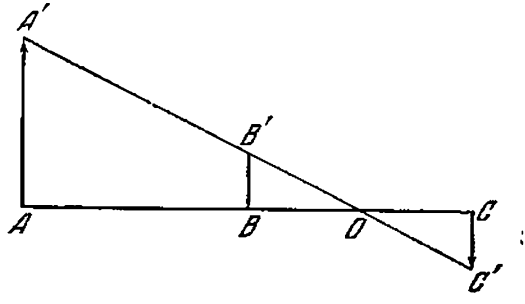


Fig. 286

hacia abajo. Alcanzando una altura igual a $h = v^2/4a$, el punto se moverá hacia abajo.

32. El valor de la aceleración del libro respecto al suelo del ascensor no depende de la dirección del movimiento del ascensor (dirección de su velocidad), sino de la dirección de la aceleración del ascensor. Si la aceleración del ascensor está dirigida hacia arriba, la aceleración del libro será igual a $g + a$. Si su aceleración está dirigida hacia abajo, la aceleración del libro será igual a $g - a$.

33. En el momento del encuentro de todos los automóviles, los dos primeros tienen una velocidad única igual a v_2, con relación al tercero que se mueve uniformemente. En relación a la carretera las velocidades de los automóviles son iguales a $(v_2 + v_1)$ y $(v_2 - v_1)$. Por eso, la parada (instantánea) de uno de los automóviles tendrá lugar antes del primer encuentro, después del intervalo de tiempo igual a $(v_2 + v_1)/a$ y la segunda, después del intervalo de tiempo igual a $(v_2 - v_1)/a$. La parada

de uno de los automóviles atrasa tanto, cuanto su partida. Por consiguiente, el tiempo de atraso incógnito es

$$t = \frac{(v_1 + v_2)}{a} - \frac{(v_2 - v_1)}{a} = \frac{2v_1}{a}.$$

34. Si la velocidad del ascensor no cambiase, entonces la bola saltaría a una altura H. En el sistema de referencia que tiene una velocidad constante, igual a la velocidad del ascensor, en el momento cuando la bola comienza a caer, el ascensor sube a una altura $h_1 = a\tau^2/2$ en un intervalo de tiempo τ y, durante el siguiente intervalo de tiempo igual a τ, sube aún más, a la altura $h_2 = a\tau^2 - a\tau^2/2$. La altura total de elevación es $h = h_1 + h_2 = a\tau^2$. La altura incógnita, a la cual saltará la bola sobre el suelo del ascensor, es $x = H - h = H - a\tau^2$

35. En el intervalo de tiempo t de caída libre el cuerpo A recorrerá por la vertical el trayecto $S_1 = gt^2/2$. Durante el mismo intervalo de tiempo la cuña deberá desplazarse a una distancia

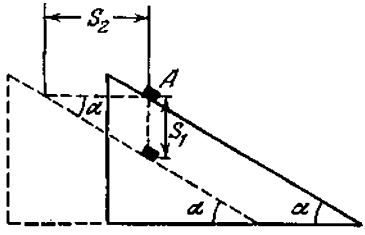


Fig. 287

$S_2 = at^2/2$. Si el cuerpo todo el tiempo toca la cuña, es evidente (se ve en la fig. 287) que $S_2/S_1 = \operatorname{ctg} \alpha$. De esta manera resulta que la aceleración buscada es $a = g \operatorname{ctg} \alpha$. Si la aceleración de la cuña en dirección horizontal será mayor que $g \operatorname{ctg} \alpha$, entonces el cuerpo se desprende de la cuña.

§ 3. CINEMATICA DEL MOVIMIENTO CURVILINEO

36. La aceleración total de la bola en cualquier punto de la trayectoria, es igual a g (aceleración de caída libre). La aceleración normal es $a_n = g \operatorname{sen} \alpha$, donde α es el ángulo formado por la tangente a la trayectoria con la vertical. La aceleración tangencial es $a_\tau = g \cos \alpha$. De las consideraciones geométricas elementales, se puede obtener:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2\tau^2}}, \qquad \cos \alpha = \frac{g\tau}{\sqrt{v_0^2 + g^2\tau^2}}.$$

Por lo tanto

$$a_n = g\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2+g^2\tau^2}}, \qquad a_\tau = g\frac{g\tau}{\sqrt{v_0^2+g^2\tau^2}}.$$

37. El movimiento del cuerpo puede ser analizado como la superposición del movimiento por la circunferencia de radio R en un plano horizontal y de la caída por la vertical. Así la velocidad v del cuerpo, en un momento dado, puede ser considerada como una suma geométrica de dos componentes: $v_1 = v\cos\alpha$, que está dirigida horizontalmente, y $v_2 = v\,\text{sen}\,\alpha$, que está dirigida verticalmente (fig. 288). El ángulo α es el ángulo

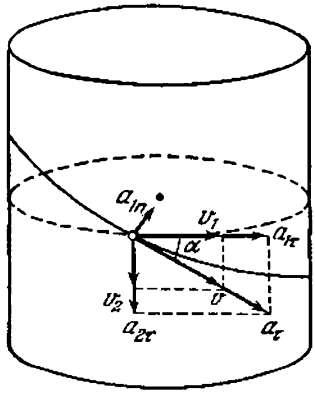


Fig. 288

formado por la línea helicoidal del canal con la horizontal. La aceleración del cuerpo en el movimiento curvilíneo es igual a la suma geométrica de las aceleraciones tangencial y normal. La aceleración normal que corresponde al movimiento por la circunferencia es $a_{1n} = v_1^2/R = v^2\cos^2\alpha/R$. El movimiento por la vertical es rectilíneo por eso $a_{2n} = 0$.

La aceleración incógnita es $a = \sqrt{a^2_{1\tau} + a^2_{2\tau} + a^2_{1n}}$, donde $a_{\tau 1}$ y $a_{2\tau}$ son las aceleraciones tangenciales correspondientes al movimiento circular y a lo largo de la vertical. La aceleración tangencial total, evidentemente, es igual a $a_\tau = \sqrt{a^2_{1\tau} + a^2_{2\tau}}$. Podemos encontrarla si desenvolvemos mentalmente en el plano la superficie del cilindro, en la cual está atornillado el canal helicoidal. En este proceso el canal se transforma en un plano inclinado de altura nh y de longitud de la base $2\pi Rn$. Está claro que $a_\tau = g\,\text{sen}\,\alpha = gh/\sqrt{h^2 + 4\pi^2R^2}$. Para la determinación de a_{1n} encontramos v, partiendo del principio de conservación de la energía: $mv^2/2 = mghn$. Por lo tanto, $v^2 = 2ghn$ y $a_{1n} = 8\pi^2nhgR/(h^2 + 4\pi^2R^2)$. Susti-

tuyendo las aceleraciones encontradas a_τ y a_{1n} en la expresión para la aceleración incógnita, recibimos:

$$a = \frac{gh\sqrt{h^2 + 4\pi^2 R^2 + 64\pi^4 n^2 R^2}}{h^2 + 4\pi^2 R^2}.$$

38. Tomemos como origen de referencia del sistema de coordenadas el punto A, punto de partida del bote. La dirección de los ejes está indicada en la fig. 289. El movimiento del bote en

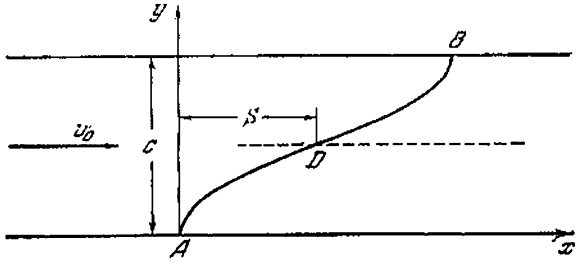


Fig. 289

dirección perpendicular a la corriente sucede con una velocidad constante u. Por eso el bote se encontrará a una distancia y de la orilla dentro del tiempo $t = y/u$ después de la partida. Examinemos el movimiento del bote hasta el medio del río ($y \leqslant c/2$). A una distancia y de la orilla la velocidad de la corriente será $v = \frac{2v_0}{c} y$.

Sustituyendo $y = ut$ en la expresión de la velocidad de la corriente obtenemos que: $v = 2v_0 ut/c$. De la última relación se deduce que el movimiento del bote en dirección paralela a las orillas será realizado con aceleración constante $a = 2v_0 u/c$. El bote alcanzará el medio del río durante el tiempo $T = c/2u$. En este mismo intervalo de tiempo, el bote será llevado aguas abajo a una distancia $S = aT^2/2 = v_0 c/4u$. Al moverse desde el medio del río (punto D) hasta la orilla opuesta, el bote será llevado por la corriente a una distancia adicional S. De tal modo, la distancia buscada será igual a $v_0 c/2u$. Durante el movimiento del bote hasta el medio del río, tenemos: $x = \frac{at^2}{2} = \frac{v_0 u}{c} t^2$ e $y = ut$. De estas relaciones determinamos la trayectoria del bote desde el punto A hasta D: $y^2 = \frac{cu}{v_0} x$ (parábola). La segunda mitad de la trayectoria (DB) tendrá el mismo carácter que la primera.

39. La ley de movimiento del carrito A es $y = vt$. La ley de movimiento del carrito B es $x = \sqrt{l^2 - v^2 t^2}$. El movimiento del carrito B a lo largo del carril horizontal puede ser representado

como la suma de dos movimientos independientes: un movimiento verticalmente hacia arriba con velocidad v y un movimiento de rotación alrededor del punto A, con cierta velocidad w ($w \perp l$). Mediante las consideraciones geométricas elementales deducimos que $\frac{u}{vt} = \frac{v}{x}$, donde x es la distancia del carrito B hasta el origen de las coordenadas. De ahí obtenemos $u = -v^2t/\sqrt{l^2 - v^2t^2}$.

40. Las coordenadas y las velocidades del cuerpo respecto al sistema de referencia representado en la fig. 290, en cualquier momento de tiempo se determinan por las siguientes expresiones:

$$x = v_{0x}t, \quad (1) \qquad v_x = v_{0x}, \quad (3)$$
$$y = v_{0y}t - gt^2/2 \quad (2) \qquad v_y = v_{0y} - gt. \quad (4)$$

En estas expresiones $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$ y $v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\alpha$ son las proyecciones de la velocidad inicial en los ejes x e y, respectivamente. Las ecuaciones (1), (2), (3) y (4) permiten responder a todas las preguntas planteadas en el problema. El tiempo de vuelo T se determina por la ecuación (2). Para $y = 0$, tenemos $(v_0 \operatorname{sen}\alpha)\, T - gT^2/2 = 0$, de donde $T = 2v_0 \operatorname{sen}\alpha/g$. La distancia del vuelo es $L = (v_0 \cos\alpha)\, T = v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha/g$. El valor máximo de L se obtiene para $\alpha = 45°$. En este caso tenemos $L_{\text{máx}} = v_0^2/g$. La altura, en la cual se encontrará el cuerpo, pasado un tiempo τ, es igual a $h = (v_0 \operatorname{sen}\alpha)\,\tau - g\tau^2/2$. La velocidad del cuerpo en el momento de tiempo τ es $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, donde $v_x = v_0 \cos\alpha$ y $v_y = v_0 \operatorname{sen}\alpha - g\tau$. De ahí la velocidad es $v = \sqrt{v_0^2 + g^2\tau^2 - 2v_0 g\tau \operatorname{sen}\alpha}$. Esta velocidad forma con la vertical un ángulo β que se determina por la igualdad $\operatorname{tg}\beta = v_0 \cos\alpha/(v_0 \operatorname{sen}\alpha - g\tau)$.

41. Las coordenadas del cuerpo x e y cambian con el tiempo según la ley:

$$y = (v_0 \operatorname{sen}\alpha)\, t - gt^2/2, \qquad x = (v_0 \cos\alpha)\, t.$$

Excluyendo de estas expresiones el tiempo, recibimos la siguiente ecuación:

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}\, x^2 + (\operatorname{tg}\alpha)\, x.$$

Esta es la ecuación de una parábola. Designando por x_0 e y_0 las coordenadas del vértice de la parábola (punto A en la fig. 290), podemos escribir la ecuación de la trayectoria de la siguiente forma: $y - y_0 = k\,(x - x_0)^2$, donde:

$$k = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}, \qquad y_0 = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{2g}, \qquad x_0 = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{2g}.$$

42. La trayectoria de la pelota pasa por el punto con coordenadas H y S. Por lo tanto (véase el problema 41): $H = -gS^2/2v_0^2 \times \times \cos^2\alpha + S \operatorname{tg}\alpha$. De esta expresión recibimos: $v_0^2 = = gS^2/2\cos^2\alpha\,(S \operatorname{tg}\alpha - H) = gS^2/(S \operatorname{sen} 2\alpha - H\cos 2\alpha - H) =$

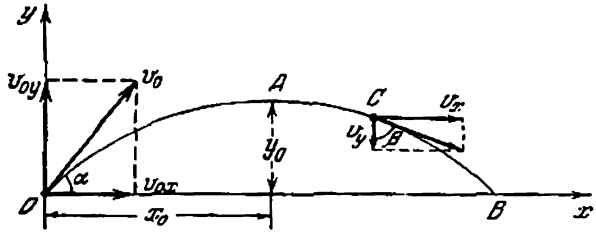


Fig. 290

$= gS^2/[\sqrt{S^2 + H^2} \operatorname{sen}(2\alpha - \varphi) - H]$, donde $\operatorname{tg}\varphi = H/S$. El valor mínimo de v_0 se obtiene para $\alpha = \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}$ y es:

$$v_0 = \sqrt{gS^2/(\sqrt{S^2+H^2} - H)} = \sqrt{g(\sqrt{S^2+H^2} + H)}.$$

43. (fig. 291)

$$(v_0 \cos\alpha)\,t = D/2, \qquad (v_0 \operatorname{sen}\alpha)\,t - gt^2/2 = H,$$

$$t = \frac{D}{2v_0\cos\alpha}, \qquad \frac{D}{2}\operatorname{tg}\alpha - \frac{gD^2}{8v_0^2}(1 - \operatorname{tg}^2\alpha) = H,$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha - \frac{4v_0^2}{gD}\operatorname{tg}\alpha + \left(\frac{8Hv_0^2}{gD} + 1\right) = 0.$$

Conociendo D, de la última ecuación recibimos dos valores para α que corresponden a las trayectorias curva y recta, o dos

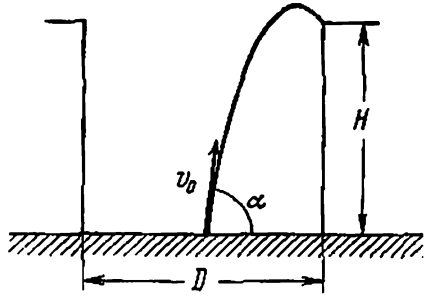


Fig. 291

valores iguales (en un caso crítico), o ninguno (fragmento de granada no alcanza el borde del pozo). De este modo el pozo

debe ser tal que esta ecuación no tenga soluciones:

$$\left(\frac{4v_0^2}{gD}\right) \leqslant 4\left(\frac{8Hv_0^2}{gD^2}+1\right),$$

$$D^2 \geqslant \frac{4v_0^2}{g^2}(v_0^2-2gH).$$

De estas expresiones se deduce que si $v_0 < \sqrt{2gH}$, entonces D puede tener cualquier valor; si $v_0 \geqslant \sqrt{2gH}$, entonces

$$D \geqslant \frac{2v_0}{g}\sqrt{v_0^2-2gH}, \qquad D_{\min}=\frac{2v_0}{g}\sqrt{v_0^2-2gH}.$$

44. Las coordenadas y las velocidades del cuerpo en cualquier momento de tiempo respecto al sistema de referencia, representado en la fig. 292, se determina por las mismas ecuaciones

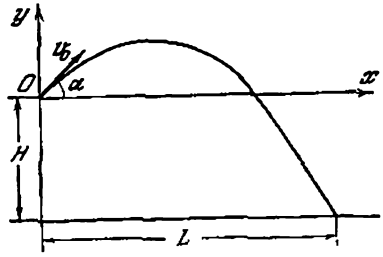


Fig. 292

que en el problema 41. En el momento de caída en el agua, la coordenada del cuerpo es $y = -H$. Por eso el tiempo de vuelo T se determina por la ecuación:

$$-H = (v_0 \operatorname{sen} \alpha)\, T - gT^2/2.$$

De esta expresión recibimos que

$$T = \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha \pm \sqrt{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + 2gH}}{g}.$$

Puesto que $T > 0$, es preciso tomar el signo positivo. La distancia hasta la orilla es

$$L = v_0 \cos \alpha \cdot T = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{2g} + \frac{v_0 \cos \alpha}{g}\sqrt{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + 2gH}.$$

El tiempo necesario para que el cuerpo alcance una altura h sobre el agua es

$$T = \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha \pm \sqrt{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + 2g(H-h)}}{g}.$$

Si $|h| < |H|$, entonces existe sentido físico solamente para el signo positivo. Para $h \geqslant H$ existe sentido físico para ambas soluciones. El cuerpo, durante su caída, estará dos veces a la misma altura sobre el agua.

La velocidad final v puede ser encontrada con más facilidad mediante el principio de conservación de la energía:

$$mv_0^2/2 + mgH = mv^2/2.$$

De esta ecuación se deduce que

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gH}.$$

45. En el sistema de referencia, representado en la fig. 293, las coordenadas de la piedra en cualquier momento de tiempo

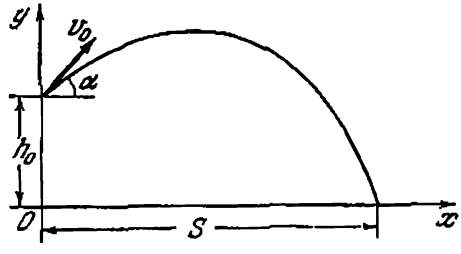


Fig. 293

se determinan por las siguientes ecuaciones:

$$x = (v_0 \cos\alpha)\, t, \qquad y = h_0 + (v_0 \operatorname{sen}\alpha)\, t - gt^2/2.$$

En el momento de caída de la piedra $y = 0$ y $x = S$, donde S es la distancia de vuelo de la piedra. Resolviendo estas ecuaciones con relación al ángulo α, recimos que

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_0^2}{gS}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2gh_0}{v_0^2} - \frac{g^2S^2}{v_0^4}}\right).$$

Esta expresión tiene sentido solamente para

$$1 + \frac{2gh_0}{v_0^2} - \frac{g^2S^2}{v_0^4} \geqslant 0.$$

De ahí obtenemos que $S \leqslant v_0 \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}/g$, de esta manera, $S_{\text{máx}} = v_0 \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}/h$. Para valores menores de S a cada valor de S le corresponden dos valores del ángulo α, cuya diferencia es tanto menor cuanto más próximos sean los valores de S al máximo. Por lo tanto, para la distancia máxima de vuelo

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_0^2}{gS_{\text{máx}}} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh_0}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \alpha = 30°.$$

46. El movimiento del cuerpo se describe por las ecuaciones:

$$h+(v_0 \operatorname{sen} \alpha)\, t-\frac{gt^2}{2}=0,$$

$$(v_0 \cos \alpha)\, t=S.$$

De donde recibimos:

$$v_0^2=\frac{gS^2}{2\cos^2\alpha\,(h+S \operatorname{tg}\alpha)}=\frac{gS^2}{2}\,\frac{1}{h\cos^2\alpha+S \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}=$$

$$=gS^2\,\frac{1}{h\,(2\cos^2\alpha-1)+S \operatorname{sen} 2\alpha+h}=$$

$$=gS^2\,\frac{1}{h+(h\cos 2\alpha+S \operatorname{sen} 2\alpha)}=\frac{gS^2}{h+\sqrt{h^2+S^2}\cos(2\alpha-\varphi)},$$

donde φ es un ángulo cualquiera. Por consiguiente, tenemos:

$$v_{0\text{mín}}=S\sqrt{\frac{g}{h+\sqrt{h^2+S^2}}}=\sqrt{g\,(\sqrt{h^2+S^2}-h)}.$$

47. En cualquier momento de tiempo, el anteojo forma con la horizontal tal ángulo β, que $\operatorname{tg}\beta=y/x$, donde

$$y=(v_0 \operatorname{sen}\alpha)\, t-gt^2/2, \qquad x=(v_0\cos\alpha)\, t$$

(son las coordenadas del objeto). El vector de velocidad del objeto forma con la horizontal un ángulo φ, además $\operatorname{tg}\varphi = (v_0 \operatorname{sen}\alpha - gt)/(v_0\cos\alpha)$. Por la condición del problema: $\beta-\varphi=\pi/2$. Utilizando la fórmula $\operatorname{tg}(\beta-\varphi)=(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\varphi)/(1+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\varphi)$, recibimos la ecuación $g^2t^2-3g\times(v_0 \operatorname{sen}\alpha)\, t+2v_0^2=0$. Resolviendo esta ecuación, tenemos

$$t=\frac{v_0}{2g}\,[3 \operatorname{sen}\alpha\pm\sqrt{1-9\cos^2\alpha}].$$

Esta expresión tiene sentido solamente para $\cos\alpha\leqslant 1/3$ (se obtienen dos diferentes o iguales valores reales de t).

48. El trayecto S, recorrido por la bomba en dirección horizontal, es $S=\sqrt{L^2-H^2}=(v\cos\alpha)\, t$, donde t es el tiempo de caída de la bomba. El trayecto recorrido por la vertical es $H=(v \operatorname{sen}\alpha)\, t+gt^2/2$ (fig. 294). Excluyendo el tiempo de estas ecuaciones, obtenemos que

$$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{v^2}{gS}\pm\sqrt{\left(\frac{v^2}{gS}\right)^2+\frac{2Hv^2}{dS^2}-1},$$

La solución tiene sentido físico sólo teniendo el signo positivo. El signo negativo corresponde a $\alpha < 0$, o sea el caso en que la bomba se tira cuando el avión vuela hacia arriba.

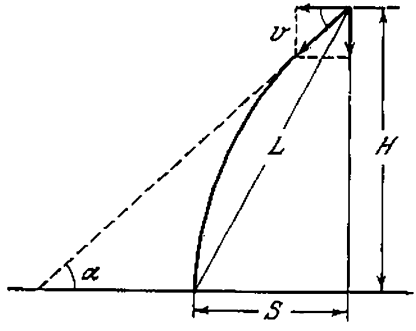


Fig. 294

49. La solución del problema se simplificará sensiblemente, si los ejes de las coordenadas están dirigidos a lo largo del plano inclinado y perpendicularmente a él. (fig. 295). En este caso,

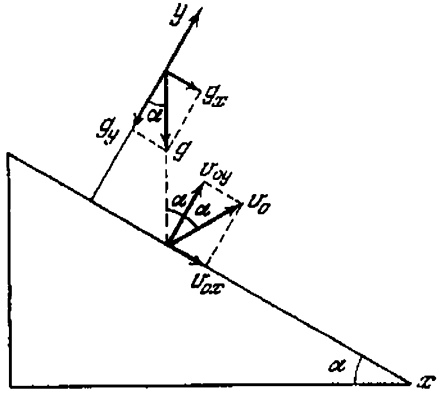


Fig. 295

las proyecciones de la aceleración de la bola en los ejes x e y serán iguales a $a_x = g_x = g$ sen α y $a_y = g_y = -g \cos \alpha$, respectivamente. La velocidad de la bola en el momento del primer choque con el plano inclinado será $v_0 = \sqrt{2gh}$. La velocidad inicial de la bola, después del primer choque, es v_0 y forma con el eje y un ángulo α (fig. 295). La distancia entre

los puntos del primero y segundo choques con el plano inclinado es

$$l_1 = (v_0 \operatorname{sen} \alpha)\, t_1 + \frac{(g \operatorname{sen} \alpha)\, t_1^2}{2},$$

donde t_1 es el tiempo de vuelo. Este tiempo se determina por la ecuación

$$(v_0 \cos \alpha)\, t_1 - (g \cos \alpha)\, t_1^2/2 = 0.$$

Resolviendo esta ecuación, obtenemos que $t_1 = 2v_0/g$ y $l_1 = 8h \operatorname{sen} \alpha$. La velocidad de la bola en el momento del segundo choque se determina por las igualdades:

$$v_{1x} = v_{0x} + a_x t_1 = v_0 \operatorname{sen} \alpha + (g \operatorname{sen} \alpha)\, t_1 = 3v_0 \operatorname{sen} \alpha,$$
$$v_{1y} = v_{0y} + a_y t_1 = v_0 \cos \alpha + (g \cos \alpha)\, t_1 = -v_0 \cos \alpha.$$

Terminados los choques, estas velocidades serán

$$v_{2x} = v_{1x}, \quad v_{2y} = -v_{1y}.$$

La distancia entre los puntos del segundo y tercer choques es igual a

$$l_2 = (3v_0 \operatorname{sen} \alpha)\, t_2 + (g \operatorname{sen} \alpha)\, t_2^2/2,$$

donde t_2 es el tiempo de vuelo. Puesto que la velocidad inicial a lo largo del eje y es la misma que durante el primer choque, entonces $t_2 = t_1$; y, por consiguiente, $l_2 = 16\, h \operatorname{sen} \alpha$.
De modo análogo puede demostrarse que la distancia entre los puntos siguientes es $l_3 = 24h \operatorname{sen} \alpha$. De este modo, recibimos la relación: $l_1 : l_2 : l_3 : \ldots = 1 : 2 : 3 \ldots$

50. Las componentes de las velocidades de los cuerpos a lo largo de los ejes x e y se determinan, en cualquier momento de tiempo, de la siguiente manera:

$$v_{1y} = v_0 \operatorname{sen} \alpha_1 - gt, \quad v_{2y} = v_0 \operatorname{sen} \alpha_2 - gt,$$
$$v_{1x} = v_0 \cos \alpha_1, \quad v_{2x} = -v_0 \cos \alpha_2.$$

Sea u la velocidad del primer cuerpo con relación al segundo. Entonces

$$u_y = v_0 \operatorname{sen} \alpha_1 - gt - v_0 \operatorname{sen} \alpha_2 + gt = v_0 (\operatorname{sen} \alpha_1 - \operatorname{sen} \alpha_2),$$
$$u_x = v_0 (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2).$$

De este modo, la velocidad u es igual a

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = 2v_0 \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}.$$

Los cuerpos se mueven el uno respecto al otro con velocidad constante. Pasado un intervalo de tiempo τ, la distancia entre ellos será

$$S = 2\left(v_0 \cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)\tau.$$

51. La velocidad de cualquier piedra, en un lanzamiento dirigido a la tierra, es igual a $v_{fin} = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$. Una piedra que vuela por una trayectoria más suave, posee la mayor velocidad horizontal que es igual a $h_{hor.máx} = v_0$. Por lo tanto,

$$\cos\varphi = v_0/\sqrt{v_0^2+2gh}, \text{ de donde } h = \frac{v_0^2}{2g}\operatorname{tg}^2\varphi.$$

52. La primera bola salta del suelo, teniendo la componente vertical de la velocidad $v_0 = \sqrt{2gh}$. Su coordenada vertical es $y_1 = v_0 t - gt^2/2$, mientras que la coordenada vertical de la segunda bola es $y_2 = h - gt^2/2$. En el momento de encuentro $y_1 = y_2$, de donde concluimos que las bolas se encontrarán a una altura de 0,75 h.

53. Según la solución del problema 43 deducimos que el proyectil no alcanzará el punto situado a una altura y, si la distancia horizontal de este punto hasta el cañón no satisface la desigualdad

$$r > \frac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2-2gy}.$$

Así, el límite de la llamada «zona peligrosa» se determina por la ecuación

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}r^2.$$

La sección de tal superficie (paraboloide) tiene la forma de una parábola que coincide con la trayectoria del proyectil, lanzado horizontalmente con velocidad v_0 del cañón, situado a una altura $H = v_0^2/2g$.

54. 1) Designemos por $L = na$ la longitud de la oruga. Entonces $l = (L - 2\pi R)/2$ es la distancia entre los ejes de las ruedas. En el movimiento de translación participan $n_1 = l/a = (L - 2\pi R)/2a$ eslabones. El igual número de eslabones se encuentra en reposo con relación a la tierra. En el movimiento giratorio toman parte $n_2 = 2\pi R/a$ eslabones.
2) El tiempo de movimiento del tractor es $t_0 = S/v$. En una rotación completa de la oruga, un eslabón recorre el trayecto $2l$, moviéndose de avance con velocidad igual a $2v$.
El tiempo del movimiento de avance del eslabón en una rotación es l/v. En total la oruga da $N = S/L$ vueltas. De este modo, el tiempo para el movimiento de avance de un eslabón

es $t_1 = Nl/v$. El eslabón permanece en reposo el mismo tiempo y participará en el movimiento giratorio durante el tiempo

$$t_2 = t_0 - \frac{2Nl}{v} = \frac{S + 2\pi lN - NL}{2v}.$$

Suponiendo que $S \gg L$, se puede considerar el número de rotaciones como entero, despreciando el tiempo de una vuelta incompleta de una oruga.

55. Designemos por R el radio que buscamos y por ω la velocidad angular del movimiento del tractor por el arco. Entonces resulta que $v_1 = \omega(R - d/2)$, $v_0 = \omega(R + d/2)$ (fig. 296). De estas ecuaciones recibimos que

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{R - d/2}{R + d/2}, \qquad R = \frac{d}{2}\,\frac{v_0 + v_1}{v_0 - v_1} = 6 \text{ m}.$$

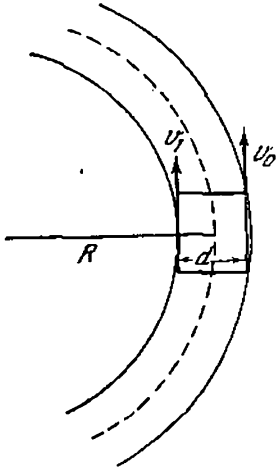


Fig. 296

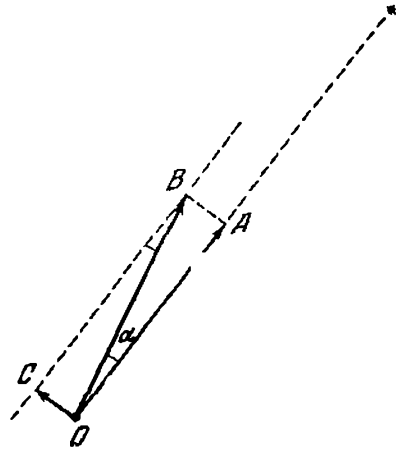


Fig. 297

56. Inicialmente el observador se encuentra en el polo (punto O, fig. 297). El eje de la Tierra pasa por el punto O perpendicularmente al diseño. OA (es paralelo a BC) está dirigido a la estrella. La montaña se encuentra a la derecha del punto A. $\alpha = \omega\,\Delta t$ es el ángulo en el cual gira el globo terrestre durante el tiempo Δt, ω es la velocidad angular de rotación de la Tierra. Para ver la estrella el observador debe recorrer, en este intervalo de tiempo, una distancia igual a $OC \approx OA\,\omega\,\Delta t$. La velocidad del observador es $v = OC/\Delta t = OA\,\omega = 0{,}7$ m/s.

57. 1) En el intervalo de tiempo de una rotación completa T, el disco recorrerá un trayecto igual a la longitud de la circunferencia del disco, es decir, $S = 2\pi r$, donde r es el radio del disco. De esta manera, la velocidad de avance de cual-

quier punto del disco es $v_{avan} = 2\pi r/T = v$. Por otro lado, la velocidad lineal de rotación con relación al centro O de los puntos que se encuentran en el diámetro exterior del disco, es igual a $v_{lin} = \omega r$, dondo ω es la velocidad angular de rotación. En estas condiciones tenemos $\omega = 2\pi/T$, entonces $v_{lin} = 2\pi r/T = v_{avan}$, lo que se tenía que demostrar.

2) La velocidad de los puntos del diámetro exterior con relación a un observador inmóvil, está compuesta de dos velocidades: el movimiento de avance y giratorio. Para el punto A la velocidad resultante será $2v$. Para los puntos B y D las velocidades son iguales en valor absoluto, y su suma es igual a $\sqrt{2}v$ (fig. 298, *a*). Para el punto C la velocidad resultante con

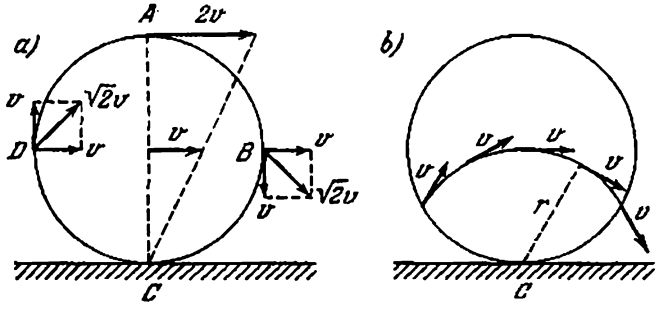


Fig. 298

relación a un observador inmóvil, es igual a cero, ya que las velocidades de los movimientos de avance y giratorio son iguales en valor absoluto y están dirigidas en sentidos opuestos.

3) Las velocidades instantáneas de los puntos del diámetro AC crecen directamente proporcional a la distancia del punto C. Por eso, el movimiento del disco, en un determinado momento de tiempo, puede ser analizado como el movimiento giratorio alrededor de su punto de contacto con el plano. El eje que pasa por el punto C, perpendicularmente al plano del disco, se denomina eje instantáneo de rotación. Este eje se desplaza durante el movimiento del disco, pasando todo el tiempo por el punto de contacto del disco con el plano. Por lo tanto, en un determinado momento de tiempo, todos los puntos del disco que están equidistantes del punto C, tendrán la misma velocidad resultante con relación al observador inmóvil. Los puntos, situados a una distancia del eje instantáneo (del punto C) igual al radio del disco, tendrán la misma velocidad en valor absoluto que la velocidad del eje, o sea, v (fig. 298, *b*).

58. La componente de la velocidad a lo largo de la varita para todos los puntos de ésta será única e igual a $u = v \cos \alpha$. Por consiguiente, la velocidad del extremo de la varita B es igual a $v_B = v \cos \alpha / \cos \beta$. El movimiento de la varita puede analizarse como la suma del movimiento de avance a lo largo de AB

con velocidad u y giratorio simultáneo alrededor del eje que es perpendicular al plano del diseño y que pasa por un punto O de la varita. La distancia del punto O hasta el extremo de la varita A puede determinarse fácilmente de la relación

$$\frac{v\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}{v\,\mathrm{sen}\,\alpha}=\frac{l-AO}{AO},\qquad AO=l\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}.$$

El movimiento de la varita, en un determinado momento de tiempo, también puede analizarse como movimiento giratorio alrededor del eje O' que es perpendicular al plano del diseño y está situado en la perpendicular de OO' a la AB. La distancia OO' será:

$$OO'=AO\,\mathrm{ctg}\,\alpha=l\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}.$$

59. La distribución de las velocidades de diferentes puntos de la varita está representada en la fig. 299. La velocidad v_C de un

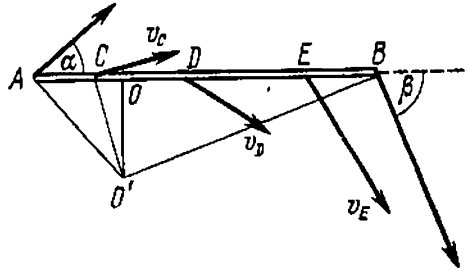


Fig. 299

punto arbitrario C de la varita en magnitud es igual a

$$v_C=\sqrt{v^2\cos^2\alpha+v^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha\frac{CO^2}{AO^2}v^2\cos^2\alpha+v^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha\frac{CO^2}{AO^2}}$$

y está dirigida perpendicularmente a la recta trazada del punto O' (véase el problema anterior) al punto dado C.

60. $v_C=v_B\cos 60^\circ=v/2$.

61. Este problema es más cómodo resolverlo usando un sistema de coordenadas relacionado al movimiento uniforme de los automóviles. En este sistema la carretera se mueve hacia atrás con velocidad $v=50$ km/h, los automóviles están en reposo el uno respecto al otro y sus ruedas giran. La velocidad lineal de los puntos situados en la circunferencia de la rueda y la velocidad lineal de la piedra presa serán también iguales a v. La piedra recorrerá la distancia máxima, si se desprende de las ruedas en el momento en que su velocidad forma con la horizontal un ángulo de 45°. Encontremos esta distancia. Despreciando la circunstancia de que en el momento del despren-

dimiento la piedra se halla a un nivel un tanto más alto que el nivel de la carretera, obtenemos la distancia máxima que es $l = v^2 \operatorname{sen} 2\alpha/g = v^2/g = 19{,}6$ m. La distancia entre los automóviles no podrá ser menor que 19,6 m.

62. El ángulo entre los rayos vecinos de la rueda delantera es $\varphi = 2\pi/N_1$. Para un espectador la rueda no girará, si en el intervalo de filmación de dos imágenes consecutivas ($\tau = 1/24$ s), ella gira en un ángulo $\alpha = k\varphi$, donde k es un número entero positivo. Por otro lado, el ángulo de giro de la rueda en el intervalo de tiempo τ es $\alpha = \omega\tau$, donde ω es la velocidad angular de la rueda. Por consiguiente, la rueda delantera parecerá estar inmóvil, si $\omega = 2\pi k/N_1\tau$. En estas condiciones, la velocidad del carruaje es $v = \omega r = 2\pi kr/N_1\tau$. Este tendrá el valor mínimo igual a $v_{min} = 2\pi r/N_1\tau = 8{,}8$ m/s. Las ruedas traseras también parecerán estar inmóviles, si $2\pi k_1 r/N_1\tau = 2\pi k_2 R/N_2\tau$, de donde obtenemos que para $k_1 = k_2 = 1$, $N_2 = N_1 R/r = 9$.

63. 1) Tenemos la impresión de que los rayos girarán en sentido antihorario, si en el intervalo de tiempo τ (véase el problema 62) la rueda gira en un ángulo β_1 que satisface la siguiente condición: $k\varphi > \beta_1 > k\varphi - \varphi/2$, donde $k = 1, 2, 3 \ldots$ Las posiciones consecutivas de los rayos de la rueda, para este caso, están representadas en la fig. 300, *a*. Un espectador tendrá la

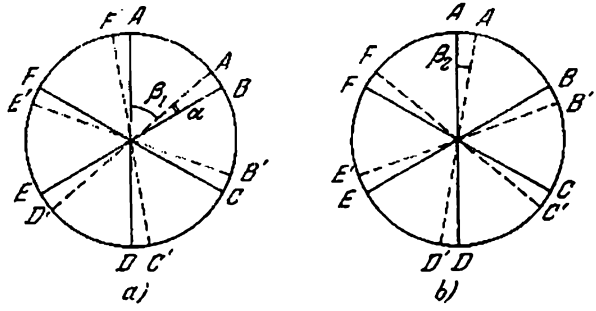


Fig. 300

impresión de que cada rayo giró en un ángulo $\alpha < \varphi/2$ en sentido antihorario. Los valores posibles de la velocidad angular se encuentran, respectivamente, en el intervalo:

$$\frac{k\varphi}{\tau} > \omega_1 > \frac{(2k-1)\varphi}{2\tau}.$$

Como el número de los rayos de las ruedas delanteras y traseras es igual, entonces para tener la impresión de que las ruedas

giran en el sentido antihorario, la velocidad del carruaje deberá satisfacer las siguientes desigualdades:

$$\frac{k\varphi r}{\tau} > v > \frac{k\varphi r}{\tau} - \frac{\varphi r}{2\tau}. \qquad (1)$$

$$\frac{k\varphi R}{\tau} > v > \frac{k\varphi R}{\tau} - \frac{\varphi r}{2\tau}. \qquad (2)$$

$R = 1{,}5r$, por eso la segunda desigualdad puede ser escrita de la siguiente forma:

$$1{,}5\frac{k\varphi r}{\tau} > v > \frac{1{,}5k\varphi r}{\tau} - \frac{1{,}5\varphi r}{2\tau}.$$

Ambas desigualdades, compatibles sólo para $k = 1$, darán valores admisibles de la velocidad del carruaje en forma de: $\varphi r/\tau > v > 0{,}75\varphi r/\tau$, o considerando que $\varphi = 2\pi/6$, en forma de: 8,8 m/s $> v >$ 6,6 m/s.

2) Los rayos de la rueda trasera parecerán estar girando en sentido horario, si en el intervalo de tiempo τ la rueda gira en un ángulo β_2 que satisface la siguiente condición: $(2k - 1) \times \varphi/2 > \beta_2 > (k - 1)\varphi$ (fig. 300, *b*). De esta condición deducimos, para la velocidad del carruaje, la siguiente desigualdad:

$$\frac{1{,}5(2k-1)\varphi r}{2\tau} > v > \frac{1{,}5(k-1)\varphi r}{\tau}.$$

Simultáneamente, la velocidad del carruaje deberá satisfacer la desigualdad (1). Para $k = 1$, ambas desigualdades son compatibles, si $0{,}75\varphi r/\tau > v > 0{,}5\varphi r/\tau$; para $k = 2$ las desigualdades son compatibles, en las condiciones de que $2\varphi r/\tau > v > 1{,}5\varphi r/\tau$. Si $k > 2$, las desigualdades serán incompatibles. Por lo tanto resulta que 6,6 m/s $> v >$ 4,4 m/s ó 17,6 m/s $> v >$ 14,2 m/s.

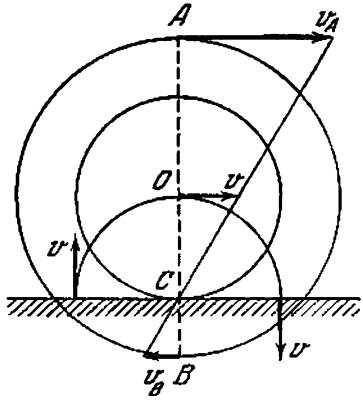


Fig. 301

64. Por el punto *C* (fig. 301) pasa el eje instantáneo de rotación (véase el problema 57). Por eso, el punto *A* tiene una velocidad

igual a $v_A = v(R + r)/r$. El punto B posee una velocidad igual a $v_B = v(R - r)/r$.

65. La velocidad instantánea, igual a la velocidad del eje de la bobina, es la velocidad de los puntos situados en la circunferencia de radio r, cuyo centro es el punto C.

66. Las trayectorias de los puntos A, B y C están representadas en la fig. 302. El punto B describe una cicloide simple; los puntos

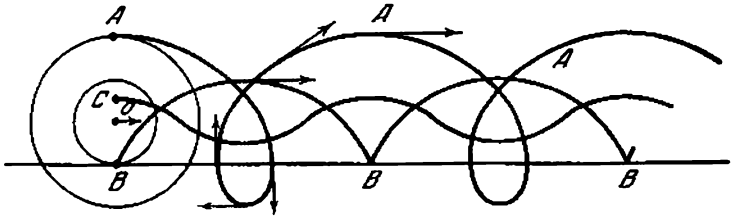


Fig. 302

A y C describen una cicloide alargada y reducida, respectivamente.

67. La velocidad lineal de los puntos en la circunferencia del árbol es $v_1 = \omega d/2$. La velocidad lineal de los puntos del diámetro exterior es $v_2 = \Omega D/2$. Puesto que las bolas ruedan sin deslizamiento, las velocidades instantáneas de aquellos puntos de la bola, los cuales en un determinado momento tocan el árbol

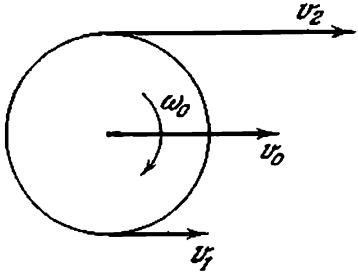


Fig. 303

y el diámetro exterior, serán también iguales a v_2. Pero la velocidad instantánea de cualquier punto de la bola puede ser considerada como la suma de dos velocidades: la velocidad del movimiento de su centro v_0 y la velocidad lineal del movimiento giratorio alrededor del centro. La rotación de la bola se realizará con cierta velocidad angular ω_0 (fig. 303). Por

ésò $v_1 = v_0 - \omega_0 r$, $v_2 = v_0 + \omega_0 r$, de donde

$$v_0 = 1/2\,(v_1 + v_2) = 1/4\,(\omega d + \Omega D).$$

En esta expresión cada una de las velocidades angulares puede ser tanto positiva (rotación en sentido horario), como negativa (rotación en sentido antihorario). Para $\Omega = 0$, tenemos que $v_0 = \omega d/4$.

68. Como el cono rueda sin deslizamiento, los puntos de la generatriz OA (fig. 304) deben estar fijos. De esta condición se determina la velocidad Ω de rotación del cono en torno de su propio

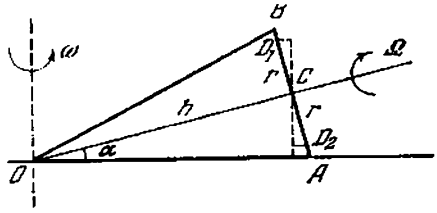


Fig. 304

eje. Para el punto A de esta condición obtenemos $\omega h/\cos\alpha = \Omega h \operatorname{tg}\alpha$, de donde $\Omega = \omega/\operatorname{sen}\alpha$. La velocidad de un punto arbitrario D_1 del diámetro AB de la base del cono se compone de dos velocidades:

$$v_1 = \omega\,(h\cos\alpha - r\operatorname{sen}\alpha) + r\omega/\operatorname{sen}\alpha,$$

donde r es la distancia del punto dado hasta el centro C de la base. Para un punto D_2, situado más abajo del centro C, tendremos:

$$v_2 = \omega\,(h\cos\alpha + r\operatorname{sen}\alpha) - r\omega/\operatorname{sen}\alpha.$$

El punto extremo inferior tiene una velocidad nula y el punto extremo superior, una velocidad $2\omega h\cos\alpha$.

69. En los lugares de embrague de los engranajes cónicos E y C, así como de E y D, las velocidades lineales deben ser iguales. Como el engranaje E gira alrededor del eje A con velocidad ω y el propio eje gira en otro plano con velocidad Ω, entonces para el embrague de las ruedas E y C tiene lugar la igualdad $r_1\omega_1 = r\omega + r_1\Omega$.
Para el embrague de las ruedas E y D se verifica la igualdad análoga siguiente: $r_2\omega_2 = -r\omega + r_1\Omega$. Resolviendo estas igualdades obtenemos $2\Omega = \omega_1 + \omega_2$ y $2\omega = \frac{r_1}{r}(\omega_1 - \omega_2)$.
Para una velocidad determinada Ω de la rueda B, accionada por el motor, las velocidades angulares de las ruedas motrices del automóvil se diferenciarán la una de la otra en un valor que varía de cero hasta 2Ω.

70. Partiendo de los conceptos de simetría, es evidente que, en cualquier momento de tiempo las tortugas estarán en los ángulos del cuadrado, cuyo lado disminuye todo el tiempo (fig. 305). La velocidad de cada tortuga puede descomponerse en una velocidad radial (dirigida al centro) y en una velocidad per-

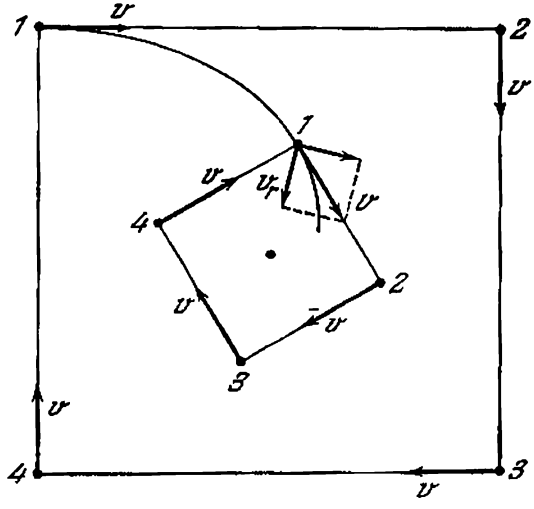


Fig. 305

pendicular a la radial. La velocidad radial, o sea, la velocidad de aproximación al centro, será $v_r = v/\sqrt{2}$. Cada tortuga pasará hasta el centro una distancia $l = a/\sqrt{2}$. De este modo, las tortugas se encontrarán en el centro del cuadrado dentro de un intervalo de tiempo $t = l/v_r = a/v$.

71. El buque B se mueve en dirección al buque A con velocidad v. Al mismo tiempo, el buque A se aleja del B con velocidad $v \cos \alpha$ (fig. 306). De esta manera la distancia AB disminuye con velocidad $v(1 - \cos \alpha)$. El punto C (proyección del punto B en la trayectoria del buque A) se mueve con velocidad $v \cos \alpha$. Como resultado, la distancia AC aumenta con velocidad $v(1 - \cos \alpha)$. Así, la suma de las distancias $S = AB + AC$ permanece constante durante el movimiento de los buques. En el momento inicial el punto C coincidía con el punto A y por eso $S = AB = a$. Después de un intervalo suficientemente grande de tiempo, el punto C coincidirá con el punto B. En esta condición tendremos $AB = AC = S/2 = a/2$. Dos buques se moverán a una distancia de 1,5 km el uno del otro.

72. El movimiento de la bola puede examinarse como la suma de los movimientos por la vertical (uniformemente acelerado) y por la horizontal (movimiento uniforme).

La solución del problema se simplificará, si construimos el gráfico de la dependencia de la coordenada de la bola a lo largo de la horizontal en función del tiempo para los valores límites

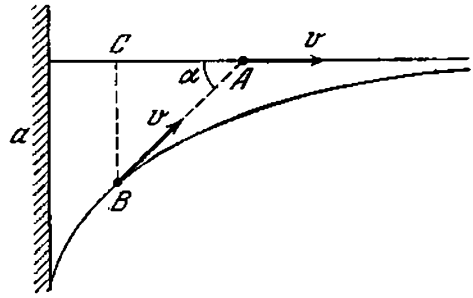


Fig. 306

de la velocidad de 267 cm/s y 200 cm/s (fig. 307). Las líneas quebradas inferior y superior corresponden a la velocidad de la bola máxima y mínima, respectivamente. Con el tiempo,

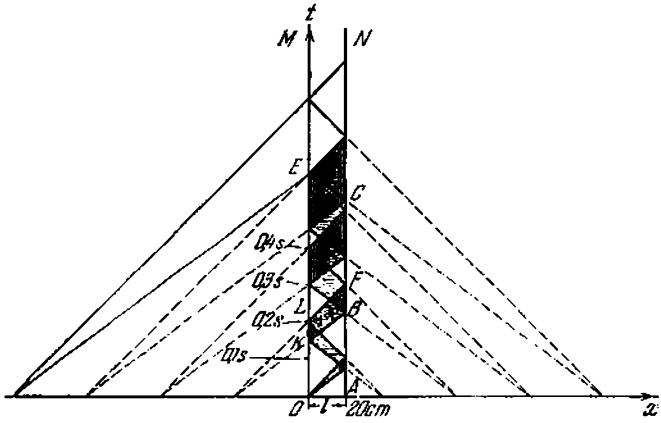


Fig. 307

como se ve en el gráfico, la indeterminación de la coordenada x de la bola, dada por el segmento de la recta horizontal, encerrada entre las líneas del gráfico, aumenta. El sombreado vertical en la fig. 307 corresponde al movimiento de la bola de M a N y el horizontal corresponde al movimiento de N a M. Las regiones de intersección de los sombreados corresponden a la indeterminación en dirección de la velocidad horizontal.

1) Directamente del gráfico se deduce que la dirección de la velocidad de la bola por la horizontal, después de haber saltado una vez de la placa N, será indeterminada para el tiempo de caída $OK \leqslant t \leqslant OL$, ó $t > AB$ ($OK = 0{,}15$ s; $OL = 0{,}2$ s; $AB = 0{,}225$ s). Consecuentemente, 10 cm $\leqslant H \leqslant$ 20 cm ó $H \geqslant gt^2/2 \approx 26$ cm.
2) La bola podrá caer en cualquier punto de la base, sobre la cual están situadas las placas, si el tiempo de caída de la bola $t \geqslant AF = 0{,}3$ s. Por lo tanto, $H_{\text{mín}} = 44$ cm.

§ 4. DINAMICA DEL MOVIMIENTO RECTILINEO

73. $T = Fx/l$.

74. $T = Fxy/lh$ actúa en dirección horizontal hacia la derecha. $N = M\dfrac{xy}{lh}g$ actúa verticalmentete hacia arriba.

75. La masa de la parte izquierda de la barra es $m_1 = \dfrac{M}{L}l$ y la de la parte derecha es $m_2 = \dfrac{M}{L}(L - l)$, donde M es la masa de toda la barra. Bajo la acción de las fuerzas aplicadas a la barra, cada parte de ella se mueve con la misma aceleración a. Por lo tanto,

$$F_1 - F = m_1 a,$$
$$F - F_2 = m_2 a.$$

Resolviendo este sistema, obtenemos la fuerza de extensión

$$F = \frac{F_1 m_2 + F_2 m_1}{m_1 + m_2} = F_1 \frac{L - l}{L} + F_2 \frac{l}{L}.$$

76. A la barra fueron aplicadas dos fuerzas mg y N. La fuente de la fuerza N es el suelo deformado del ascensor. De la ecuación del movimiento de la barra $ma = mg - N$ resulta que $N = m(g - a)$. Según la tercera ley de Newton, la barra (como consecuencia de que está deformada) actúa sobre el suelo del ascensor con una fuerza N. Si $a = g$, entonces $N = 0$, es decir, la barra no actúa más sobre el suelo (en la barra desaparecen las deformaciones). Para el movimiento acelerado dirigido hacia arriba, tenemos $N = m(g + a)$.

77. A fin de que la tabla no resbale, la componente de la fuerza, aplicada a la tabla por el niño, deberá estar dirigida a lo largo de la tabla hacia arriba. Por consecuencia, la tabla actúa sobre el niño con una fuerza igual y de sentido contrario, dirigida a lo largo de la tabla hacia abajo. Escogiendo la dirección positiva del eje de las coordenadas a lo largo del plano incli-

nado hacia arriba, escribimos la ecuación del movimiento del niño:

$$-Mg \operatorname{sen} \alpha - F = Ma,$$

$$S = v_0 t + \frac{at^2}{2}, \qquad \frac{v_0}{2} = v_0 + at.$$

La tabla se encuentra en equilibrio, por eso tenemos $F - mg \operatorname{sen} \alpha = 0$. Resolviendo el sistema dado, encontramos

$$S = \frac{3Mv_0^2}{8(M+m)g \operatorname{sen} \alpha}.$$

78. Las partículas de la barra en la sección superior tendrán mayor aceleración ($a > g$). La aceleración de las partículas de la barra situadas en la sección inferior, en el momento inicial de tiempo, será $a = g$.

79. En el momento inicial del tiempo las partes de la barra, situadas en la sección superior, tendrán la aceleración $a = g$, y las situadas en la sección inferior, la aceleración $a > g$.

80. La indicación de la balanza disminuye.

81. Durante el movimiento de las alas, el aire situado debajo de las mismas se comprime y el aire situado sobre las alas, se rarifica. Como resultado de la deformación del aire surge la fuerza sustentadora N. De la ecuación del movimiento $ma = N - mg$ deducimos que $N = ma + mg$. Según la tercera ley de Newton, las alas de la mosca actúan sobre el aire con la fuerza N dirigida hacia abajo. Debido a ello, el platillo de la balanza en el que se encuentra la botella con la mosca, bajará.

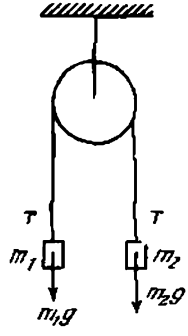


Fig. 308

82. En la fig. 308 se muestran las fuerzas que actúan sobre las cargas. Las ecuaciones de movimiento para las cargas se escriben de la siguiente manera:

$$m_1 a = T - m_1 g,$$
$$m_2 a = m_2 g - T.$$

donde T es la fuerza de tensión del hilo y a es la aceleración. (Las aceleraciones de las cargas son iguales, ya que consideramos el hilo inelástico. La imponderabilidad del hilo y de la polea determina la constancia de T.) Resolviendo el sistema de ecuaciones, obtenemos $a = [(m_2 - m_1)/(m_1 + m_2)]\, g = 327$ cm/s², $T = m_1 (a + g) = 1{,}3$ N. El tiempo de movimiento es $t = \sqrt{2H/a} \approx 1$ s.

83. Si las masas de las poleas y de la cuerda son suficientemente pequeñas (fig. 309), entonces $2F - T = 0$, $T - P = ma$. Resolviendo las ecuaciones, obtenemos $F = (1 + a/g)P/2$. Para $a = 0$, tenemos $F = P/2$.

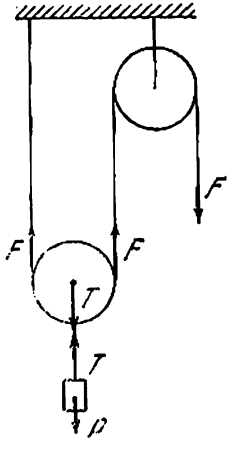


Fig. 309

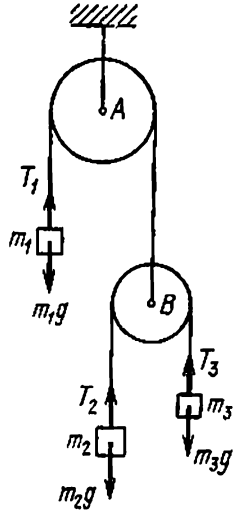


Fig. 310

84. Las ecuaciones del movimiento para los pesos con masas m_1, m_2, m_3, tienen la siguiente forma:

$$m_1 a = m_1 g - T_1,$$
$$m_2 b = m_2 g - T_2,$$
$$m_3 c = m_3 g - T_3,$$

donde a, b y c son las aceleraciones respecto a la polea inmóvil A. La aceleración se considera positiva, si está dirigida hacia abajo. Si la masa de la cuerda es insignificante en comparación con las masas m_1, m_2, m_3, entonces la tensión será constante en toda la cuerda. De aquí concluimos que $T_2 = T_3$ y la fuerza con que la cuerda, pasando a través de la polea A, actúa sobre la polea B es T_1 (fig. 310).

Analicemos la parte de la cuerda que se encuentra en el momento dado del tiempo en la polea B. Sobre esta parte el extremo izquierdo pendiente de la cuerda actúa con una fuerza igual a T_2 y el extremo derecho actúa con una fuerza T_3 ($T_2 = T_3$). Como la masa de cualquier parte de la cuerda es muy insignificante la suma de todas las fuerzas que actúan sobre ella deberá tender a cero. Por consiguiente, la polea B actúa sobre la parte de la cuerda situada en la polea con una fuerza $F = T_2 + T_3$, dirigida hacia arriba. Según la tercera ley de Newton, la cuerda deformada, a su vez, actúa sobre la polea con una fuerza $T_2 + T_3$. Como la masa de la polea B es insignificante, tenemos que $T_1 = T_2 + T_3$.
Al pasar cierto tiempo (muy corto) después del comienzo del movimiento de los cuerpos, la deformación de las cuerdas cesa y las longitudes después de esto, no cambian con el tiempo. Esto significa que la aceleración de la polea B será igual a $(-a)$ y la aceleración de las cargas m_2 y m_3, respecto a la polea B, serán iguales y dirigidas en sentidos contrarios. Designando por d la aceleración de la carga m_2 respecto a la polea B, recibimos que

$$b = (-a) + d,$$
$$c = (-a) + (-d),$$

donde $b + c = -2a$. Por consiguiente, tenemos finalmente el siguiente sistema de ecuaciones:

$$m_1 a = m_1 g - T,$$
$$m_2 b = m_2 g - T/2,$$
$$m_3 c = m_3 g - T/2,$$
$$b + c = -2a.$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, tenemos (considerando $m_1 = m_2 + m_3$)

$$a = \frac{(m_2 - m_3)^2}{(m_2^2 + m_3^2 + 6m_2m_3)} g, \qquad b = \frac{m_1^2 - 4m_3^2}{m_1^2 + 4m_2m_3} g,$$
$$c = \frac{m_1^2 - 4m_3^2}{m_1^2 + 4m_2m_3} g, \qquad T = \frac{8m_1m_2m_3}{m_1^2 + 4m_2m_3} g.$$

En el caso general

$$T = \frac{8m_1m_2m_3}{4m_2m_3 + m_1(m_1 + m_3)} g.$$

85. La indicación del dinamómetro inicialmente es igual a $F = 30$ N.
Si las indicaciones del dinamómetro no cambian, entonces sobre el peso 20 N actúa la fuerza de tensión del hilo dirigida hacia arriba, igual a 30 N. Por consiguiente, este peso se mueve hacia arriba con aceleración $a = g/2$. Con igual aceleración

se mueve hacia abajo el otro peso. El peso adicional en el segundo plato se determina de la ecuación

$$\frac{P+P_1}{g}\,\frac{g}{2}=P+P_1-F,$$

de donde $P_1 = 30$ N.

86. A fin de restablecer el equilibrio es necesario retirar del plato derecho de la balanza un peso

$$P=\frac{(m_1-m_2)^2}{m_1+m_2}\,g.$$

87. Como la masa de las poleas y de la cuerda se menosprecian, la tensión de la cuerda será única en todas las partes (fig. 311).

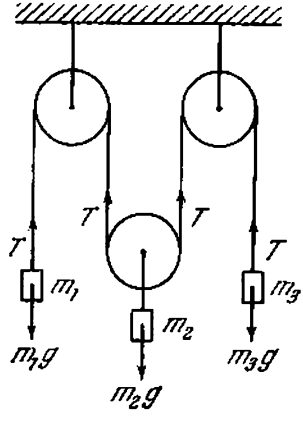


Fig. 311

Tenemos entonces

$$m_1g - T = m_1a_1,$$
$$m_2g - 2T = m_2a_2,$$
$$m_3g - T = m_3a_3,$$
$$a_2 = -(a_1 + a_3)/2.$$

Resolviendo el sistema, obtenemos

$$a_1=\frac{4m_1m_3-3m_2m_3+m_1m_2}{4m_1m_3+m_2m_3+m_1m_2}\,g,$$

$$a_2=\frac{m_1m_2-4m_1m_3+m_2m_3}{4m_1m_3+m_2m_3+m_1m_2}\,g,$$

$$a_3=\frac{4m_1m_3-3m_1m_2+m_2m_3}{4m_1m_3+m_2m_3+m_1m_2}\,g.$$

88. Puesto que la masa de las poleas y de la cuerda es insignificante, la tensión de la cuerda es igual en todas las partes. Por eso tenemos

$$m_1 g - T = m_1 a_1,$$
$$m_2 g - 2T = m_2 a_2,$$
$$2T - T = 0.$$

Resolviendo el sistema, obtenemos $T = 0$ y $a_1 = a_2 = g$. Ambos pesos caen libremente con aceleración g. Las poleas B y C giran en sentido antihorario; la polea A gira en sentido horario.

89. Supongamos que en cierto momento de tiempo un i-ésimo peso se encuentra a una distancia x_i del techo. Partiendo de la inelasticidad de todas las cuerdas, deducimos que la suma de todas estas distancias permanece constante durante el movimiento, es decir, $\sum_{i=1}^{8} x_i = L$. En el intervalo de tiempo Δt cambiará cada una de estas distancias, por eso, dentro del tiempo Δt, tendremos:

$$\sum_{i=1}^{8} \left[x_i + v_i \Delta t + \frac{a_i (\Delta t)^2}{2} \right] = L.$$

Al restar una ecuación de la otra, recibimos, después de dividir por Δt, que:

$$\sum_{i=1}^{8} \left(v_i + \frac{1}{2} a_i \Delta t \right) = \sum_{i=1}^{8} v_i + \frac{1}{2} \Delta t \sum_{i=1}^{8} \quad = 0.$$

En vista de que esta igualdad debe verificarse para cualquier Δt, las aceleraciones de los pesos están relacionados por $\sum_{i=1}^{8} a_i = 0$. Como las masas de las poleas y el rozamiento en sus ejes son insignificantes, la tensión de una misma cuerda, apoyada sobre cualquier polea, a ambos lados de ella, es única e igual a la mitad de la tensión de la cuerda en que dicha polea está colgada. De aquí deducimos que la tensión de todas las cuerdas, en las cuales se cuelgan los pesos, son iguales entre sí. Designando esta tensión por T, escribimos la ecuación del movimiento del i-ésimo peso en la forma siguiente:

$$m_i g - T = m_i a_i,$$

o

$$g - \frac{T}{m_i} = a_i$$

Sumando todas las ocho ecuaciones de este tipo, recibimos que:

$$8g - T\sum_{i=1}^{8}\frac{1}{m_i} = \sum_{i=1}^{8} a_i = 0.$$

De donde

$$T = \frac{8g}{\sum_{i=1}^{8}(1/m_i)}.$$

90. Designemos por T la tensión de la cuerda, en que se cuelgan los pesos de masas m_1 y m_2. Entonces la tensión de la cuerda en la cual está colgado el peso m_3, será igual a $2T$, y la tensión de la cuerda en la cual está colgado el peso m_4, será igual a $4T$. Las ecuaciones del movimiento para los pesos se escribirán en la siguiente forma:

$$m_1g - T = m_1a_1,$$
$$m_2g - T = m_2a_2,$$
$$m_3g - 2T = m_3a_3,$$
$$m_4g - 4T = m_4a_4.$$

Gracias a la inelasticidad de las cuerdas, las aceleraciones de los pesos se unen por la relación:

$$a_1 + a_2 + 2a_3 + 4a_4 = 0.$$

(Esta relación puede obtenerse utilizando el mismo método de resolución del problema 89.) Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenido para valores dados de m_1, m_2, m_3, m_4, encontramos que $a_4 = g/33 \approx 0{,}3$ m/s².

91. Para este caso las ecuaciones de dinámica se escribirán en la siguiente forma: $mg - T = ma$, $T = Ma$, donde T es la tensión de la cuerda. Resolviendo, obtenemos: $a = \frac{m}{m+M}g = \frac{2}{7}g$. De las ecuaciones de cinemática, hallamos $x = v_0t - at^2/2$, $v_t = v_0 - at$. Resolviendo este sistema de ecuaciones, recibimos que dentro de 5 s el carrito se encontrará en el mismo lugar ($x = 0$) y tendrá una velocidad $v_t = 7$ m/s dirigida a la derecha. El carrito recorrerá un trayecto igual a

$$S = 2\left\{v_0\frac{1}{2} - \frac{a(t/2)^2}{2}\right\} = 17{,}5 \text{ m}.$$

92. En la fig. 312 están representadas por flechas todas las fuerzas que actúan sobre los cuerpos m_1, m_2, m_3. Designemos por a la aceleración de los cuerpos m_1 y m_2 y por c y b las aceleraciones

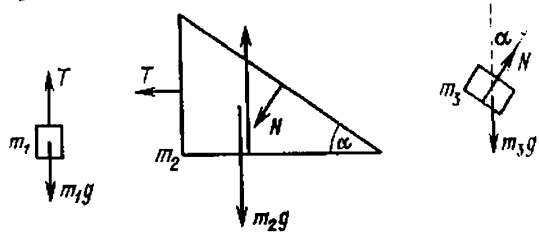


Fig. 312

horizontal y vertical del cuerpo m_3. Escribiremos las proyecciones del movimiento en direcciones horizontal y vertical:

$$m_1a = m_1g - T, \qquad m_2a = T + N \operatorname{sen} \alpha,$$
$$m_3b = m_3g - N \cos \alpha, \qquad m_3c = N \operatorname{sen} \alpha.$$

Según los conceptos geométricos, deducimos que $b/(a + c) = \operatorname{tg} \alpha$. Resolviendo estas ecuaciones encontramos a, b y c:

$$a = \frac{m_1 + m_2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{m_1 + m_2 + m_3 \operatorname{sen}^2 \alpha} g,$$
$$b = \frac{m_1 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + (m_1 + m_2 + m_3) \operatorname{sen}^2 \alpha}{m_1 + m_2 + m_3 \operatorname{sen}^2 \alpha} g,$$
$$c = \frac{(m_1 + m_2) \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - m_1 \operatorname{sen}^2 \alpha}{m_1 + m_2 + m_3 \operatorname{sen}^2 \alpha} g.$$

La solución es válida para $\operatorname{tg} \alpha - 1 \leqslant m_2/m_1$ (véase el problema 35).

93. En la fig. 313 se muestran todas las fuerzas que actúan sobre la barra y sobre la cuña. Designemos por a la aceleración de

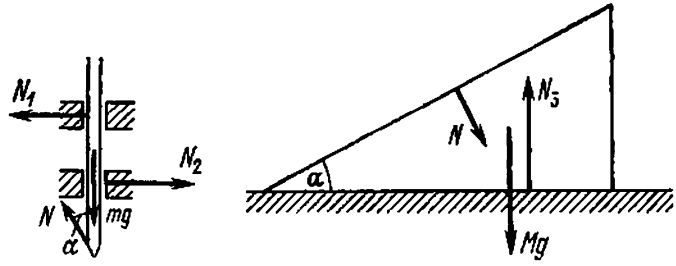


Fig. 313

la barra respecto a la mesa inmóvil y por b, la aceleración de la cuña. Escribamos las proyecciones de las ecuaciones del

movimiento de la barra y de la cuña, en direcciones horizontal y vertical:

$$ma = mg - N\cos\alpha, \qquad 0 = N_1 - N_2 + N\operatorname{sen}\alpha,$$
$$Mb = N\operatorname{sen}\alpha, \qquad 0 = N_3 - N\cos\alpha - Mg.$$

La ecuación de relación cinemática entre las aceleraciones de la barra y de la cuña se deduce de los conceptos geométricos: $a/b = \operatorname{tg}\alpha$. Resolviendo las ecuaciones, recibimos:

$$a = \frac{m\operatorname{tg}^2\alpha}{M + m\operatorname{tg}^2\alpha}g, \qquad b = \frac{m\operatorname{tg}\alpha}{M + m\operatorname{tg}^2\alpha}g.$$

94. La única fuerza que actúa sobre la cuenta es la fuerza de reacción de la barrilla N, que está dirigida perpendicularmente a la barrilla. La aceleración absoluta $\mathbf{w}_a$ de la cuenta (aceleración respecto a un observador inmóvil), estará dirigida para el lado de acción de la fuerza de reacción N. La aceleración relativa $\mathbf{w}_r$ estará dirigida a lo largo de la barrilla (fig. 314); $\mathbf{w}_a = \mathbf{a} + \mathbf{w}_r$. Del triángulo de aceleraciones resultará que: $w_r = a\cos\alpha$, $w_a = a\operatorname{sen}\alpha$. Basándose en la segunda ley de Newton, obtenemos que la fuerza de reacción es $N = ma\operatorname{sen}\alpha$. El tiempo de movimiento de la cuenta por la barilla τ se determina por la ecuación $l = (a\cos\alpha)\tau^2/2$, de donde recibimos que $\tau = \sqrt{2l/(a\cos\alpha)}$.

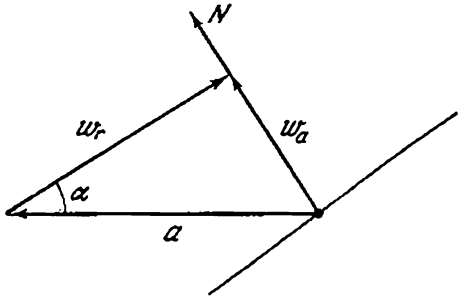


Fig. 314

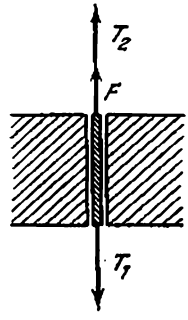


Fig. 315

95. Examinemos un pedazo de la cuerda que se encuentra en la hendidura. Supongamos que la cuerda se mueve hacia abajo. Entonces, sobre el pedazo de la cuerda actúan las fuerzas de tensión de la cuerda desde ambos lados y la fuerza de fricción (fig. 315). Como menosprociamos la masa del pedazo examinado de la cuerda, recibimos que $T_1 - F - T_2 = 0$. Las ecuaciones de dinámica se escribirán en la siguiente forma:

$$m_1g - T_1 = m_1a, \qquad m_2g - T_2 = -m_2a.$$

Resolviendo este sistema, obtenemos:

$$a = \frac{(m_1 - m_2)g - F}{m_1 + m_2}$$

96. 1) Si $F \leqslant kmg$, las vigas no se moverán.
2) Si $kMg \geqslant F > kmg$, se moverá la viga menor.
3) Si $F > kMg$, las vigas se moverán en direcciones opuestas. (Se supone que mientras actúan las fuerzas F, no existe rozamiento.)

97. 1) Si la velocidad del vagón aumenta, el cuadro se desplazará a lo largo de la pared posterior del vagón hacia abajo con aceleración $g - ka$. (Si $ka > g$, el cuadro permanecerá en reposo.)
2) Si la velocidad del vagón disminuye, el cuadro se moverá hacia abajo con aceleración g y hacia adelante con aceleración a.

98. De acuerdo con la segunda ley de Newton, tenemos:

$$(m_1 + m_2)\, a = m_1 g \operatorname{sen} \alpha - m_2 g \operatorname{sen} \beta - \\ - k m_1 g \cos \alpha - k m_2 g \cos \beta.$$

Los pesos se encontrarán en el mismo nivel, después de recorrer el trayecto S que satisface las siguientes ecuaciones:

$$S \operatorname{sen} \alpha = h - S \operatorname{sen} \beta, \qquad S = a\tau^2/2.$$

Excluyendo S y a del sistema de tres ecuaciones, obtenemos

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{g\tau^2 (\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta)(k \cos \beta + \operatorname{sen} \beta) + 2h}{g\tau^2 (\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta)(\operatorname{sen} \alpha - k \cos \alpha) - 2h}.$$

99. Examinemos el canal que forma un ángulo arbitrario φ con la vertical (fig. 316). Si $k < \operatorname{ctg} \varphi$, entonces el trayecto recorrido

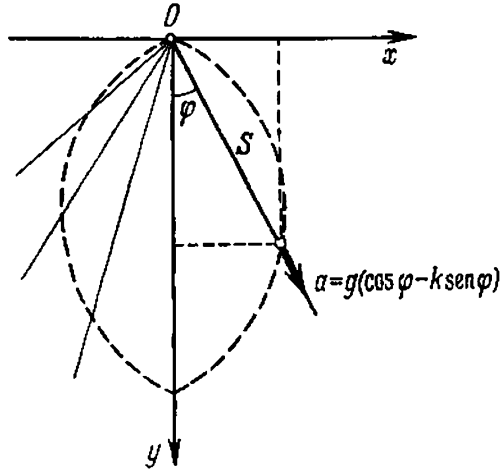


Fig. 316

por el grano de arena es $S = at^2/2$, donde $a = g(\cos \varphi - k \operatorname{sen} \varphi)$. Las coordenadas del grano de arena son:

$x = S \operatorname{sen} \varphi$, $y = S \cos \varphi$, de donde

$$x^2 + y^2 = S^2 = \left(\frac{gt^2}{2}\right)^2 \left(\frac{y}{S} - k\frac{x}{S}\right)^2$$

o

$$(x^2 + y^2)^2 = (gt^2/2)^2 (y - kx)^2.$$

Consideremos que $k < y/x$ y designemos $A = gt^2/4$. Entonces

$$x^2 + y^2 = 2A (y - kx).$$

La última ecuación puede escribirse en la siguiente forma:

$$(x + kA)^2 + (y - A)^2 = A^2 (1 + k^2).$$

Esta es la ecuación de una circunferencia de radio $R = A\sqrt{1 + k^2} = \left(\frac{gt^2}{4}\right)\sqrt{1 + k^2}$ con el centro situado a una distancia $A = \frac{gt^2}{4}$ más abajo del punto O y a una distancia $kA = kgt^2/4$ a la izquierda de la vertical. Por otro lado de la vertical, el lugar geométrico de los puntos buscados es un arco análogo.

100. De las ecuaciones del movimiento obtenemos para la aceleración de la piedra las siguientes expresiones:
$a_1 = g (\operatorname{sen} \alpha + k \cos \alpha)$, cuando el movimiento es hacia arriba,
$a_2 = g (\operatorname{sen} \alpha - k \cos \alpha)$, cuando el movimiento es hacia abajo.
Las ecuaciones cinemáticas se escribirán del siguiente modo:

$$l = v_0 t_1 - a_1 t_1^2/2,$$
$$l = a_2 t_2^2/2, \quad v_0 - a_1 t_1 = 0.$$

Resolviendo el sistema de estas cinco ecuaciones, recibimos:

$$k = \frac{2l - gt_1^2 \operatorname{sen} \alpha}{gt_1^2 \cos \alpha} \approx 0{,}37,$$

$$t_2 = t_1 \sqrt{\frac{l}{gt_1^2 \operatorname{sen} \alpha - 1}} = 4{,}2 \text{ s}.$$

101. El carrito inicialmente tiene movimiento uniformemente retardado. La velocidad del carrito es $v = v_0 - (f/M)\, t$, donde f es la fuerza de rozamiento igual a kmg. El objeto tiene movimiento uniformemente acelerado. La velocidad del objeto es $u = (f/m)\, t$. Si el carrito es largo, las velocidades del objeto y del carrito podrán igualarse. Esto tendrá lugar en el momento de tiempo $\tau = v_0/(f/m + f/M)$. Después de ello, el objeto y el carrito comenzarán a moverse con velocidad constante $Mv_0/(M + m)$. El carrito para este momento de tiempo cubrirá el trayecto $S = v_0\tau - (f/2M)\, \tau^2$ y el objeto, $s = (f/2m)\, \tau^2$. El trayecto recorrido por el objeto respecto al carrito es igual

a $S - s$. Este trayecto deberá ser menor que l. De este modo el objeto no abandonará el carrito, si $S - s \leqslant l$, o sea,

$$\frac{Mv_0^2}{2gk(M+m)} \leqslant l.$$

102. Si $F \leqslant k(m+M)g$, no hay movimiento. Supongamos que $F > k(m+M)g$. Analicemos el caso de ausencia de deslizamiento del cuerpo por la viga. Las ecuaciones del movimiento, en este caso, tendrán la siguiente forma:

$$ma = f, \quad Ma = F - f - k(m+M)g; \quad f \leqslant kmg,$$

de donde

$$a = \frac{F}{m+M} - kg, \quad f = \frac{mF}{m+M} - kmg \leqslant kmg,$$

que es posible, si

$$k(m+M)g < F < 2k(m+M)g.$$

Si $F > 2k(m+M)g$, entonces el cuerpo deslizará por la barra. En este caso las ecuaciones del movimiento tendrán la siguiente forma:

$$ma = kmg, \quad Mb = F - kmg - k(M+m)g,$$

de donde

$$a = kg, \quad b = \frac{F}{M} - k\frac{(2m+M)}{M}g.$$

Que es fácilmente verificar en el caso de $b > a$.

103. Las ecuaciones del movimiento de la viga y del cuerpo tienen la siguiente forma:

$$ma = f, \tag{1}$$

$$Mb = F - f, \tag{2}$$

donde f es la fuerza de rozamiento, a y b son las aceleraciones. Supongamos que no hay deslizamiento, entonces $a = b$. De las ecuaciones del movimiento podemos determinar la aceleración y la fuerza de rozamiento. La fuerza de rozamiento es $f = mF/(M+m)$. Para que no haya deslizamiento la fuerza de rozamiento debe satisfacer la siguiente desigualdad: $f \leqslant kmg$, es decir, $F/(M+m) \leqslant kg$. Si $F > k(M+m)g$, entonces surge el deslizamiento. Las ecuaciones (1) y (2) en este caso deben escribirse en la siguiente forma:

$$ma = kmg, \quad Mb = F - kmg.$$

De estas ecuaciones obtenemos a y b: $a = kg$, $b = (F - kmg)/M$. Es evidente que $b > a$. La aceleración del cuerpo respecto a la viga estará dirigida en sentido opuesto del movi-

miento y en magnitud será igual a $(F - kgm)/M - kg$. El tiempo de movimiento del cuerpo por la viga será

$$\tau = \sqrt{\frac{2lM}{F - kg(M + m)}}$$

104. 1) Las fuerzas que actúan sobre la mesa y el peso están representadas en la fig. 317. Las ecuaciones del movimiento en

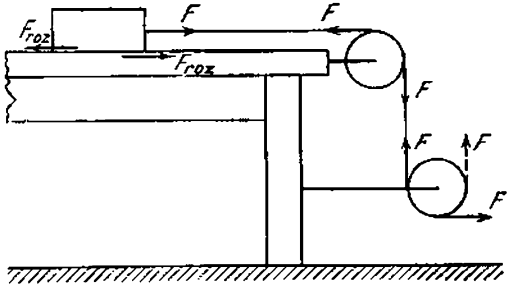


Fig. 317

dirección horizontal tienen la siguiente forma: para la mesa con las poleas

$$F - F + F_{roz} = \frac{P_1}{g} a_1;$$

para el peso,

$$F - F_{roz} = \frac{P_2}{g} a_2.$$

Supongamos que la fuerza F sea tan pequeña que el peso no desliza por la mesa. Entonces resulta que $a_1 = a_2$ y $F_{roz} = FP_1/(P_1 + P_2)$. Aumentando gradualmente la fuerza F, nosotros aumentamos, también gradualmente, la fuerza de rozamiento F_{roz}. Pero si la mesa y el peso están inmóviles, el uno respecto al otro, la fuerza de rozamiento entre ellos no podrá superar el valor $F_{roz.\,máx} = kP_2$. Por lo tanto, el deslizamiento del peso por la mesa comienza cuando

$$F > F_{roz.\,máx} = \frac{P_1 + P_2}{P_1} = k\frac{P_2}{P_1}(P_1 + P_2) = 100\ \text{N}.$$

En nuestro caso $F = 80$ N, por consiguiente el peso no se deslizará y resulta que

$$a_1 = a_2 = \frac{F}{P_1 + P_2} g = \frac{8}{25} g \approx 3{,}14\ \text{m/s}^2.$$

2) Las ecuaciones del movimiento para la mesa con las poleas y el peso, en este caso, tienen la siguiente forma:

$$-F + F_{roz} = \frac{P_1}{g} a_1, \quad F - F_{roz} = \frac{P_2}{g} a_2.$$

Las aceleraciones de la mesa y del peso están dirigidos en sentidos opuestos y por eso el deslizamiento será obligatorio. Entonces $F_{roz} = kP_2$. La aceleración de la mesa es:

$$a_1 = \frac{-F + kP_2}{P_1} g = -\frac{2}{15} g \approx -1{,}31 \text{ m/s}^2.$$

La mesa se moverá hacia la izquierda.

105. Al moverse la cuenta sufre la acción de dos fuerzas: la fuerza de rozamiento kN y la fuerza de reacción N. La aceleración

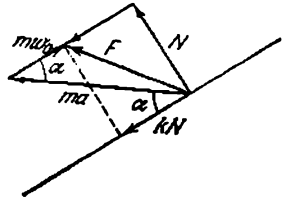


Fig. 318

absoluta estará dirigida según la uerza resultante F. De la fig. 318 se deduce que:

$N = ma \operatorname{sen} \alpha$, $w_0 = a \cos \alpha - kN/m = a(\cos \alpha - k \operatorname{sen} \alpha)$,

de donde

$$\tau = \sqrt{\frac{2l}{a(\cos \alpha - k \operatorname{sen} \alpha)}}.$$

Si $k \geqslant \operatorname{ctg} \alpha$, la cuenta no se moverá respecto a la barrilla y, en este caso, la fuerza de rozamiento es igual a $ma \cos \alpha$.

106. Basándose en la segunda ley de Newton, tenemos que la variación de cantidad de movimiento del sistema cañón — proyectil, en el momento de disparo τ, deberá ser igual al impulso de las fuerzas que actúan sobre el sistema:
en la horizontal,

$$mv_0 \cos \alpha - Mv_1 = F_{roz}\tau,$$

donde $F_{roz}\tau$ es el impulso de las fuerzas de rozamiento,
en la vertical,

$$mv_0 \operatorname{sen} \alpha = N\tau - (Mg + mg)\tau,$$

donde $N\tau$ es el impulso de las fuerzas de presión normal (reacción del área horizontal) y $(Mg + mg)\tau$ es el impulso de las

fuerzas de la gravedad. Considerando que $F_{roz} = kN$, obtenemos:

$$v_1 = \frac{m}{M} v_0 \cos\alpha - k \frac{m}{M} v_0 \operatorname{sen}\alpha - k \frac{M+m}{M} g\tau,$$

o, ya que $g\tau \ll v_0$ recibimos:

$$v_1 \approx \frac{m}{M} v_0 (\cos\alpha - k \operatorname{sen}\alpha).$$

Esta solución es válida para $k \leqslant \operatorname{ctg}\alpha$. Para $k > \operatorname{ctg}\alpha$ el cañón permanece inmóvil.

107. 1) La aceleración en el momento inicial es $a_0 = F/M \approx \approx 13{,}3$ m/s². En función del tiempo la aceleración cambia según la ley: $a = F/(M - \mu t)$, donde $\mu = 200$ kg/s es la masa del

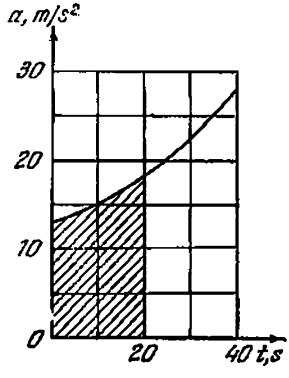


Fig. 319

combustible gastada por el cohete en un segundo. El gráfico de aceleración tiene la forma que se ve en la fig. 319. La velocidad dentro de 20 s es numéricamente igual al área sombreada en el dibujo, o sea, $v \approx 300$ m/s.

2) La segunda ley de Newton se escribirá así:

$$(M - \mu t)\, a = F - (M - \mu t)\, g - f.$$

Según las condiciones del problema: $t = 20$ s y $a = 0{,}8$ g. De ahí obtenemos la fuerza de resistencia del aire:

$$f = F - (M - \mu t)\, g - (M - \mu t)\, 0{,}8\ g \approx 125 \cdot 10^3 \text{ N}.$$

3) La ecuación de Newton para el peso tiene la siguiente forma: $m_1 a = kx - m_1 g$, donde m_1 es la masa del peso en el extremo del muelle; a, la aceleración del cohete; k, el coeficiente de elasticidad del muelle; x, el alargamiento del muelle. Según

la condición del problema, $m_1 g = kl_0$, entonces, $x = \frac{l_0}{g} \times$ $\times (a + g)$. La escala del aparato deberá ser uniforme. La aceleración g corresponde a un centímetro de graduación de la escala.

108. En el sistema de referencia, relacionado al segundo cubo, tenemos

$$v_2^2 - v_0^2 = 2a_1 l, \quad v_2^2 - v_1^2 = 2a_2 l,$$

donde $a_1 = -F(2M + m)/2Mm$ es la aceleración de la bala en el primer cubo; v_1, su velocidad al salir del cubo; $a_2 = -F(M + m)/Mm$, la aceleración de la bala en el segundo cubo; v_2, su velocidad al salir del segundo cubo. Suponiendo $v_1 = 0$, encontramos el límite inferior de la velocidad v_0 y suponiendo $v_2 = 0$, obtenemos el límite superior. Por consiguiente

$$\sqrt{Fl(2M + m)/mM} \leqslant v_0 \leqslant \sqrt{Fl(4M + 3m)/mM}.$$

§ 5. PRINCIPIO DE CONSERVACION DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

109. Dividimos la masa del disco en pares de segmentos iguales que se encuentran en el mismo diámetro y equidistantes del centro. La cantidad de movimiento de cada par es igual a cero, ya que las cantidades de movimiento de ambas masas son iguales, pero dirigidas en sentidos opuestos. Por consiguiente, la cantidad de movimiento de todo el disco es igual a cero.

110. Supongamos que la masa de la canoa sea M, la de la carga m y la velocidad inicial de las canoas v_0. Al lanzar la carga de la canoa, sobre la última actúa una fuerza perpendicular a v_0. No obstante, la variación de la cantidad de movimiento de la canoa no tendrá lugar, porque la fuerza de resistencia del agua impide el movimiento transversal de las canoas. La cantidad de movimiento de la canoa cambiará solamente por la caída de la carga en ella. Aplicando la ley de conservación de la cantidad de movimiento en el sistema canoa-carga, en primer caso podemos escribir:

$$(M + m)\, v_0 - mv_0 = (M + 2m)\, v_1 \quad \text{para una canoa,}$$

$$-Mv_0 + mv_1 = (M + m)\, v_2 \quad \text{para otra canoa.}$$

v_1 y v_2 son las velocidades finales de las canoas. Del sistema de ecuaciones dado obtenemos

$$v_1 = -v_2 = \frac{M}{M + 2m}\, v_0.$$

En el caso cuando las cargas se lanzan simultáneamente, las velocidades finales de las canoas v_1' y v_2' se determinarán de

las siguientes ecuaciones:

$$Mv_0 - mv_0 = (M + m)\, v_1',$$
$$-Mv_0 + mv_0 = (M + m)\, v_2'.$$

Resolviendo el sistema, recibimos $v_1' = -v_2' = \frac{M - m}{M + m} v_0$. De este modo, la velocidad final de las canoas en el primer caso será mayor.

111. La cantidad de movimiento del sistema tabla-rana en dirección horizontal no cambia. Por consiguiente podemos escribir

$$mv_0 \cos \alpha = Mu,$$

donde u es la velocidad de la tabla respecto a la superficie inmóvil del lago. A fin de que la rana alcance el otro extremo de la tabla, deberá satisfacerse la siguiente condición:

$$L - u\tau = (v_0 \cos \alpha)\, \tau,$$

donde τ es el tiempo durante el cual la rana se encuentra en el aire; este tiempo es $\tau = 2v_0 \operatorname{sen} \alpha / g$. De las ecuaciones existentes podemos determinar v_0:

$$v_0 = \sqrt{\frac{gL}{(m/M + 1) \operatorname{sen} 2\alpha}}.$$

112. Considerando que en dirección horizontal el sistema escarabajo—cuña está cerrado, para determinar la velocidad v de la cuña podemos usar el principio de conservación de la cantidad de movimiento

$$Mv + m\,(v - u \cos \alpha) = 0,$$

donde $(v - u \cos \alpha)$ es la componente horizontal de la velocidad del escarabajo respecto a un sistema de referencia inmóvil. De ahí recibimos $v = \frac{m}{M + m} u \cos \alpha$.

113. Como no existen las fuerzas externas que actúan sobre el sistema en dirección horizontal, la proyección de la cantidad de movimiento total del sistema cuña — cargas en dirección horizontal continuirá constante (igual a cero). De ahí se deduce que la cuña comenzará a moverse sólo en el caso de movimiento de las cargas. Para que la carga m_2 se mueva hacia la derecha debe satisfacerse la siguiente condición:

$$m_2 g \operatorname{sen} \alpha \geqslant m_1 g + k m_2 g \cos \alpha,$$

de donde $m_1/m_2 \leqslant \operatorname{sen} \alpha - k \cos \alpha$. Para esta condición la cuña se desplazará hacia la izquierda. A fin de que la carga m_2 se mueva hacia la izquierda, debe verificarse la siguiente condición:

$$m_1 g \geqslant m_2 g \operatorname{sen} \alpha + k m_2 g \cos \alpha,$$

ó $m_1/m_2 \geqslant \operatorname{sen} \alpha + k \cos \alpha$. En este caso la cuña se moverá hacia la derecha. Por consiguiente, para el equilibrio de la cuña la relación de masas de las cargas deberá satisfacer la siguiente desigualdad

$$\operatorname{sen} \alpha - k \cos \alpha \leqslant m_1/m_2 \leqslant \operatorname{sen} \alpha + k \cos \alpha.$$

114. Para la dirección a lo largo del plano inclinado podemos escribir

$$mv \cos \alpha + Mu = 0,$$

donde u es la velocidad de la caja en el momento cuando la piedra alcanza esta caja. Esta velocidad es igual a $u = \sqrt{2gS \operatorname{sen} \alpha}$ Por lo tanto,

$$v = -\frac{M}{m} \frac{\sqrt{2gS \operatorname{sen} \alpha}}{\cos \alpha}.$$

115. En el punto máximo de ascenso del cohete su velocidad es nula. La variación de la cantidad de movimiento total de los fragmentos del cohete, bajo la acción de las fuerzas externas (fuerza de la gravedad), es muy insignificante, ya que el impulso de estas fuerzas es muy pequeño debido a la corta duración de la explosión. Por lo tanto, la cantidad de movimiento total de los fragmentos del cohete, antes y después de la explosión, permanece constante e igual a cero. Sin embargo, los tres vectores ($m_1\mathbf{v}_1$, $m_2\mathbf{v}_2$, $m_3\mathbf{v}_3$) tendrán la resultante nula solamente si ellos están situados en el mismo plano. De ahí concluimos que los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ se encuentran en el mismo plano.

116. La velocidad de la canoa u respecto a la orilla se relaciona con la velocidad v del hombre respecto a la canoa mediante la relación: $u = \frac{m}{m+M} v$. La relación de las velocidades durante el movimiento permanece constante. Como resultado de ello, la relación de los trayectos recorridos será igual a la relación de las velocidades: $S/l = m/(m+M)$, donde S es el camino recorrido por la canoa y l es la longitud de la canoa (distancia recorrida por el hombre respecto a la canoa). Por consiguiente a fin de que la canoa atraque, su longitud no puede ser menor que $l = \frac{m+M}{m} S = 2{,}5$ m. La canoa no atracará.

117. Tomemos como origen de las coordenadas el punto de donde el adulto comenzó su movimiento. Entonces la coordenada inicial del centro de masas será:

$$x_1 = \frac{m_1 l/2 + m_3 l}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Designemos por x_2 la coordenada del centro de masas en el momento cuando el adulto alcanza el extremo de la plataforma. Entonces

$$x_2 = \frac{m_1 (l/2 - s) + m_2 (l - s) + m_3 (l/2 - s)}{m_1 + m_2 + m_3},$$

donde s es el desplazamiento de la plataforma. Puesto que el sistema adulto — niño — plataforma en dirección horizontal está cerrado, entonces $x_1 = x_2$. De esta igualdad encontramos s:

$$s = \frac{2m_2 - m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \frac{l}{2}.$$

De los valores numéricos dados obtenemos que $s = 0{,}6$ m.

118. Las fuerzas externas no actúan en dirección horizontal del sistema aro — escarabajo. Por eso el centro de gravedad del sistema (punto C en la fig. 320) no se desplazará en el plano

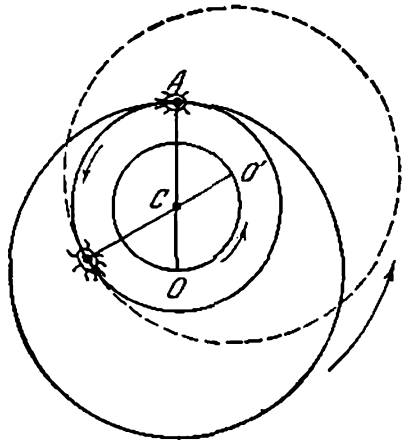


Fig. 320

horizontal. La distancia entre el centro de gravedad del sistema y el centro del aro es $CO = \frac{m}{m + M} R$. Como esta distancia es constante el centro del aro O describirá, con relación al punto inmóvil C, una circunferencia de radio CO. Se puede verificar con facilidad que la trayectoria del escarabajo tiene la forma de una circunferencia de radio $AC = \frac{M}{m + M} R$. La posición recíproca, así como la dirección del movimiento del escarabajo y del aro se muestran en la fig. 320.

119. Designemos por v_k la velocidad del cohete al final del k-ésimo segundo. Al final del $(k+1)$-ésimo segundo el cohete lanza el gas de masa m que lleva consigo una cantidad de movimiento $m(-u+v_k)$. Del principio de conservación de la cantidad de movimiento se deduce que

$$(M-km)\,v_k=[M-(k+1)\,m]\,v_{k+1}+m(-u+v_k).$$

El cambio de la velocidad del cohete en 1 s es igual a

$$v_{k+1}-v_k=\frac{mu}{M-(k+1)\,m}$$

Conociendo el cambio de la velocidad en 1 s se puede encontrar la expresión para la velocidad al final del enésimo segundo:

$$v_n=v_0+u\left(\frac{m}{M-m}+\frac{m}{M-2m}+\ldots+\frac{m}{M-nm}\right).$$

120. La velocidad del cohete aumentará. Esto se hace evidente, si adoptamos un sistema de referencia respecto al cual el cohete, en un momento determinado, estará en reposo. La presión de los gases escapados empujará el cohete hacia adelante.

121. Para analizar todas las cuatro posibilidades, designemos por v_1 la velocidad inicial del proyectil respecto al cañón; por v_2, la velocidad inicial del proyectil respecto a la tierra; por β, el ángulo de inclinación del ánima del cañón; por γ, el ángulo de inclinación del vector de la velocidad inicial v_2 (fig. 321).

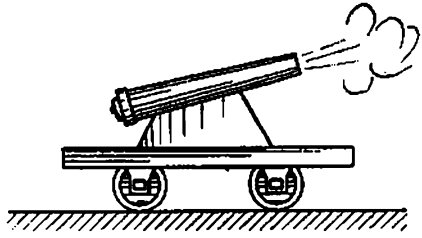


Fig. 321

Las relaciones entre los valores indicados se determinan por las siguientes igualdades:

$$v_1\cos\beta+v=v_2\cos\gamma, \qquad (1)$$

$$v_1\operatorname{sen}\beta=v_2\operatorname{sen}\gamma, \qquad (2)$$

$$mv_2\cos\gamma+Mv=0. \qquad (3)$$

Consideremos v_0 como la velocidad inicial del proyectil con relación a la tierra y α como el ángulo de inclinación del vector

v_0 (o sea, $v_0 = v_2$, $\alpha = \gamma$), entonces de la ecuación (3) obtenemos:

$$v = -\frac{m}{M} v_2 \cos\gamma = -\frac{m}{M} v_0 \cos\alpha.$$

Luego consideremos v_0 como la velocidad inicial del proyectil respecto al ánima del cañón que está dirigido bajo un ángulo α con relación al horizonte ($v_0 = v_1$, $\alpha = \beta$). De esta manera, de las ecuaciones (1) y (3) recibimos

$$v = -\frac{m}{M+m} v_1 \cos\beta = -\frac{m}{M+m} v_0 \cos\alpha.$$

Si se da la velocidad inicial respecto a la tierra y el ángulo de inclinación del cañón ($v_0 = v_2$, $\alpha = \beta$), entonces tenemos que

$$v = -\frac{m}{\sqrt{(m+M)^2 \operatorname{sen}^2\beta + M^2\cos^2\beta}} v_0 \cos\beta =$$

$$= -\frac{m}{\sqrt{(m+M)^2 \operatorname{sen}^2\alpha + M^2\cos^2\alpha}} v_0 \cos\alpha.$$

Por último, si v_0 es la velocidad inicial con relación al ánima del cañón y se conoce el ángulo de inclinación del vector de velocidad inicial respecto a la tierra (ángulo inicial de la trayectoria), recibimos $v_0 = v_1$ y $\alpha = \gamma$. Entonces resulta que

$$v = -\frac{m}{\sqrt{(m+M)^2 \cos^2\gamma + M^2 \operatorname{sen}^2\alpha}} v_1 \cos\gamma =$$

$$= -\frac{m}{\sqrt{(m+M)^2 \cos^2\alpha + M^2 \operatorname{sen}^2\alpha}} v_0 \cos\alpha.$$

En todos los casos el signo negativo indica quel el cañón se mueve en sentido opuesto al movimiento del proyectil.

§ 6. ESTATICA

122. Examinemos una parte de la cuerda adyacente al cilindro. Dividamos el ángulo θ en gran número de partes n y designemos por $\theta/n = \alpha$ una de las partes. Supongamos que la cuerda esté compuesta de n pedazos unidos entre sí y separemos el j-ésimo pedazo (fig. 322). Sobre este pedazo actúan las fuerzas T_j y T_{j+1} de las demás partes vecinas de la cuerda, la relación del cilindro N_j y la fuerza de fricción kN_j. Considerando que el ángulo α es pequeño, obtenemos las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$T_{j+1} - T_j - kN_j = 0,$$

$$N_j - T_j\alpha/2 - T_{j+1}\alpha/2 = 0.$$

De estas ecuaciones recibimos

$$T_{j+1} = T_j (1 + k\alpha), \text{ o sea,}$$
$$T_1 = T_0 (1 + k\alpha),$$
$$T_2 = T_1 (1 + k\alpha), \ldots,$$
$$T_n = T_{n-1} (1 + k\alpha).$$

Por consiguiente tenemos $T_n = T_0 (1 + k\alpha)^n = T_0 \times \times (1 + k\theta/n)^n$, y para $n \to \infty$ recibimos

$$T = \lim_{n \to \infty} T_n = \lim_{n \to \infty} T_0 (1 + k\theta/n)^n = T_0 e^{k\theta},$$

donde $e = 2{,}71828 \ldots$ es la base de los logaritmos neperianos.

123. En la posición de equilibrio (fig. 323) tenemos $mg - 2mg \times \times \cos\alpha = 0$ y por lo tanto $\alpha = 60°$. La distancia que buscamos

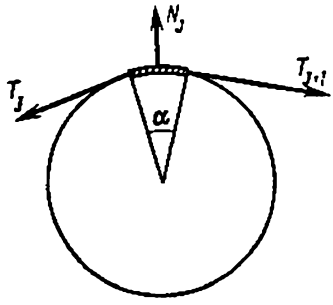


Fig. 322

es $h = l \operatorname{ctg} \alpha = l/\sqrt{3}$. El equilibrio se establece después de que se amortigüen las oscilaciones provocadas por el descenso de la carga.

124. La igualdad de las proyecciones de las fuerzas en dirección vertical (fig. 324) conduce a la siguiente ecuación:

$$2N \operatorname{sen}(\alpha/2) - 2F_{\text{roz}} \cos(\alpha/2) = 0,$$

donde N es la fuerza de presión normal y $F_{\text{roz}} \leqslant kN$ es la fuerza de rozamiento. (La masa de la cuña puede menospreciarse.) Por consiguiente obtenemos $\operatorname{tg}(\alpha/2) \leqslant k$ y $\alpha \leqslant 2 \operatorname{arctg} k$.

125. Si el peso P baja en una altura h, entonces el punto K bajará en $1/3h$ y el peso Q subirá en $2/3h$. Valiéndose de la regla fundamental de la mecánica, recibimos que $Ph = Q2/3h$, de donde resulta que $P = 2/3Q$.

126. Si la caja no se vuelca, el momento de la fuerza F que lo hace girar en sentido antihorario alrededor de la arista de la base es menor o igual al momento de la fuerza de gravedad que hace girar la caja en sentido horario. Para que la caja se deslice, la

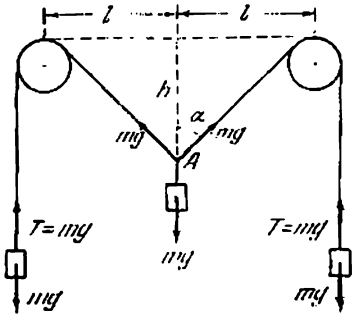


Fig. 323

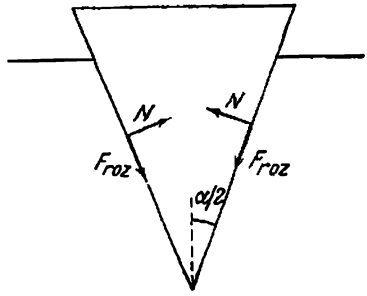


Fig. 324

fuerza F debe ser mayor que la fuerza de rozamiento máxima aplicada a la caja. Por consiguiente, recibimos $Fh \leqslant mgl/2$, $F \geqslant kmg$, de donde $k \leqslant l/2h$.

127. Para hacer girar la barra es necesario que el momento de las fuerzas aplicadas a los extremos de la barra sea mayor que el de las fuerzas de rozamiento, cuando estas fuerzas alcanzan su valor máximo. Las fuerzas de rozamiento se distribuyen uniformemente a lo largo de la barra (fig. 325). El brazo medio

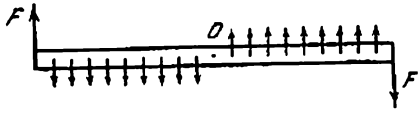


Fig. 325

de las fuerzas de rozamiento que actúan sobre la parte izquierda o derecha de la barra es igual a $l/4$, donde l es la longitud total de la barra. El momento de todas las fuerzas de rozamiento respecto al centro de la barra es $2\,(kP/2)\,(l/4)$. Por eso para hacer girar la barra es necesario que las fuerzas F aplicadas satisfagan la desigualdad $2Fl/2 > kPl/4$. De donde $F > kP/4$. Para el desplazamiento de traslación de la barra es preciso que $2F > kP$. Por consiguiente será más fácil girar la barra.

128. La ecuación de movimiento de la carga tiene la siguiente forma: $P_0 a/g = F - P_0$ (fig. 326). La suma de las fuerzas que actúan

sobre la grúa verticalmente es nula. Por eso $P_1 + P_2 = P + F$. La suma de los momentos de las fuerzas respecto al punto A

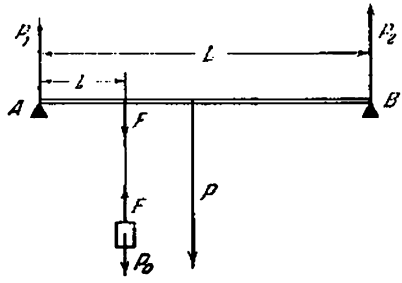


Fig. 326

es nula, por lo tanto, $Fl + PL/2 = LP_2$. Resolviendo este sistema de ecuaciones, encontramos que

$$P_1 \approx 2{,}23 \cdot 10^4\ \text{N}, \quad P_2 \approx 1{,}77 \cdot 10^4\ \text{N}.$$

129. Para el equilibrio de la palanca la fuerza aplicada al punto D debe crear un momento igual a $P \cdot AB$. La fuerza será mínima para el brazo máximo igual a BD. Por consiguiente, $F = P \cdot AB/BD = P/\sqrt{2}$ y está dirigida perpendicularmente a BD.

130. Si no existe rozamiento entre el suelo y las cajas, las cajas se moverán simultáneamente. Si el coeficiente de rozamiento no es nulo, entonces primero se moverá la caja situada a la derecha (véase la fig. 49), porque la fuerza aplicada a la caja por parte del palo será mayor que la fuerza aplicada a la caja izquierda. En efecto, por parte de la caja derecha sobre el palo actúa la fuerza F_1 contraria a F y por parte de la caja izquierda la fuerza F_2, de igual dirección que F. La suma de las fuerzas en equilibrio es igual a cero. Por lo tanto, $F_1 = F + F_2$ y la fuerza F_1 antes que la fuerza F_2 alcanzará el valor máximo de la fuerza de rozamiento de reposo.

131. La suma de los momentos de las fuerzas que actúan sobre la esfera respecto al punto A es igual a cero (fig. 327) y, por consiguiente, nos conduce a la ecuación

$$F_{\text{roz}} \cdot R - NR = 0.$$

Como $F_{\text{roz}} \leqslant kN$, entonces $k \geqslant 1$.

132. A fin de que el cuerpo se encuentre en equilibrio, es necesario que la suma de los momentos de las fuerzas que tienden a girar el cuerpo en sentido horario sea igual al momento de las fuerzas que tienden a girar el cuerpo en sentido antihorario alrededor de cualquier punto (por ejemplo, alrededor del centro de gravedad). En el caso dado, el momento de las fuerzas de rozamiento que giran el ladrillo en sentido horario debe ser

igual al momento de las fuerzas de presión del plano sobre el ladrillo. De ahí deducimos que la fuerza de presión del plano sobre la parte derecha del ladrillo será mayor que sobre la parte

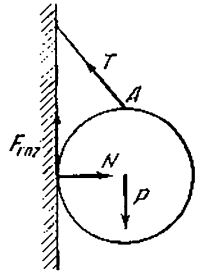


Fig. 327

izquierda. Según la tercera ley de Newton, la fuerza de presión de la mitad derecha del ladrillo sobre el plano deberá ser mayor que la fuerza de presión sobre la parte izquierda.

133. Para hacer subir el rodillo a un escalón es necesario que el momento de las fuerzas que hacen girar el rodillo en torno del

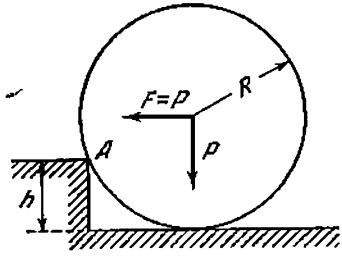


Fig. 328

punto A (fig. 328) en sentido antihorario sea por lo menos igual al momento de las fuerzas que lo hacen girar en sentido horario

$$P(R-h) = P\sqrt{R^2-(R-h)^2},$$

de donde obtenemos que $h = (2 \pm \sqrt{2})\,R/2$. Ya que $h < R$, entonces

$$h = (1-\sqrt{2}/2)\,R \approx 0{,}29R.$$

134. Como en uno de los planos la fuerza de rozamiento es nula, entonces ella será nula también en el otro plano. En caso contrario, la esfera giraría alrededor de su centro, pues el momento

de las demás fuerzas con relación a este centro es igual a cero (debido a que son iguales a cero los brazos de cada una de estas fuerzas respecto al centro de la esfera). Las sumas de las

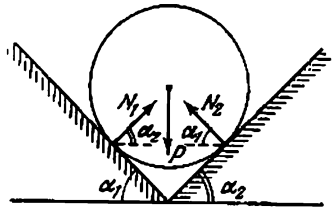


Fig. 329

proyecciones de las fuerzas, en direcciones vertical y horizontal, son iguales a cero (fig. 329). Por lo tanto recibimos

$$N_1 \cos \alpha_2 - N_2 \cos \alpha_1 = 0,$$

$$P - N_1 \operatorname{sen} \alpha_2 - N_2 \operatorname{sen} \alpha_1 = 0$$

donde N_1 y N_2 son las fuerzas de presión que buscamos. De ahí sigue que

$$N_1 = \frac{P}{\operatorname{sen} \alpha_2 + \cos \alpha_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1},$$

$$N_2 = \frac{P}{\operatorname{sen} \alpha_1 + \cos \alpha_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2}.$$

135. Designemos por F la fuerza aplicada a una manija. Como resultado de la acción de la fuerza F, el cajón se moverá y,

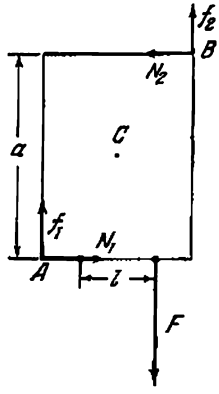


Fig. 330

debido a ello, surgirán en los puntos A y B las fuerzas elásticas N_1 y N_2 (fig. 330) que actuarán sobre el cajón por parte del

armario. Estas fuerzas aplicadas al cajón son iguales la una a la otra; $N_1 = N_2 = N$. Suponiendo que el momento de todas las fuerzas respecto al centro del cajón C es igual a cero, tenemos $N = Fl/2a$. El cajón se moverá si la fuerza aplicada F es mayor que el valor máximo de la fuerza de rozamiento de reposo, es decir, $F > f_1 + f_2 = 2kN$. Para satisfacer la última desigualdad es preciso que $k < a/l$.

136. La tabla inclinada bajo un ángulo α respecto a la horizontal en un tronco rugoso es análoga al cuerpo mantenido por las fuerzas de rozamiento sobre un plano inclinado que tiene un ángulo de base α. Entonces tenemos que en las condiciones de equilibrio $F_{roz} = mg$ sen α. Considerando $F_{roz} \leqslant kmg \cos \alpha$, obtenemos que tg $\alpha \leqslant k$.

137. Las fuerzas aplicadas a la escalera se muestran en la fig. 331. En caso de equilibrio, la suma de las proyecciones de las fuer-

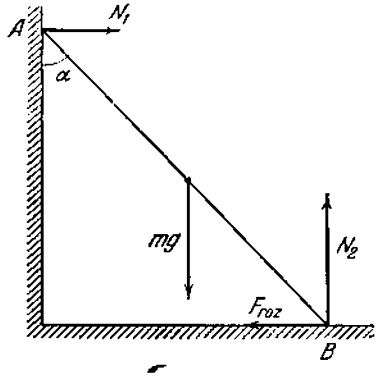


Fig. 331

zas, a lo largo de la vertical y horizontal, serán iguales a cero. De este modo, $N_1 = F_{roz}$ y $N_2 = mg$. Considerando que la suma de los momentos de fuerzas con relación al punto B es nula, obtenemos una ecuación más:

$$N_1 \cos \alpha = (mg \text{ sen } \alpha)/2.$$

Resolviendo el sistema, tenemos que $F_{roz} = (mg \text{ tg } \alpha)/2$. Como la fuerza de rozamiento satisface la desigualdad $F_{roz} \leqslant kN_2$, entonces para el equilibrio obtenemos la siguiente condición que es necesaria y suficiente: tg $\alpha \leqslant 2k$.

138. Las fuerzas aplicadas a la escalera se representan en la fig. 332. Considerando que la suma de las fuerzas y la de los momentos de fuerzas son iguales a cero, obtenemos que

$$f + N_2 = mg, \tag{1}$$

$$N_1 = F_{roz}, \tag{2}$$

$$f \text{ sen } \alpha + N_1 \cos \alpha = (mg \text{ sen } \alpha)/2. \tag{3}$$

Las fuerzas de rozamiento f y F_{roz} satisfacen las desigualdades $f \leqslant kN_1$ y $F_{roz} \leqslant kN_2$. Utilizando la primera desigualdad y las ecuaciones (1) y (3), obtenemos que: $\operatorname{ctg} \alpha \geqslant N_2/2N_1 - k/2$. Como $k \geqslant N_1/N_2$, entonces $\operatorname{ctg} \alpha \geqslant (1 - k^2)/2k$. Introduciendo la designación: $k = \operatorname{tg} \beta$, recibimos una forma más conveniente para el cálculo, o sea, $\operatorname{ctg} \alpha \geqslant \operatorname{ctg} 2\beta$ ó $\alpha \leqslant 2\beta$.

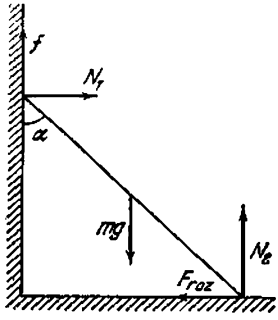


Fig. 332

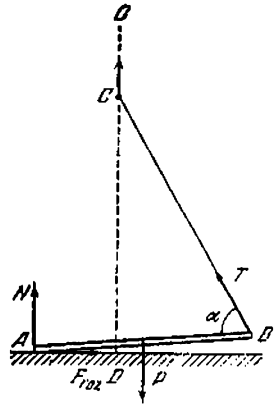


Fig. 333

139. Si en el momento cuando el extremo de la barra B comienza a elevarse, el valor de la fuerza de rozamiento $F_{roz} \leqslant kN$ será suficiente para impedir que el extremo A se deslice, entonces la barra comenzará a girar alrededor del punto A. En caso contrario, el extremo A comienza a deslizar hasta el momento cuando la fuerza de rozamiento $F_{roz} = kN$ no sea suficiente para mantener la barra en equilibrio (fig. 333). Luego la barra comenzará a girar en torno al extremo A. Determinemos qué valores deberá tener el coeficiente de rozamiento k para que el deslizamiento cese bajo el ángulo α determinado entre la barra y la cuerda. La igualdad de las fuerzas en el momento cuando la barra está casi en posición horizontal, conduce a las ecuaciones

$$F_{roz} = T \cos \alpha, \qquad P = N + T \operatorname{sen} \alpha.$$

La igualdad de los momentos de fuerzas respecto al punto A se escribirán en la siguiente forma:

$$Pl/2 = Tl \operatorname{sen} \alpha.$$

Utilizando el sistema de ecuaciones dado, encontramos que

$$k = F_{roz}/N = \operatorname{ctg} \alpha.$$

A fin de que la barra no deslice, es necesario que $k \geqslant \operatorname{ctg} 60^\circ = 1/\sqrt{3}$.

140. La suma de los momentos de fuerzas que actúan sobre el hombre respecto a su centro de gravedad es igual a cero. Por eso la fuerza F de reacción de la tierra está obligatoriamente dirigida al centro de gravedad del hombre C (fig. 334). La componente

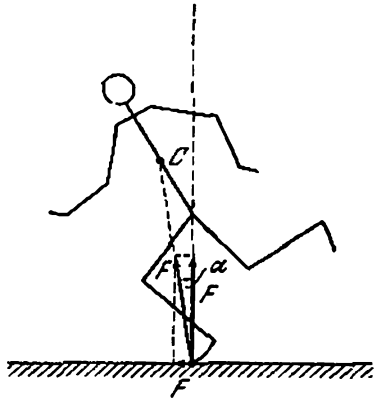


Fig. 334

horizontal de esta fuerza no puede ser mayor que la fuerza máxima de rozamiento de reposo, o sea, $F \operatorname{sen} \alpha \leqslant kF \cos \alpha$, de donde $k \geqslant \operatorname{tg} \alpha$.

141. Sobre la escalera actúan la fuerza de gravedad P, la fuerza F de reacción de la tierra y la reacción del apoyo N. Como la

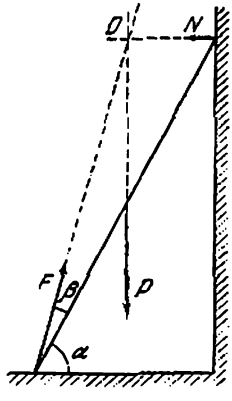


Fig. 335

pared es lisa, la fuerza N (fig. 335) es perpendicular a ella. La dirección de la fuerza F es más fácil determinar, si encontramos el punto respecto al cual los momentos de las fuerzas

P y N son nulos. Este punto será el punto de intersección de las rectas ON y OP. Entonces el momento de fuerza F respecto a este punto deberá ser también igual a cero. Por lo tanto, la fuerza deberá estar dirigida de modo que su prolongación pase por el punto O. Como vemos en la fig. 335, la dirección de la fuerza F forma con la escalera un ángulo $\beta = 30° - \text{arctg} \times \times (1/2\sqrt{3}) \approx 14°10'$. La fuerza de reacción de la tierra que actúa sobre la escalera estará dirigida a lo largo de la escalera solamente cuando las demás fuerzas estén aplicadas al centro de masas de la escalera o actúan a lo largo de ella.

142. La escalera caerá inclusive si se sostiene por la cuerda atada al medio de la escalera. Los momentos de fuerzas de reacción del suelo y de la pared, así como el momento de la fuerza de

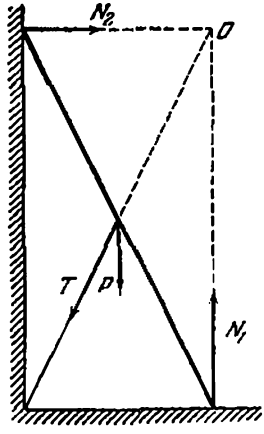


Fig. 336

tensión de la cuerda con relación al punto O son nulos para cualquier tensión T (fig. 336). El momento de la fuerza de gravedad respecto al mismo punto es diferente de cero. Por eso la escalera obligatoriamente caerá.

143. La pared actúa sobre la escalera con una fuerza de reacción N_1, perpendicular a la pared. Sobre el extremo inferior de la escalera actúan las fuerzas N_2 (reacción del apoyo) y F_{roz} (fuerza de rozamiento) (fig. 337). Si, al simplificar, no tenemos en cuenta la masa de la escalera, entonces, además de estas fuerzas, sobre ella actúa el peso del hombre P. De la igualdad de las proyecciones de las fuerzas, en direcciones horizontal y vertical, obtenemos que $N_2 = P$ y $N_1 = F_{roz}$. Supongamos que en el momento inicial el hombre se encuentra en la parte inferior de la escalera (punto A). La igualdad de los momentos de las fuerzas respecto al punto O conduce a la ecuación $N_1 \cdot CB = P \cos\alpha \cdot AO$. De este modo tenemos que cuanto más alto está el hombre, mayor será la fuerza N_1. Pero $F_{roz} = N_1$.

Entonces la fuerza de rozamiento que sostiene la escalera crece mientras el hombre va subiendo por la escalera. Cuando la fuerza F_{roz} alcanza su valor máximo, igual a kP, la escalera comenzará a deslizar.

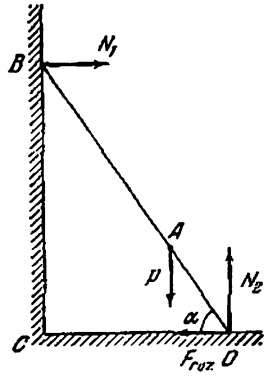


Fig. 337

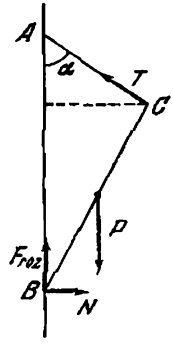


Fig. 338

144. En equilibrio, la suma de las fuerzas que actúan sobre el cuadro (fig. 338) es nula. Por consiguiente $P = F_{roz} + T \cos \alpha$ y $N = T \operatorname{sen} \alpha$. La fuerza de rozamiento deberá satisfacer la desigualdad $F_{roz} \leqslant kN$ ó $k \geqslant F_{roz}/N$. La igualdad de los momentos respecto al punto B se da por la ecuación

$$\frac{P}{2} l \operatorname{sen} \alpha = T \left(l \cos \alpha + \sqrt{d^2 - l^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}\right) \operatorname{sen} \alpha,$$

de donde

$$\frac{F_{roz}}{N} = \frac{l \cos \alpha + 2\sqrt{d^2 - l^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}}{l \operatorname{sen} \alpha},$$

$$k \geqslant \frac{l \cos \alpha + 2\sqrt{d^2 - l^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}}{l \operatorname{sen} \alpha}.$$

145. Determinemos primeramente la dirección de la fuerza f con que la barra BC actúa sobre la barra CD. Supongamos que esta fuerza tenga una componente vertical dirigida hacia arriba. Entonces, según la tercera ley de Newton, la barra CD actúa sobre la barra BC con una fuerza, cuya componente vertical está dirigida hacia abajo. Pero esto contradice a la simetría del problema. De este modo la componente vertical de la fuerza f deberá ser igual a cero. La fuerza que actúa sobre la barra CD por parte de la barra DE tendrá las componentes horizontal y vertical, como se muestra en la fig. 339, *a*.

Considerando que la suma de todas las fuerzas que actúan sobre la barra CD es nula, concluimos que $F = mg$ y $f = f'$. Suponiendo

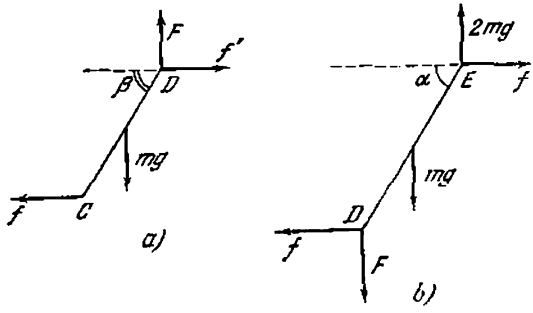


Fig. 339

do que el momento de las fuerzas respecto a D es nulo, podemos escribir las siguientes igualdades

$$f \operatorname{sen} \beta \cdot CD = mgCD (\cos \beta)/2 \text{ ó } \operatorname{tg} \beta = mg/2f.$$

En la fig. 339, *b* se representan las fuerzas que actúan sobre la barra DE. De la condición que el momento de las fuerzas respecto al punto E es nulo, deducimos que

$$f \operatorname{sen} \alpha \cdot DE = F \cos \alpha \cdot DE + mg \frac{\cos \alpha}{2} DE \text{ ó } \operatorname{tg} \alpha = \frac{3mg}{2f}.$$

Por consiguiente, $\operatorname{tg} \alpha = 3 \operatorname{tg} \beta$.

146. Las fuerzas que actúan sobre la caja se dan en la fig. 340. Las condiciones de equilibrio tienen la siguiente forma: $Q \cos \alpha = F_{roz}$ y $P = N + Q \operatorname{sen} \alpha$. En el momento de la pérdida

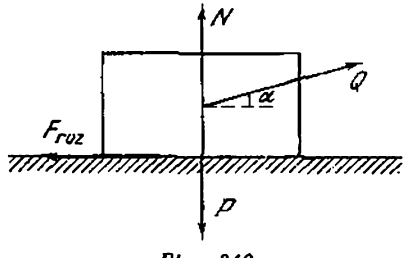


Fig. 340

de equilibrio la fuerza de rozamiento alcanza su valor máximo $F_{roz} = kN$, que, sustituyéndose en las ecuaciones anteriores, nos da $Q = kP/(\cos \alpha + k \operatorname{sen} \alpha)$. El valor de Q será mínimo para el valor del ángulo α que corresponde al valor máximo del denominador. Para determinar el máximo del denominador

lo transformamos, introduciendo en lugar de k un nuevo valor φ tal, que $\operatorname{tg}\varphi = k$. Así tenemos $\cos\alpha + k \operatorname{sen}\alpha = \cos(\alpha - \varphi)/\cos\varphi$ ó $\cos\alpha + k \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1+k^2} \times \cos(\alpha - \varphi)$. Como el valor máximo del $\cos(\alpha - \varphi)$ es igual a 1, concluimos que $Q_{\min} = kP/\sqrt{1+k^2}$, de donde $k = Q/\sqrt{P^2 - Q^2} = 0{,}75$.

147. Las fuerzas que actúan sobre el cilindro se muestran en la fig. 341. Como el cilindro no tiene movimiento de traslación, podemos escribir que

$$F_{roz} - F\cos\alpha = 0 \quad \text{y} \quad F\operatorname{sen}\alpha - mg + N = 0.$$

La fuerza de rozamiento es $F_{roz} = kN$. Sustituyéndola en las ecuaciones anteriores, obtenemos: $F = kmg/(\cos\alpha + k\operatorname{sen}\alpha)$.

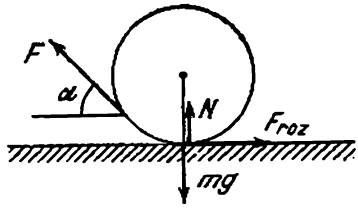


Fig. 341

El denominador de esta expresión puede escribirse en forma de $A\operatorname{sen}(\alpha + \varphi)$, donde $A = \sqrt{1+k^2}$. Por lo tanto, la fuerza mínima con que debe tirarse de la cuerda es $F_{\min} = kmg/\sqrt{1+k^2}$. El ángulo α_1 recibimos de la ecuación $\cos\alpha_1 + k\operatorname{sen}\alpha_1 = \sqrt{1+k^2}$, de donde $\operatorname{tg}\alpha_1 = k$.

148. Las fuerzas que actúan sobre el émbolo y sobre la tapa posterior del cilindro son iguales a $F_1 = F_2 = pS$ (fig. 342, *a*). Sobre

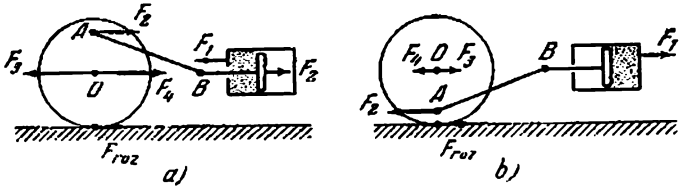


Fig. 342

el punto A de la rueda, en dirección horizontal, actúa también la fuerza F_2 transmitida por el émbolo mediante el mecanismo de biela y manivela.

La suma de los momentos de las fuerzas que actúan sobre la rueda respecto a su eje es nula. (Se prescinde de la masa de la

rueda.) Por consiguiente, tenemos que $F_{roz} \cdot R = F_2 \cdot r$, donde F_{roz} es la fuerza de rozamiento. Como la suma de las fuerzas que actúan sobre la rueda también es nula la fuerza F_3 que actúa sobre el eje por parte de los engranajes del tren es igual a $F_3 = F_{roz} + F_2$. Según la tercera ley de Newton sobre el tren por parte del eje actúa la fuerza $F_4 = F_3$. Por consiguiente, la fuerza de tracción es $F = F_4 - F_1 = F_{roz} = pSr/R$.
En la segunda posición del pistón y del mecanismo de biela y manivela se interseptan las fuerzas que se muestran en la fig. 342, *b*. $F_{roz} = F_2 r/R$ análogamente al caso anterior. La fuerza de tracción es $F = F_1 - F_4 = F_{roz} = pSr/R$. Como era de esperar, la fuerza de tracción es igual a la fuerza de rozamiento, ya que la fuerza de rozamiento es la única fuerza externa que actúa sobre el tren.

149. La mayor longitud de la parte saliente del ladrillo superior es igual a $l/2$. El centro de gravedad de dos ladrillos superiores C_2 se encuentra a una distancia $l/4$ con relación al extremo del

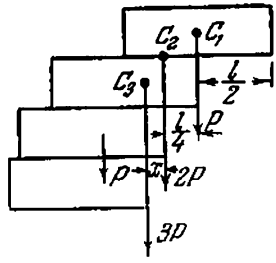


Fig. 343

segundo ladrillo (fig. 343). Por consiguiente, en esta longitud el segundo ladrillo puede ser desplazado respecto al tercero. El centro de gravedad de tres ladrillos superiores C_3 se determina por la igualdad de los momentos de las fuerzas de gravedad con relación a C_3: $P\,(l/2 - x) = 2Px$, de donde $x = l/6$, o sea, el tercer ladrillo puede sobresalir el cuarto no más que en $l/6$. De modo análogo podemos determinar que el cuarto ladrillo sobresale el quinto en $l/8$, etc. El carácter del cambio de la longitud de la parte saliente con el aumento del número de ladrillos es evidente. La distancia máxima en que la parte derecha del ladrillo superior puede sobresalir el ladrillo inferior, que sirve de base, se escribe en forma de una serie:

$$L = \frac{l}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\right).$$

Para un aumento ilimitado del número de ladrillos esta suma tiende al infinito. En efecto, la suma de la serie:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots$$

es mayor que la suma de la serie:

$$1+\frac{1}{2}+\overbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}^{1/2}+\overbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}^{1/2}+\cdots$$

y esta última suma es infinitamente grande en caso de un número infinito de términos. El centro de gravedad de todos los ladrillos pasa por el extremo derecho del ladrillo inferior. El equilibrio será inestable. (Tal configuración sería posible, si la Tierra fuera plana.)

150. En la circunferencia de radio r inscribimos un polígono regular (fig. 344). Determinemos, luego, el momento de las fuerzas de gravedad (respecto al eje AK), aplicadas a los centros de los

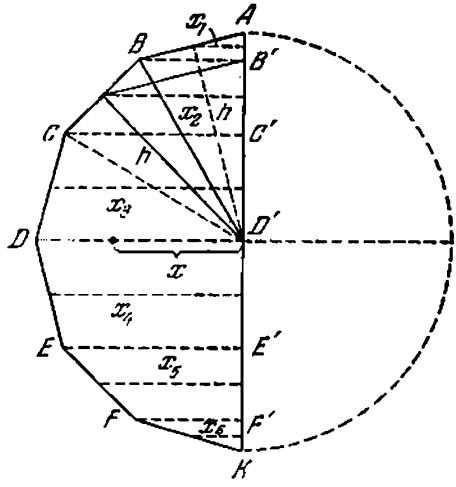


Fig. 344

lados del polígono AB, BC, CD, DE, etc., considerando que la fuerza de gravedad actúa perpendicularmente al dibujo. Este momento es igual a $\rho g\,(ABx_1 + BCx_2 + CDx_3 + DEx_4 + EFx_5 + FKx_6)$, donde ρ es la masa de una unidad de longitud de alambre.

Analizando la semejanza de los triángulos correspondientes se puede demostrar que los productos ABx_1, BCx_2, CDx_3, etc., son iguales, respectivamente, a $AB'h$, $B'C'h$, $C'D'h$, etc., donde h es la apotema del polígono. De este modo el momento es igual a

$$\rho gh\,(AB' + B'C' + C'D' + D'E' + E'F' + F'K) = \rho gh2r.$$

Si el número de los lados crece ilimitadamente, el valor h tiende a r y el momento tiende a $2r^2\rho g$. Por otro lado, el momen-

to es igual al producto de la fuerza de gravedad del alambre, $\pi r\rho g$, a una distancia x del centro de gravedad del eje AK. Entonces tenemos que $2r^2\rho g = \pi r\rho g x$, de donde $x = 2r/\pi$.

151. Dividimos el semicírculo en triángulos y segmentos, como muestra la fig. 345. El centro de gravedad de un triángulo se encuentra, como se conoce, en la intersección de las medianas.

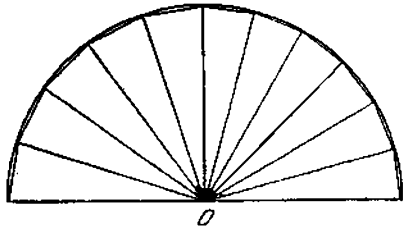


Fig. 345

En este caso el centro de gravedad de cada triángulo se encuentra a una distancia $2/3h$ del punto O (h es la apotema). Para un aumento ilimitado del número de los lados los centros de gravedad de los triángulos se encontrarán en una circunferencia de radio $2/3r$, y las áreas de los segmentos tenderán a cero. De este modo, el problema se reduce a la determinación del centro de gravedad de una semicircunferencia de radio $2/3r$. De la solución del problema 150 se deduce que x es la distancia del centro de gravedad de semicircunferencia al punto O y es igual a $x = \frac{2}{\pi}\frac{2}{3}r = \frac{4}{3\pi}r$.

152. Aprovechando el método de solución de los problemas 150 y 151 se puede demostrar que el centro de gravedad se encuentra en el punto G situado a una distancia $CO = \frac{2 \operatorname{sen}(\alpha/2)}{\alpha} r$ del centro de curvatura del arco (véase la fig. 59).

153. Aprovechando las soluciones de los problemas 150, 151, 152 se puede demostrar que el centro de gravedad se encuentra en el punto C, alejado del punto O a una distancia $CO = \frac{4}{3} \times \frac{\operatorname{sen}(\alpha/2)}{\alpha} r$.

154. Para determinar la posición del centro de gravedad de una lámina con un corte podemos considerarla continua si en ella fue colocado un semicírculo de masa negativa, igual en magnitud a la de la parte cortada. El momento de las fuerzas de gravedad de las masas, tanto positiva como negativa, respecto al eje AB, es igual a

$$\rho g\left(2r^2\frac{r}{2} - \frac{\pi r^2}{2}\frac{4}{3\pi}r\right) = \frac{1}{3}r^3\rho g,$$

si la fuerza de gravedad actúa perpendicularmente al dibujo, ρ es la masa de la unidad de área de la lámina (véase la resolución del problema 151). Por otro lado, este momento es igual al producto de la fuerza de gravedad de la lámina por la distancia $x = OC$ de su centro de gravedad hasta el eje AB. Por consiguiente resulta que $x\rho g\,(2r^2 - \pi r^2/2) = \frac{1}{3} r^3 \rho g$, de donde

$$x = \frac{2}{3\,(4 - \pi)}\, r.$$

§ 7. TRABAJO Y ENERGIA

155. El trabajo de la fuerza no depende de la masa del cuerpo sobre el cual ella actúa. Una fuerza de 30 N realizará un trabajo $A = Fh = 150$ J. Este trabajo provocará el aumento de la energía potencial (50 J) y de la energía cinética (100 J) de la carga.

156. En primer lugar es necesario encontrar la fuerza de presión del aire en uno de los hemisferios. Supongamos que la base de éste está cerrada por una tapa plana en forma de disco de radio R. Entonces, si del recipiente obtenido bombeamos el aire, la fuerza de presión en la tapa plana será $F_1 = pS = p\pi R^2$. Es evidente que ésta será también la fuerza de presión de aire en el hemisferio. En caso contrario, las fuerzas no se equilibrarán mútuamente y el recipiente se moverá siempre en dirección de la fuerza mayor. El número de caballos deberá ser igual a F_1/F, ya que el otro hemisferio podrá ser simplemente atado a una columna. La cuerda tendida creará una fuerza exactamente igual a la fuerza creada por los caballos que tira por otro lado.

157. La variación de la cantidad de movimiento del cuerpo es igual al impulso de la fuerza de gravedad. Como las fuerzas que actúan sobre la piedra y sobre la Tierra son iguales y actúan durante un tiempo igual, las variaciones de las cantidades de movimiento de estos cuerpos también serán iguales. La variación de la energía cinética del cuerpo es igual al trabajo de las fuerzas de gravitación. Las fuerzas son iguales, pero los trayectos recorridos por la piedra y por la Tierra son inversamente proporcionales a sus masas. Es precisamente por eso que el principio de conservación de la energía puede escribirse de forma que no considera la variación de la energía cinética de la Tierra: $mv^2/2 + W = \text{const}$, donde m es la masa de la piedra y W, la energía potencial de interacción.

158. Según el principio de conservación de la energía tenemos que $m_1gh = m_1v_1^2/2$, donde m_1 es la masa del martinete; h, la altura de caída del martinete; v_1, la velocidad del martinete antes del choque. Debido a la corta duración del choque, la fuerza resistente no puede cambiar sensiblemente la cantidad total de movimiento del sistema. Como el choque es inelástico tenemos: $m_1v_1 = (m_1 + m_2)\,v_2$, donde m_2 es la masa del piloto; v_2, la velocidad del martinete y del piloto en el primer momento

después del choque. La energía mecánica del martinete y del pilote se utiliza en el trabajo contra las fuerzas de resistencia F del suelo:

$$\frac{(m_1+m_2)\,v_2^2}{2}+(m_1+m_2)\,gS=FS,$$

donde S es la profundidad de introducción del pilote en el suelo. Entonces recibimos que

$$F=\frac{m_1}{m_1+m_2}\cdot\frac{h}{S}\,m_1g+m_1g+m_2g\approx 24\,500\ \text{N}.$$

159. Como resultado del choque inelástico la velocidad lineal de la caja junto con la bala en el primer momento de tiempo será igual a $u=\dfrac{mv}{M+m}$, donde v es la velocidad de la bala. El ángulo de desviación α, de acuerdo con el principio de conservación de la energía, se relaciona con la velocidad v de la siguiente manera:

$$\frac{(M+m)\,u^2}{2}=\frac{m^2v^2}{2\,(M+m)}=(M+m)\,L\,(1-\cos\alpha)\,g.$$

De ahí determinamos que

$$v=2\,\text{sen}\,\frac{\alpha}{2}\,\frac{M+m}{m}\,\sqrt{Lg}.$$

160. Como la explosión es muy rápida, las fuerzas horizontales externas (fuerzas de rozamiento) no pueden cambiar sensiblemente la cantidad total de movimiento del sistema en el período de la explosión. Antes e inmediatamente después de la explosión la cantidad permanece igual a cero. Por lo tanto $m_1v_1+m_2v_2=0$, de donde $v_1/v_2=-m_2/m_1$. Como los carritos finalmente paran, sus energías cinéticas iniciales se utilizan en el trabajo contra las fuerzas de rozamiento:

$$m_1v_1^2/2=km_1gS_1,\qquad m_2v_2^2/2=km_2gS_2,$$

de donde recibimos que $v_1^2/v_2^2=S_1/S_2$ y de tal modo, $S_2=2$ m.

161. Designemos por u la velocidad del cuerpo y del carrito después de cesar su movimiento relativo. Basándose en el principio de conservación de la cantidad de movimiento, podemos escribir que

$$(M+m)\,u=Mv_0. \qquad (1)$$

El carrito pierde energía cinética, porque la fuerza de rozamiento f que actúa sobre éste realiza un trabajo negativo igual a $Mv_0^2/2-Mu^2/2=fS$, donde S es el trayecto recorrido por el carrito. El cuerpo adquiere una energía cinética como consecuencia del trabajo positivo realizado por la fuerza de rozamiento en el cuerpo. Esta energía es igual a $mu^2/2=fs$, donde s es el trayecto recorrido por el cuerpo.

La variación de la energía cinética del sistema es igual a

$$\frac{Mv_0^2}{2}-\left[\frac{Mu^2}{2}+\frac{mu^2}{2}\right]=f(S-s), \qquad (2)$$

y como se ve su variación es igual a la fuerza de rozamiento multiplicada por el desplazamiento relativo del cuerpo a lo largo del carrito. De las ecuaciones (1) y (2) deducimos que $S-s=\frac{mMv_0^2}{2f(M+m)}$. Como $S-s\leqslant l$, entonces $l\geqslant \frac{mMv_0^2}{2f(M+m)}$. Considerando que $f=kmg$, recibimos

$$l\geqslant\frac{Mv_0^2}{2kg(M+m)}.$$

162. Como resultado de la combustión de la segunda porción, la velocidad v del cohete aumenta en valor Δv. Según el principio de conservación de la cantidad de movimiento (ya que la combustión se realiza instantáneamente), podemos escribir

$$(M+m)v=M(v+\Delta v)+m(v-u),$$

donde m es la masa de la porción del combustible; M, la masa del cohete sin combustible; u, la velocidad de salida de los gases con relación al cohete. El incremento de la velocidad del cohete $\Delta v=\frac{m}{M}u$ no depende de su velocidad v antes de la combustión de la segunda porción. Al contrario, el incremento de la energía cinética del cohete (sin combustible)

$$\Delta E_0=\frac{M(v+\Delta v)^2}{2}-\frac{Mv^2}{2}=mu\left(\frac{m}{2M}u+v\right)$$

será tanto mayor cuanto mayor es v.
La altura de elevación del cohete se determina por la cantidad de energía recibida por éste. Por eso es más ventajoso quemar la segunda porción de combustible en el momento cuando la velocidad del cohete es la máxima, es decir, inmediatamente después de la primera porción. En estas condiciones la mayor parte de la energía mecánica que surge como consecuencia de la quema del combustible, se transmitirá al cohete y la energía mecánica de los productos de combustión será mínima.

163. Es suficiente analizar la combustión sucesiva de dos porciones de combustible. Supongamos que inicialmente la masa del cohete con el combustible sea $M+2m$. Después de combustión de la primera porción, la velocidad del cohete es $v=mu_1/(M+m)$, donde u_1 es la velocidad de dos gases respecto al cohete. Consideremos la velocidad inicial del cohete igual a cero. El incremento de la velocidad del cohete, después de combustión de la segunda porción, es $\Delta v=mu_2/M$, donde u_2 es el nuevo valor de la velocidad de los gases respecto al cohete.

Al quemar la primera porción, la energía mecánica liberada es igual a $\Delta E_1 = (M + m) v^2/2 + m u_1^2/2$. Al quemar la segunda porción se libera la energía

$$\Delta E_2 = \frac{M (v + \Delta v)^2}{2} + \frac{m (v - u_2)^2}{2} - \frac{(M + m) v^2}{2}.$$

Según la condición del problema: $\Delta E_1 = \Delta E_2$, de donde obtenemos que

$$u_1^2 \left(\frac{m^2}{2 (M + m)} + \frac{m}{2} \right) = v_2^2 \left(\frac{m^2}{2M} + \frac{m}{2} \right).$$

Por consiguiente, $u_1 > u_2$, es decir, la velocidad de los gases respecto al cohete disminuyó. Esto se relaciona con la disminución de la masa del cohete en el proceso de combustión.

164. Ambos declives pueden dividirse en un número infinito de planos inclinados pequeños con diferentes ángulos de inclinación. Analicemos uno de ellos (fig. 346). El trabajo realizado

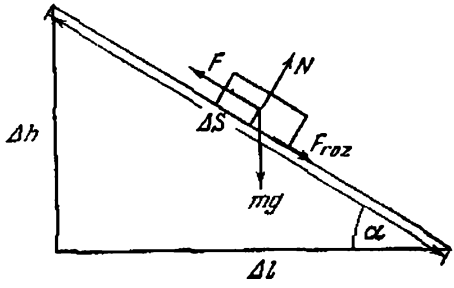


Fig. 346

para la elevación del cuerpo en este plano inclinado es igual al trabajo contra las fuerzas de gravedad $mg \cdot \Delta h$ más el trabajo contra las fuerzas de rozamiento $F_{roz} \cdot \Delta S$. Sabemos que $F_{roz} = kmg \cos \alpha$ y $\Delta S = \Delta l / \cos \alpha$, de donde obtenemos que $F_{roz} \Delta S = kmg \Delta l$. El trabajo total será igual a $\Delta A = mg (\Delta h + k \Delta l)$. Considerando todos los planos inclinados y sumando los trabajos elementales, el trabajo total resulta ser igual a

$$A = \sum \Delta A = mg \left(\sum \Delta h + k \sum \Delta l \right) = mgh + kmgl.$$

El trabajo se determina apenas por la altura de la montaña h y por la longitud l de su pie.

165. La fuerza aplicada a la manivela será mínima si ésta forma con ella un ángulo recto. Designando por F el valor de la fuerza que buscamos y basándose en la ley fundamental de la mecánica, tenemos $2\pi RF = Ph$, de donde $F = Ph/2\pi R$.

166. Según la definición el coeficiente de rendimiento es $\eta = A_1/(A_1 + A_2)$, donde $A_1 = PH$ es el trabajo para elevar

el peso P a una altura H, y A_2, el trabajo realizado en este proceso contra las fuerzas de rozamiento. Como la fuerza de rozamiento es capaz de mantener el peso en equilibrio, el trabajo de esta fuerza no puede ser menor que el trabajo A_1. El mínimo valor del trabajo de las fuerzas de rozamiento es $A_2 = A_1$. De este modo $\eta \leqslant 50\%$.

167. Durante la subida del hombre por la escalera, el aeróstato baja a una cierta altura h. Por consiguiente, el trabajo realizado por el hombre provocará el aumento de la energía potencial del hombre en un valor $mg\,(l - h)$, y también el aumento de la energía potencial del aeróstato en un valor mgh (sobre el aeróstato, sin el hombre, actúa una fuerza ascensional mg dirigida hacia arriba), de donde tenemos que

$$A = mg\,(l - h) + mgh = mgl.$$

Esto resultado puede obtenerse inmediatamente, calculando el trabajo del hombre en un sistema unido a la escalera. Si el hombre sube con velocidad v respecto a la escalera, entonces respecto a la Tierra el hombre tendrá una velocidad $v - v_1$, donde v_1 es la velocidad del aeróstato durante la subida del hombre. Según el principio de conservación de la cantidad de movimiento $(v - v_1)\,m = Mv_1$, de donde $v_1 = \dfrac{m}{M + m}\,v$.

168. A fin de bombear una cantidad de agua dos veces mayor por unidad de tiempo es necesario transmitir a una masa de agua dos veces mayor una velocidad también dos veces mayor. (El trabajo del motor se usa para transmitir al agua la energía cinética $mv^2/2$.) Por eso la potencia del motor debe aumentar ocho veces.

169. 1) Se realiza el siguiente trabajo para bombear el agua del pozo:

$$A_1 = \rho g \frac{H}{2} S \cdot \frac{3}{4} H = \frac{3}{8} \rho g S H^2,$$

donde ρ es la densidad del agua. Para transmitir al agua una energía cinética se realiza el siguiente trabajo:

$$A_2 = \frac{1}{2} \rho \frac{H}{2} S v^2$$

La velocidad v con que el agua sale del tubo a la superficie de la tierra se determina de la relación $(H/2)\,S = \pi R^2 v \tau$. El trabajo total es

$$A = \frac{3}{8} \rho g S H^2 + \frac{1}{16} \rho \frac{H^3 S^3}{\pi^2 R^4 \tau^2}.$$

2) El trabajo realizado para hacer subir el agua en el segundo caso es menor que A_1 en un valor $\Delta A_1' = \rho g S_1 h\,(H - h/2)$. El

trabajo realizado para transmitir al agua una energía cinética es:

$A_2' = \frac{1}{2}\rho \frac{(HS/2 - hS_1)^3}{\pi^2 R^4 \tau^2}$. El trabajo total será: $A' = A_1 - \Delta A_1' + A_2'$.

170. Es más simple resolver el problema en el sistema de las coordenadas relacionado con la escalera mecánica. El hombre recorrerá respecto a ella una distancia $l = h/\text{sen}\,\alpha + v\tau$, donde $v\tau$ es el trayecto recorrido por la escalera mecánica. Para esto ella realizará un trabajo $A = (h/\text{sen}\,\alpha + v\tau)\,mg\,\text{sen}\,\alpha$, ya que por ocasión de elevación, la fuerza mg fue aplicada al trayecto l y formaba con éste un ángulo igual a $90° - \alpha$. Una parte del trabajo mgh será destinada al aumento de la energía potencial del hombre, la otra parte del trabajo, $mgv\tau\,\text{sen}\,\alpha$, junto con el trabajo del motor que pone la escalera en movimiento, será destinada para vencer las fuerzas de rozamiento.

171. La energía del muelle estirado por el punto medio O es $W_1 = (2k)\,x^2/2$. Cuando sueltan el muelle su energía se hace igual a $W_2 = kx^2/2$, porque durante el período de redistribución de las deformaciones elásticas en el muelle, la masa m no consigue desplazarse. Por consiguiente las pérdidas de energía en el muelle serán $W_1 - W_2 = kx^2/2$. Naturalmente este cálculo es aproximado.

172. El hombre actuando con una fuerza F sobre el muelle realiza un trabajo $A_1 = -FL$. Simultáneamente, sobre el piso del vagón por parte del hombre actúa la fuerza de rozamiento F. El trabajo de esta fuerza es igual a $A_2 = FL$. De esto modo el trabajo total realizado por el hombre en el sistema de las coordenadas unido a la Tierra es nulo, así como en el sistema unido al tren.

173. En el sistema del tren el trabajo realizado es igual a la energía potencial del muelle estirado, o sea, $A = kl^2/2$, porque la fuerza de rozamiento entre el hombre y el piso del vagón en este sistema no realiza trabajo. En el sistema unido a la Tierra el trabajo del hombre para extender el muelle es igual al producto de la fuerza media $kl/2$ por el trayecto recorrido $L - l$, o sea, $A_1 = (kl/2)\,(L - l)$. Sobre el piso del vagón el hombre actúa con la misma fuerza media $kl/2$. Su trabajo es $A_2 = (kl/2)\,L$. El trabajo total en el sistema de las coordenadas dado es $A = A_1 + A_2 = kl^2/2$, o sea, el mismo que en el sistema del vagón.

174. Basándose en los principios de conservación de la cantidad de movimiento y de la energía, podemos escribir las siguientes ecuaciones:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2},$$

donde v_1' y v_2' son las velocidades de las bolas después del choque. Resolviendo el sistema de ecuaciones dado, recibimos que

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)\, v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2},$$

$$v_2' = \frac{(m_2 - m_1)\, v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

1) Si la segunda bola antes del choque estaba en reposo ($v_2 = 0$), entonces

$$v_1' = (m_1 - m_2)\, v_1/(m_1 + m_2),$$
$$v_2' = 2m_1 v_1/(m_1 + m_2).$$

Para $m_1 > m_2$ la primera bola continúa moviéndose en la misma dirección que tenía antes del choque, pero con menos velocidad. Si $m_1 < m_2$, la primera bola, después del choque, vuelve hacia atrás. La segunda bola se moverá en el mismo sentido, en que se movía la primera bola antes del choque.
2) Si $m_1 = m_2$, entonces tenemos

$$v_1' = 2mv_2/2m = v_2, \quad v_2' = 2mv_1/2m = v_1.$$

Las bolas durante el choque cambian de velocidades.

175. La energía de deformación elástica se volverá máxima, cuando la velocidad relativa de las bolas se hará nula. Para este momento de tiempo, el principio de conservación de la energía mecánica y el principio de conservación de la cantidad de movimiento pueden escribirse de la siguiente forma:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)}{2} u^2 + W,$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)\, u,$$

donde u es la velocidad absoluta de las bolas en el momento cuando ellas posean la energía máxima W de deformación elástica. Por lo tanto tenemos

$$W = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

176. Como resultado del choque elástico la barra izquierda adquiere una velocidad v. La barra derecha en este momento aún está en reposo, ya que el muelle no se deformó. Designemos por u_1 y u_2 las velocidades de las barras izquierda y derecha en un momento cualquiera de tiempo, por x, el alargamiento absoluto del muelle en el mismo momento de tiempo. Basándose en los principios de conservación de la cantidad de movimiento y de la energía, obtenemos:

$$m(u_1 + u_2) = mv,$$

$$\frac{mu_1^2}{2} + \frac{mu_2^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{mv^2}{2},$$

o $kx^2 = m\,[v^2 - (u_1^2 + u_2^2)]$. Sustituyendo en la última ecuación v por $(u_1 + u_2)$, obtenemos $kx^2 = 2mu_1u_2$. Por consiguiente tenemos $u_1u_2 = kx^2/2m$ y $u_1 + u_2 = v$.
En dos últimas expresiones podemos ver claramente que u_1 y u_2 tendrán el mismo signo, porque ambas barras se mueven en el mismo sentido. El valor x^2 será máximo, cuando el producto de las velocidades u_1 y u_2 es máximo. De este modo, para responder a la segunda pregunta del problema, es necesario determinar el valor máximo del producto u_1u_2 en las condiciones cuando la suma $u_1 + u_2$ es constante e igual a v. Consideremos la desigualdad evidente $(u_1 - u_2)^2 \geqslant 0$ ó $u_1^2 - 2u_1u_2 + u_2^2 \geqslant 0$. Adicionemos a ambos miembros de la desigualdad el valor $4u_1u_2$. Resulta que $u_1^2 + 2u_1u_2 + u_2^2 \geqslant 4u_1u_2$ ó $(u_1 + u_2)^2 \geqslant 4u_1u_2$. Como $u_1 + u_2 = v$, entonces $4u_1u_2 \leqslant v^2$. Por lo tanto el valor máximo de u_1u_2 es igual a $v^2/4$ y éste se obtiene cuando $u_1 = u_2 = v/2$. La distancia entre las barras en este momento será igual a

$$l \pm x_{\text{máx}} = l \pm v\sqrt{m/2k}.$$

177. Mientras la lámina inferior está sobre la mesa, del principio de conservación de la energía mecánica se deduce que

$$\frac{kx^2}{2} - mgx = \frac{ky^2}{2} + mgy + \frac{mv^2}{2}, \qquad (1)$$

donde y es el alargamiento del muelle; v, la velocidad de la lámina superior. En el momento cuando la lámina inferior abandona la mesa, tenemos

$$ky = mg, \quad y = mg/k,$$

siendo $v > 0$. Considerando estas relaciones, recibimos de (1) que

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{kx^2}{2} - mgx - \frac{3}{2} - \frac{m^2g^2}{2k} > 0. \qquad (2)$$

A fin de que se verifique la fórmula (2), debemos tener $x > 3mg/k$.
La velocidad v_C del centro de masas en el momento cuando la lámina inferior se desprende de la mesa, es igual a $v_C = v/2$. Después de que la lámina inferior abandona la mesa, el centro de masas se moverá hacia arriba uniformemente retardado con aceleración g y velocidad inicial v_C. Por consiguiente la altura de máxima elevación del centro de masas es

$$H = \frac{v_C^2}{2g} = \frac{v^2}{8g}, \qquad H = \frac{1}{8g}\left(\frac{kx^2}{m} - 2gx - 3\frac{mg^2}{k}\right),$$

donde H se cuenta desde la posición que el centro de masas ocupaba en el momento cuando la lámina inferior abandonó la mesa. (El problema estudiado nos da una idea de los procesos que tienen lugar durante saltos de altura.)

178. En el sistema de referencia unido a la pared, la velocidad de la bola es $(v + u)$. Después del choque, en este mismo sistema de referencia, la velocidad de la bola será $-(v + u)$. La velocidad de la bola después del choque respecto a un sistema de referencia inmóvil es igual a

$$-(v + u) - u = -(v + 2u).$$

La energía cinética después del choque es $m(v + 2u)^2/2$ y antes del choque es $mv^2/2$. La variación de la energía cinética es igual a $2mu(u + v)$.
Consideremos, luego, el trabajo de las fuerzas elásticas que actúan sobre la bola en el momento del choque. Supongamos que el choque dura un tiempo τ; supongamos también para simplificar que en el momento del choque la fuerza elástica sea constante (el resultado no depende de esta suposición). Considerando que debido al choque la cantidad de movimiento cambió en un valor $2m(v + u)$, la fuerza elástica es igual a $F = 2m(v + u)/\tau$. El trabajo de esta fuerza será

$$A = FS = Fu\tau = 2m(v + u)u\tau/\tau = 2m(v + u)u.$$

Como podemos ver fácilmente este trabajo es igual al cambio de la energía cinética.

179. 1) Hasta el momento cuando la cuerda elástica se estira, las piedras caen libremente:

$$S_1 = gt^2/2, \quad S_2 = g(t - \tau)^2/2.$$

El momento de tensión de la cuerda, se determina de la condición $l = S_1 - S_2$, de donde obtenemos que $t = 3$ s, $S_1 = 44{,}1$ m, $S_2 = 4{,}9$ m. El tiempo se cuenta desde el momento de caída de la primera piedra. Al estirarse la cuerda, se efectúa un choque elástico y las piedras cambian de velocidades (véase el problema 174). En el momento del choque

$$v_1 = gt = 29{,}4 \text{ m/s}, \quad v_2 = g(t - \tau) = 9{,}8 \text{ m/s}.$$

El tiempo de caída t_1 de la primera piedra (después de estirarse la cuerda) se determina de la condición:

$$h - S_1 = v_2 t_1 + gt_1^2/2.$$

El tiempo t_2 de caída de la segunda piedra se halla de la condición:

$$h - S_2 = v_1 t_2 + gt_2^2/2,$$

de donde recibimos que $t_1 \approx 1{,}6$ s, $t_2 \approx 1{,}8$ s. La primera piedra cae en 4,6 s, la segunda en 2,8 s.
2) Si la cuerda es inelástica, las velocidades de las piedras se igualan después de estirarse la cuerda (choque inelástico): $v = (v_1 + v_2)/2 = 19{,}6$ m/s. El tiempo de caída de las piedras, después de que la cuerda de estira, se determina por las ecuaciones:

$$h - S_1 = vt_1' + gt_1'^2/2, \quad h - S_2 = vt_2' + gt_2'^2/2.$$

S_1 y S_2 son idénticos a los del primer caso. De ahí $t_1' \approx 1{,}2$ s y $t_2' \approx 3{,}3$ s. La primera piedra cae en 4,2 s, la segunda en 4,3 s.

180. Si inclinamos solamente una esfera de derecha, entonces después del choque por la izquierda la esfera de extremo izquierdo salta formando un ángulo igual al ángulo de inclinación de esfera derecha. Si inclinamos simultáneamente dos esferas y las soltamos, entonces después del choque saltarán dos esferas del extremo izquierdo. Si inclinamos tres esferas de derecha, saltarán tres de izquierda, etc.

En el choque de la primera esfera con la segunda, la primera para, transmitiendo su cantidad de movimiento a la segunda esfera (véase la resolución del problema 174); la segunda transmitirá esta misma cantidad de movimiento a la tercera, la tercera a la cuarta, etc. La esfera del extremo izquierdo no tiene otra para seguir, por eso ella salta (si no hay rozamiento y pérdida de energía), formando un ángulo igual al de inclinación de la esfera del extremo derecho. Cuando la esfera izquierda, después de saltar en un ángulo máximo, se choca con la penúltima esfera, el proceso de transmisión de la cantidad de movimiento por la cadena de las esferas se repite en sentido contrario.

Si inclinamos simultáneamente dos esferas de derecha, ellas transmitirán su cantidad de movimiento a la cadena no simultáneamente, sino la una después de la otra, en un intervalo de tiempo muy pequeño (imperceptible para el ojo humano). De ese modo, la cadena de las esferas recibirá no un impulso doble, sino dos impulsos que se distribuirán por la cadena con un determinado intervalo de tiempo. La esfera del extremo izquierdo saltará al recibir la «primera dosis» de la cantidad de movimiento. En seguida saltará la penúltima, al recibir la «dosis siguiente» de la cantidad de movimiento que le fue transmitida por la esfera del extremo derecho. Al incluir tres esferas de derecha la cadena recibirá, la una después de la otra dentro de un intervalo de tiempo muy pequeño, las «dosis» de la cantidad de movimiento respectivamente de la tercera, segunda y primera esfera de derecha. Si inclinamos y soltamos al mismo tiempo cuatro esferas entonces saltarán hacia la izquierda cuatro de ellas y dos permanecerán inmóviles.

181. La esfera que choca, salta hacia atrás y las esferas siguientes, hasta la esfera de acero, permanecerán inmóviles. La esfera de acero y las esferas vecinas se moverán hacia la izquierda, siendo diferentes sus velocidades. La esfera del extremo izquierdo se moverá más rápidamente que las demás. La penúltima de izquierda se moverá más lentamente, etc. Las esferas se separan (véase la resolución de los problemas 174 y 180).

182. Supongamos que la carga $2m$ baje a una altura H. Entonces las cargas m se elevarán a una altura h (fig. 347). Aprovechando el principio de conservación de la energía tenemos:

$$2mgh + \frac{2mv_1^2}{2} + \frac{2mv_2^2}{2} = 2mgH$$

ó

$$v_1^2 + v_2^2 = 2g(H - h),$$

donde v_1 es la velocidad de las cargas m y v_2, la velocidad de la carga de masa $2m$. Mientras la carga $2m$ va bajando, su velocidad v_2 se aproxima a la velocidad v_1, ya que los ángulos entre las partes de la cuerda que se apoyan sobre las poleas

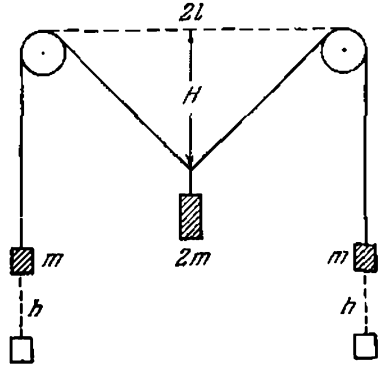


Fig. 347

tienden a cero. En el límite $v_2 \approx v_1$ y al mismo tiempo $H - h \approx \approx l$. Por consiguiente el valor límite de la velocidad de las cargas es $v = \sqrt{gl}$.

183. Las velocidades de los pesos son iguales si los trayectos recorridos por ellos en el mismo intervalo corto de tiempo, son iguales. Estos trayectos se igualarán para el valor del ángulo ANB, con que el descenso del peso m_1 en $\Delta s = NK$ (fig. 348) provoca

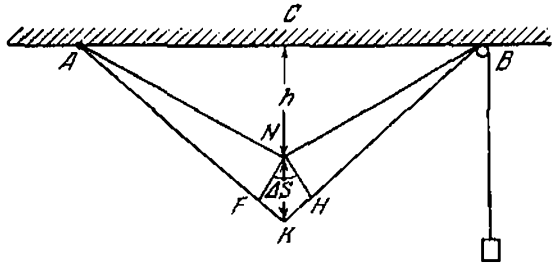


Fig. 348

un aumento de la longitud de la cuerda ANB también en un valor Δs. Por eso igualando las velocidades, obtenemos que $HK = BK - BN = \Delta s/2$ y $FK = AK - AN = \Delta s/2$. Los triángulos NHK y NFK se aproximarán tanto más a los triángulos rectángulos, cuanto menor sea el segmento Δs que nosotros escogemos. Para $\Delta s \to 0$ los ángulos NHK y NFK

tienden a un ángulo recto y los ángulos KNH y KNF tienden a 30°. Por consiguiente, las velocidades serán iguales para $\angle ANB = 120°$. Valiéndose del principio de conservación de la energía, hallamos los valores de estas velocidades:

$$m_1gh = 2(2-\sqrt{3})\, m_2gh + \frac{m_1+m_2}{2} v^2,$$

de donde

$$v_2 = 2gh\,\frac{m_1 - 2(2-\sqrt{3})\, m_2}{m_1+m_2} \approx 0.$$

Los pesos se oscilarán en torno de la posición de equilibrio, a que corresponde el valor del ángulo $ANB = 2 \arccos (m_1/2m_2) \approx \approx 149°$.

Al ángulo $ANB = 120°$ corresponde la desviación máxima de la posición de equilibrio.

184. Como no existen deslizamiento entre la tabla y los rodillos en la superficie horizontal, la distancia entre los ejes de los rodillos durante el movimiento permanece constante. Como consecuencia de esto, el movimiento de la tabla será de traslación. La tabla se desplazará en dirección horizontal y simultáneamente se moverá hacia abajo a lo largo de los rodillos. Si

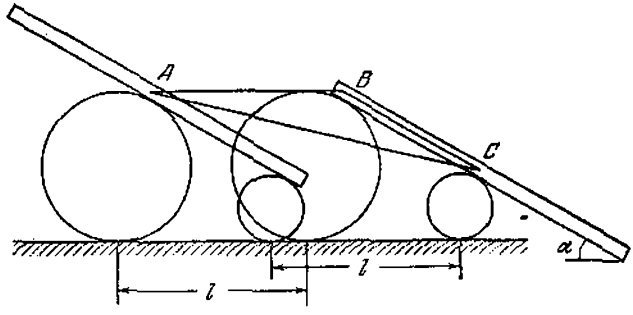


Fig. 349

los rodillos se desplazarán a una distancia cualquier l, entonces cada punto de la tabla (en particular, su centro de gravedad A) recorrerá a lo largo de la horizontal esta misma distancia l y, simultáneamente, se desplazará a esta misma distancia a lo largo de los rodillos: $AB = BC = l$ (fig. 349). (Esto se hace evidente si analizamos el movimiento de los rodillos en el sistema de las coordenadas que se mueve junto con los rodillos). Como resultado, el centro de gravedad de la tabla se moverá a lo largo de la recta AC inclinada bajo un ángulo $\alpha/2$ con relación a la horizontal, pues, el triángulo ABC es isósceles. El movimiento será uniformemente acelerado. La tabla adquirirá la energía cinética debido a la pérdida de

energía potencial: $mv^2/2 = mgl \operatorname{sen} \alpha$ ó $v^2 = 2gl \operatorname{sen} \alpha$. Por otro lado, en el movimiento uniformemente acelerado tenemos: $v^2 = 2aS$, donde $S = AC = 2l \cos (\alpha/2)$. Por lo tanto resulta que la aceleración es $a = v^2/2S = g \operatorname{sen} (\alpha/2)$.

185. Calculemos la diferencia de las energías potenciales para dos posiciones de la cadena: toda la cadena está sobre la tabla y una parte de ella, cuya longitud es x, está colgada. Esta diferencia es igual a la fuerza de gravedad $(M/2l)\, xg$ de la parte colgada multiplicada por $x/2$, puesto que la cadena es homogénea y el centro de gravedad del extremo colgado se encuentra a una distancia $x/2$ del borde de la tabla. Basándose en el principio de conservación de la energía, podemos escribir que $Mv^2/2 = (Mg/4l)\, x^2$ ó $v = \sqrt{gx^2/2l}$. La aceleración en este mismo momento de tiempo podemos determinar, valiéndose de la segunda ley de Newton: $Ma = (M/2l)\, gx$. Por consiguiente $a = gx/2l$. Para calcular la reacción del borde de la tabla, encontramos primeramente la tensión de la cadena en el punto de contacto con la tabla. La tensión es igual al producto de la masa de la parte de la cadena que se encuentra sobre la tabla por la aceleración de la cadena: $Mxg\,(2l - x)/4l^2$. Analicemos ahora un segmento muy pequeño de la cadena que toca el borde de la tabla. Sobre este pequeño segmento actúan

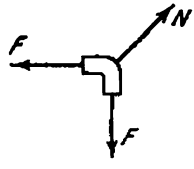


Fig. 350

tres fuerzas (fig. 350). Ellas provocan la variación de la cantidad de movimiento de la corriente tanto en la horizontal, como en la vertical:

$$(N \cos \alpha - F)\, \Delta t = -Mv^2\, \Delta t/2l,$$

$$(F - N \operatorname{sen} \alpha)\, \Delta t = Mv^2\, \Delta t/2l.$$

Por consiguiente, el ángulo de inclinación de la fuerza N con la horizontal es $\alpha = 45°$ y $N = Mgx\,(l - x)\sqrt{2}/l^3$.

186. Designemos por v la velocidad del carrito. La componente horizontal de la velocidad del péndulo respecto al carrito es $u \cos \beta$ (fig. 351) y respecto a los rieles es $v + u \cos \beta$. Sobre el sistema no actúan fuerzas externas en dirección horizontal. Por eso, basándose en el principio de conservación de la cantidad de movimiento, tenemos:

$$m\,(v + u \cos \beta) + Mv = 0, \qquad (1)$$

ya que inicialmente el sistema estaba en reposo. La componente vertical de la velocidad del péndulo respecto al carrito y a los rieles es igual a u sen β. Utilizando el teorema de Pitágoras, el cuadrado de la velocidad del péndulo con relación a los

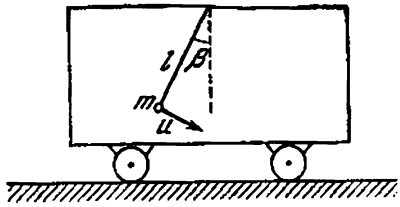


Fig. 351

rieles es igual a $(v + u \cos \beta)^2 + u^2 \operatorname{sen}^2 \beta$. Basándose en el principio de conservación de la energía, obtenemos la segunda ecuación que relaciona las velocidades v y u:

$$\frac{m}{2}\left[(u \cos \beta + v)^2 + u^2 \operatorname{sen}^2 \beta\right] + \frac{M}{2} v^2 = mgl (\cos \beta - \cos \alpha). \quad (2)$$

De las ecuaciones (1) y (2) podemos hallar que

$$v^2 = \frac{2m^2 gl}{(M+m)} \frac{(\cos \beta - \cos \alpha) \cos^2 \beta}{(M + m \operatorname{sen}^2 \beta)}.$$

En un caso particular para $\beta = 0$ (considerando $m/M \ll 1$), obtenemos:

$$v^2 = 2 \frac{m^2}{M^2} gl (1 - \cos \alpha),$$

ó

$$v = 2 \frac{m}{M} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \sqrt{gl}.$$

187. Designemos por v la velocidad de la cuña y por u_x y u_y, las componentes horizontal y vertical de la velocidad u de la viga con relación al sistema de referencia inmóvil (fig. 352). Utilizando los principios de conservación de la cantidad de movimiento y de la energía podemos escribir:

$$-Mv + mu_x = 0,$$

$$\frac{Mv^2}{2} + \frac{m}{2}(u_x^2 + u_y^2) = mgh.$$

Subrayamos que el ángulo α con el plano horizontal no forma la velocidad absoluta de la viga u (por velocidad absoluta,

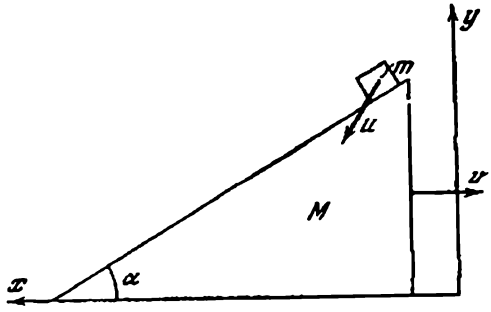


Fig. 352

en esto caso, entendemos la velocidad respecto al plano horizontal inmóvil), pero sí la velocidad relativa u_{rel}, o sea, la velocidad de la viga respecto a la cuña en movimiento.

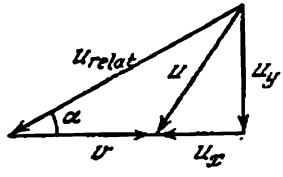


Fig. 353

Del triángulo de las velocidades (fig. 353) deducimos que $u_y/(v + u_x) = \operatorname{tg} \alpha$. Resolviendo las ecuaciones dadas con relación a v, obtenemos que

$$v = \sqrt{\frac{2mgh}{M + m\left[\left(\frac{M}{m}\right)^2 + \left(\frac{M}{m} + 1\right)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha\right]}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2gh}{\frac{M}{m} + \left(\frac{M}{m}\right)^2 + \left(\frac{M}{m} + 1\right)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}}.$$

La velocidad absoluta de la viga en este mismo momento de tiempo es igual a:

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{2gh} \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \frac{M}{m} + \frac{m}{M}\left(1 + \frac{M}{m}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}}.$$

En el caso cuando la masa de la cuña es mucho mayor que la masa de la viga, u tiende, como era de esperar, al valor $\sqrt{2gh}$.

188. La velocidad de la barra respecto a la cuña en movimiento forma un ángulo α con la horizontal. Si sumamos esta velocidad relativa y la velocidad de la cuña, obtendremos como resultado

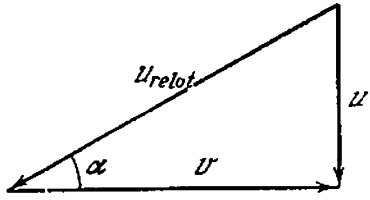


Fig. 354

la velocidad absoluta de la barra u (fig. 354). Es evidente que la relación de las velocidades es $u/v = \operatorname{tg}\alpha$. Del principio de conservación de la energía deducimos: $\frac{Mv^2}{2} + \frac{mu^2}{2} = mgh$. Excluyendo de estas dos ecuaciones u, obtenemos una expresión para v, o sea, $v = \sqrt{2mgh/(M + m\operatorname{tg}^2\alpha)}$. Entonces, para esta velocidad relativa de la barra, podemos escribir:

$$u_{\text{rel}} = \frac{1}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{2mgh}{M + m\operatorname{tg}^2\alpha}}.$$

La velocidad de la barra será

$$u = \operatorname{tg}\alpha\sqrt{\frac{2mgh}{m + M\operatorname{tg}^2\alpha}} = \sqrt{2\frac{mg\operatorname{tg}^2\alpha}{m + M\operatorname{tg}^2\alpha}h}.$$

De la última expresión se ve que la velocidad de la barra cambia de acuerdo con el trayecto h recorrido según la ley de movimiento uniformemente acelerado: $u = \sqrt{2ah}$. Por consiguiente la aceleración de la barra es $a = \frac{mg\operatorname{tg}^2\alpha}{m + M\operatorname{tg}^2\alpha}$.

§ 8. DINAMICA DEL MOVIMIENTO CURVILINEO

189. Valiéndose de la segunda ley de Newton, podemos escribir

$$\frac{(M + m)u^2}{L} = T - (M + m)g, \text{ donde } u = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\sqrt{Lg}$$

(véase el problema 159), de donde $T = (M + m)g\left(\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} + 1\right)$.

190. $T_1 = 10\ m\omega^2 l$; $T_2 = 9\ m\omega^2 l$; $T_3 = 7\ m\omega^2 l$; $T_4 = 4\ m\omega^4 l$.

191. Las distancias desde el centro de gravedad hasta los pesos con masas m_1 y m_2 son iguales, respectivamente a:

$$x = \frac{m_2}{m_1 + m_2} l, \qquad y = \frac{m_1}{m_1 + m_2} l.$$

Designemos por u la velocidad del centro de gravedad, por ω la velocidad angular de rotación. Entonces resulta que $u + \omega x = v_1$ y $u - \omega y = v_2$, de donde

$$\omega = \frac{v_1 - v_2}{l}, \qquad u = \frac{m_1 v_2 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

192. La velocidad de rotación disminuirá. La plataforma transmite al proyectil una cantidad de movimiento adicional por la tangente a la trayectoria del extremo del ánima del cañón. Según la tercera ley de Newton, el proyectil expulsado del ánima ejercerá presión sobre la parte interna del ánima dirigida en sentido contrario a la rotación.

193. En el momento cuando el cuerpo toca el plano horizontal, las componentes horizontal y vertical de la velocidad del cuerpo tendrán valores iguales a $v_{vert} = \sqrt{2gH}$ sen α y $v_{hor} = \sqrt{2gH}$ cos α. En el caso de un choque absolutamente elás-

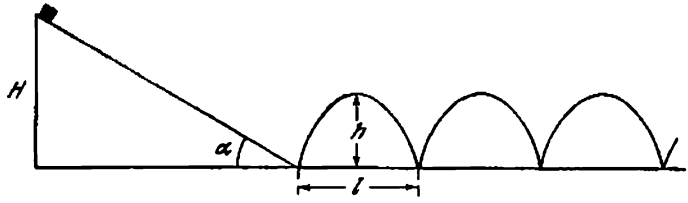


Fig. 355

tico la componente vertical cambiará el signo y la componente horizontal permanecerá la misma. La trayectoria del cuerpo tendrá la forma de partes de parábolas (fig. 355), siendo $h = H$ sen^2 α y $l = 2H$ sen 2α. Si el choque es absolutamente inelástico, la componente vertical de la velocidad se hará nula y el cuerpo se moverá uniformemente por el plano horizontal con velocidad $v = \sqrt{2gH}$ cos α.

194. Por parte de la tierra sobre la motocicleta actúan dos fuerzas (fig. 356): N que es la reacción del apoyo y f que es la fuerza de rozamiento. La suma de estas fuerzas T está dirigida a lo largo de la motocicleta. (En caso contrario respecto al centro de gravedad O actuaría el momento de fuerzas que derrumbaría la motocicleta). Sobre el centro de gravedad del cuerpo actúa de este modo la fuerza resultante $\mathbf{F} = \mathbf{T} + \mathbf{P}$, donde $\mathbf{P}$ es la

fuerza de gravedad. Como $F = T \cos \alpha = f$, entonces la aceleración centrípeta se transmite a la motocicleta solamente por la fuerza de rozamiento f. De acuerdo con la segunda ley de Newton tenemos: $f = mv^2/R$, siendo $f \leqslant kmg$. Como se ve en la fig. 356, $mg = f \operatorname{tg} \alpha$. El valor mínimo de R, obtenido

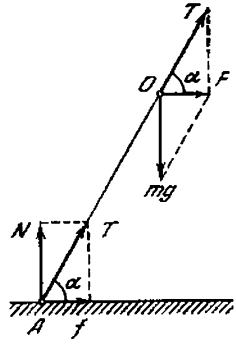


Fig. 356

del sistema de ecuaciones dado, es $R_{\text{mín}} = v^2/kg = 147$ m, siendo, en este caso, $\operatorname{tg} \alpha = Rg/v^2 \approx 3{,}33$ y, por lo tanto, $\alpha \approx 73°20'$.

195. Analicemos una posición intermedia de la barra, cuando ella se inclina con relación a la vertical bajo un ángulo α. Según el principio de conservación de la energía, tenemos $MgR = MgR \cos \alpha + M\omega^2R^2/2$, donde R es la distancia desde el extremo de la barra hasta el centro de gravedad de la esfera. Recibimos, de este modo, que la velocidad angular ω se expresa en la siguiente forma:

$$\omega = 2 \operatorname{sen} (\alpha/2) \sqrt{g/R}.$$

Para el ángulo dado α ella será tanto menor, cuanto mayor es R. Por consiguiente, la barra caerá más rápido, si está colocada en el extremo B.

196. De acuerdo con la segunda ley de Newton: $m\omega^2R = mg \cos \alpha - N$, donde N es la fuerza con que la barra deformada actúa sobre la esfera. En el momento cuando cesa la presión de la barra sobre el suelo, su deformación desaparece y $N = 0$. Como fue demostrado en el problema 195, $\omega = 2 \sqrt{g/R} \operatorname{sen} (\alpha/2)$. Colocando este valor de ω en la ecuación de movimiento, encontramos el valor de $\cos \alpha = 2/3$, de donde $\alpha = 48°10'$.

A fin de que la barra no deslice, es necesario que sea satisfecha la siguiente condición: $N \operatorname{sen} \alpha \leqslant kN \cos \alpha$ (fig. 357). Por consiguiente, $k \geqslant \operatorname{tg} \alpha$, de donde $k \geqslant \sqrt{5}/2$.

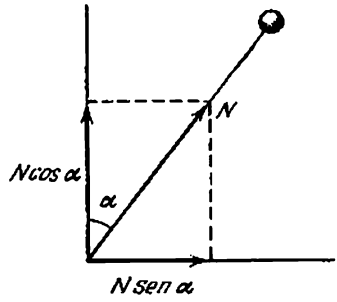


Fig. 357

197. Si $k > \sqrt{5}/2$, la barra no deslizará hasta el momento cuando N no se haga igual a cero, es decir, cuando $\alpha \leqslant \arccos (2/3)$. Para $\alpha > \arccos (2/3)$, de la ecuación $m\omega^2 R = mg \cos \alpha - N$ obtenemos $N < 0$. Esto significa que si uno de los extremos estaba fijado en el suelo, la barra fue extendida. Si la barra no está fijada, la esfera comenzará a caer libremente desde el momento cuando el ángulo alcanza el valor igual a $\alpha_0 = \arccos (2/3)$. En este momento la velocidad $v = \omega R = \sqrt{\frac{2}{3} gR}$ forma un ángulo α_0 con la horizontal y la altura

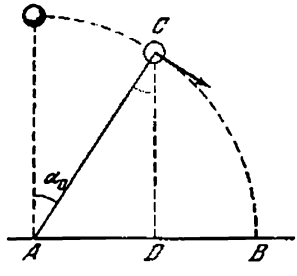


Fig. 358

de la esfera sobre el suelo es $CD = \frac{2}{3} R$ (fig. 358). Aprovechando las leyes de la caída libre, encontraremos la distancia que buscamos:

$$AB = AD + DB = R (5\sqrt{5} + 4\sqrt{23})/27 \approx 1{,}12R.$$

198. En el segmento ADB (fig. 359) la cuenta se moverá bajo la acción de fuerza de gravedad. A fin de que ella abandone el alambre en el punto A y caiga en el punto B, es necesario que el trayecto recorrido horizontalmente por ella sea igual a

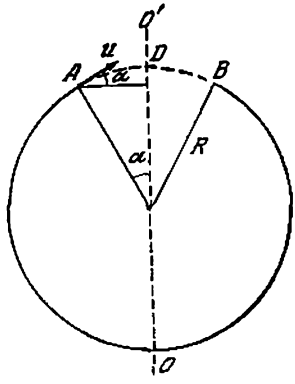


Fig. 359

$2R$ sen α. Para esto la velocidad de la cuenta en el punto A deberá satisfacer la condición:

$$(2u^2 \text{ sen } \alpha \cos \alpha)/g = 2R \text{ sen } \alpha$$

(véase el problema 40). De esta condición obtenemos que $u^2 = gR/\cos \alpha$.
La cuenta tendrá en el punto A una velocidad u si en el punto O se le transmite una velocidad v igual a:

$$v = \sqrt{u^2 + 2gR(1 + \cos \alpha)} = \sqrt{gR\left(2 + 2\cos\alpha + \frac{1}{\cos\alpha}\right)},$$

de acuerdo con el principio de conservación de la energía.

199. Supongamos que el trayecto no tenga corte. Entonces en el punto C (fig. 360) tenemos

$$mg = mv^2/R. \qquad (1)$$

Según el principio de conservación de la energía obtenemos:

$$mgh = mg2R + mv^2/2 \qquad (2)$$

De (1) y (2) recibimos que $h = 5/2R$. La velocidad en el punto A se determina por el principio de conservación de la energía:

$$mg^5/_2R - mv_A^2/2 + mgR(1 + \cos \alpha). \qquad (3)$$

El cuerpo, cuya dirección de lanzamiento forma un ángulo α con la horizontal, volará por la horizontal una distancia igual a:

$$AB = (v_A^2 \text{ sen } 2\alpha)/g. \qquad (4)$$

Por otra parte, tenemos

$$AB = 2R \operatorname{sen} \alpha. \qquad (5)$$

De (4) y (5) obtenemos: $v_A^2 = Rg/\cos\alpha$. Sustituyendo este valor en la ecuación (3), recibimos

$$mg\frac{5}{2}R = \frac{mgR}{2\cos\alpha} + mgR + mgR\cos\alpha,$$

de donde determinamos $\cos\alpha = (3 \pm 1)/4$ y, respectivamente, $\alpha_1 = 0°$, $\alpha_2 = 60°$. No es difícil verificar que, si $\alpha > 60°$,

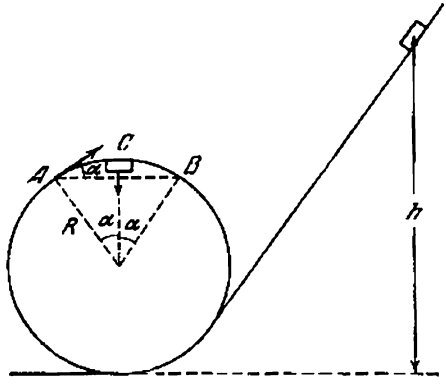


Fig. 360

el cuerpo caerá dentro del rizo; si $\alpha < 60°$, el cuerpo volará fuera.

200. Analicemos las fuerzas que actúan sobre el hilo que se apoya sobre el clavo izquierdo (fig. 361). Las componentes verticales

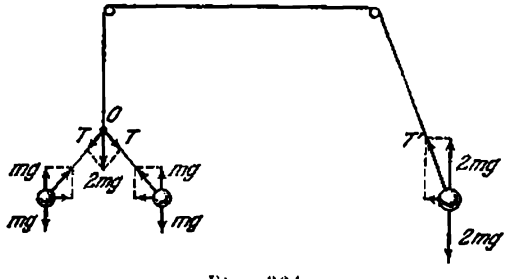


Fig. 361

de las fuerzas de tensión T que actúan sobre los cuerpos, son iguales a mg si el hilo está sujeto al clavo. Sobre el nudo (punto O), según la tercera ley de Newton, actúan las mismas fuerzas T.

La suma de estas fuerzas está dirigida verticalmente hacia abajo y es igual a $2mg$. En el caso de un cuerpo que gira, la componente vertical de la tensión del hilo T' es $2mg$ (si el cuerpo no desciende). Pero la propia tensión del hilo es $T' > 2mg$. Por consiguiente este sistema no está en equilibrio. El peso derecho atraerá el hilo a su lado.

201. La dirección de la aceleración coincide con la dirección de la fuerza resultante. La aceleración está dirigida verticalmente hacia abajo en las posiciones extremas superiores B y C de la bola (fig. 362); verticalmente hacia arriba, en la posición

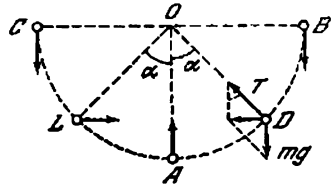


Fig. 362

extrema inferior A y horizontalmente en las posiciones D y L, determinadas por el ángulo α. Encontremos α. De acuerdo con la segunda ley de Newton, el producto de la masa por la aceleración centrípeta es igual a la suma de las proyecciones de las fuerzas en dirección del radio de rotación:

$$mv^2/l = T - mg \cos \alpha.$$

Por otro lado, como se ve en la fig. 362, $T = mg/\cos \alpha$. Basándose en el principio de conservación de la energía podemos escribir:

$$mv^2/2 = mgl \cos \alpha.$$

De estas ecuaciones hallamos que $\cos \alpha = 1/\sqrt{3}$ y por lo tanto $\alpha \approx 54°45'$.

202. Designemos por ω la velocidad angular de la barra en el momento cuando ella pasa por la vertical. Basándose en el principio de conservación de la energía, podemos escribir:

$$\frac{\omega^2}{2}(m_1r_1^2 + m_2r_2^2) = g(1 - \cos \alpha)(m_1r_1 + m_2r_2),$$

ó

$$\omega = 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \sqrt{g \frac{m_1r_1 + m_2r_2}{m_1r_1^2 + m_2r_2^2}},$$

de donde recibimos que

$$v_1 = \omega r_1 = 2r_1 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \sqrt{g \frac{m_1r_1 + m_2r_2}{m_1r_1^2 + m_2r_2^2}},$$

$$v_2 = \omega r_2 = 2r_2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \sqrt{g \frac{m_1r_1 + m_2r_2}{m_1r_1^2 + m_2r_2^2}}.$$

203. La resultante de las fuerzas aplicadas a la bola, $F = mg \operatorname{tg} \alpha$, deberá crear una aceleración centrípeta $a = \omega^2 r$, donde $r = l \operatorname{sen} \alpha$ (fig. 363). De ahí resulta que:

$$mg \operatorname{tg} \alpha = m\omega^2 l \operatorname{sen} \alpha.$$

Esta ecuación tiene dos soluciones:

$$\alpha_1 = 0, \qquad \alpha_2 = \arccos (g/\omega^2 l).$$

En segundo caso son válidas ambas soluciones: $\alpha_1 = 0$ (en esta condición la bola se encuentra en equilibrio inestable) y

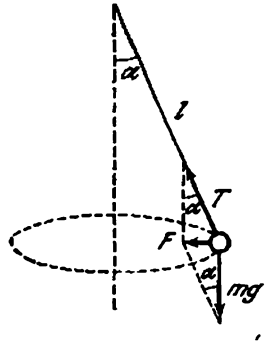


Fig. 363

$\alpha_2 = 60°$. En primer caso es válida solamente la solución $\alpha_1 = 0$.

204. Descomponemos la fuerza F con que la barra actúa sobre el peso m, en las componenetes perpendiculares entre sí T y N (fig. 364). Proyectemos las fuerzas en la vertical y en la horizontal y escribamos las ecuaciones de Newton para estas direcciones:

$$m\omega^2 l \operatorname{sen} \varphi = T \operatorname{sen} \varphi - N \cos \varphi,$$
$$mg = T \cos \varphi + N \operatorname{sen} \varphi.$$

De estas ecuaciones determinaremos T y N:

$$T = m (\omega^2 l \operatorname{sen}^2 \omega + g \cos \varphi),$$
$$N = m (g - \omega^2 l \cos \varphi) \operatorname{sen} \varphi.$$

Por consiguiente resulta que

$$F = \sqrt{T^2 + N^2} = m \sqrt{g^2 + \omega^4 l^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}.$$

205. Las fuerzas que actúan sobre la cuenta se ven en la fig. 365: f es la fuerza de rozamiento; mg, la fuerza de gravedad; N, la fuerza normal de la reacción. Las ecuaciones de Newton para

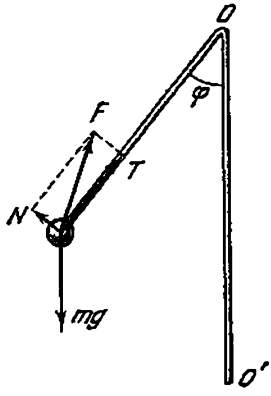


Fig. 364

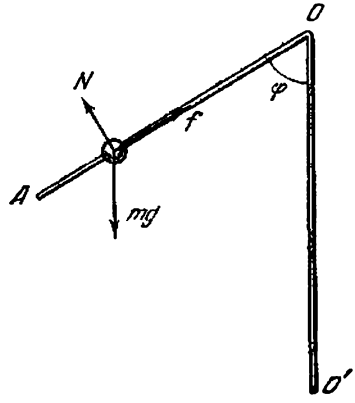


Fig. 365

las proyecciones de las fuerzas en direcciones horizontal y vertical, tienen la forma

$$m\omega^2 l \operatorname{sen} \varphi = f \operatorname{sen} \varphi - N \cos \varphi,$$
$$f \cos \varphi + N \operatorname{sen} \varphi = mg.$$

De estas ecuaciones hallamos que

$$f = m\omega^2 l \operatorname{sen}^2 \varphi + mg \cos \varphi,$$
$$N = mg \operatorname{sen} \varphi - m\omega^2 l \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi.$$

En caso de equilibrio tenemos $f \leqslant kN$ ó

$$m\omega^2 l \operatorname{sen}^2 \varphi + mg \cos \varphi \leqslant k\,(mg \operatorname{sen} \varphi - m\omega^2 l \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi),$$

de donde tenemos que

$$l \leqslant \frac{k \operatorname{sen} \varphi - \cos \varphi}{\operatorname{sen} \varphi\,(\operatorname{sen} \varphi + k \cos \varphi)} \frac{g}{\omega^2}.$$

En un caso particular $\varphi = \pi/2$, $l \leqslant kg/\omega^2$.

206. En la fig. 366 se dan las fuerzas que actúan sobre los pesos. T_1 y T_2 son las tensiones de los hilos. Escribamos las ecuaciones de Newton para las proyecciones en direcciones horizontal y vertical:

para el primer peso

$$T_1 \operatorname{sen} \varphi - T_2 \operatorname{sen} \psi = m\omega^2 l \operatorname{sen} \varphi,$$
$$T_1 \cos \varphi - T_2 \cos \psi - mg = 0; \qquad (1)$$

para el segundo peso

$$m\omega^2 l\,(\text{sen}\,\varphi + \text{sen}\,\psi) = T_2\,\text{sen}\,\psi,$$
$$T_2 \cos\psi = mg. \qquad (2)$$

Excluyendo T_1 y T_2 del sistema de ecuaciones (1) y (2), hallamos las siguientes ecuaciones:

$$a\,\text{sen}\,\varphi = 2\,\text{tg}\,\varphi - \text{tg}\,\psi,$$

$$a\,(\text{sen}\,\varphi + \text{sen}\,\psi) = \text{tg}\,\psi,$$

donde $a = \omega^2 l/g$. De estas ecuaciones deducimos que $2\,\text{tg}\,\varphi - \text{tg}\,\psi < \text{tg}\,\psi$ y por consiguiente $\varphi < \psi$.

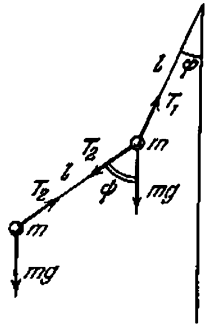


Fig. 366

207. Las fuerzas que actúan sobre los pesos se muestran en la fig. 367. T_1, N_1 y T_2, N_2, son las componentes de las fuerzas, con que la barra actúa sobre los pesos m y M. N_1 y N_2 están dirigidas en sentidos opuestos, porque la suma de los momentos de las fuerzas que actúan sobre la barra respecto al punto O es nula debido a la imponderabilidad de la barra: $N_1 b - N_2 (b + a) = 0$. Las ecuaciones de movimiento de los pesos para las proyecciones en direcciones horizontal y vertical tienen la siguiente forma:

$$m\omega^2 b\,\text{sen}\,\varphi = T_1\,\text{sen}\,\varphi - N_1 \cos\varphi,$$

$$T_1 \cos\varphi + N_1\,\text{sen}\,\varphi = mg,$$

$$M\omega^2 (b + a)\,\text{sen}\,\varphi = T_2\,\text{sen}\,\varphi + N_2 \cos\varphi,$$

$$T_2 \cos\varphi - N_2\,\text{sen}\,\varphi = Mg.$$

Excluyendo del sistema las incógnitas T_1, T_2, N_1 y N_2, encontramos que:

1) $\varphi = 0$;

2) $\cos\varphi = \frac{g}{\omega^2}\,\frac{mb + M(a+b)}{mb^2 + M(a+b)^2}$.

La primera solución es válida para cualquier velocidad angular de rotación y la segunda para $\omega \geqslant \sqrt{g\,\frac{mb + M(a+b)}{mb^2 + M(a+b)^2}}$ (véase la resolución del problema 203).

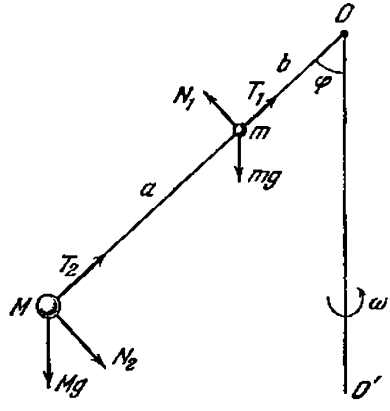


Fig. 367

208. En equilibrio tenemos $m\omega^2 x = kx$, donde x es la distancia del cuerpo hasta el eje. De ahí se ve claramente que para cualquier x el muelle transmite al cuerpo la aceleración centrípeta necesaria para la rotación. Por eso después de que el cuerpo ha sido empujado, éste puede moverse con velocidad constante hasta el apoyo A, o hasta el momento cuando se verifique para el muelle la ley de la proporcionalidad directa entre la fuerza y la deformación.

209. Escribamos la segunda ley de Newton para un pequeño segmento de la cadena de masa $(m/l)\,R\,\Delta\alpha$, mostrado en la fig. 368:

$$(m/l)\,R\,\Delta\alpha\,(2\pi n)^2 R = 2T \operatorname{sen}(\Delta\alpha/2).$$

Como el ángulo $\Delta\alpha$ es pequeño, entonces $\operatorname{sen}(\Delta\alpha/2) \approx \Delta\alpha/2$; de donde $T = mln^2 \approx 90$ N.

210. Destaquemos un pequeño segmento del tubo de longitud $R\,\Delta\alpha$ (fig. 369). Las paredes extendidas del tubo transmiten al líquido

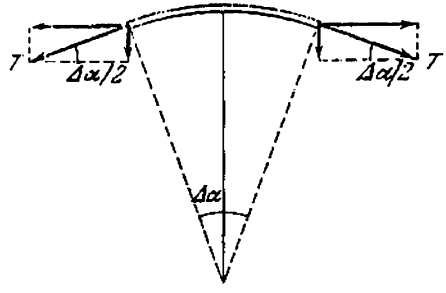


Fig. 368

que pasa por este segmento una aceleración $a = v^2/R$. Por la tercera ley de Newton el líquido actúa sobre este segmento con una fuerza

$$\Delta F = \rho\,\frac{\pi d^2}{4}\,R\Delta\alpha\,\frac{v^2}{R}$$

donde ρ es la densidad del líquido. Las fuerzas de tensión T del anillo compensan la fuerza ΔF. De la condición de equilibrio

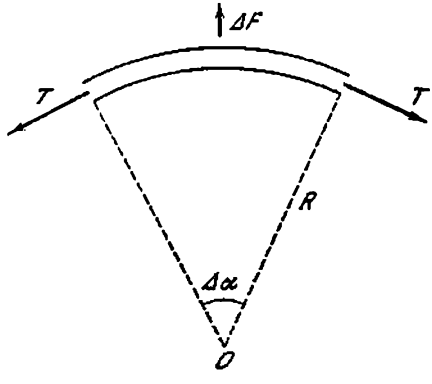


Fig. 369

y considerando que $\Delta\alpha$ es pequeño, tenemos:

$$\Delta F = 2T \operatorname{sen}(\Delta\alpha/2) \approx T\,\Delta\alpha.$$

Por consiguiente la fuerza que hallamos es $T = (\rho\pi d^2/4)\,v^2$.

211. Dividamos la barra en n secciones de igual longitud y analicemos una sección cualquiera con índice i (fig. 370). Las aceleraciones de los diferentes puntos de esta sección serán diferentes, ya que las distancias desde los puntos hasta el eje de rotación

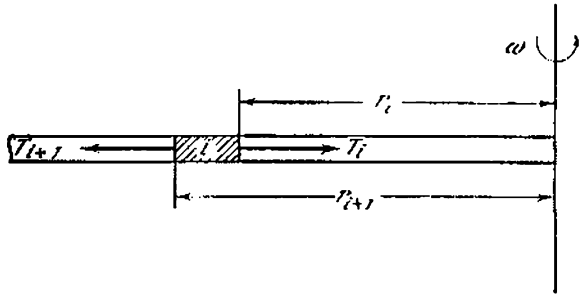


Fig. 370

son diferentes. No obstante si la diferencia $(r_{i+1} - r_i)$ es pequeña, podemos considerar que la aceleración de la sección i es igual a $\omega^2 (r_{i+1} + r_i)/2$ que será tanto más exacta, cuanto menor es la longitud de la sección i.

Sobre la sección i actúa la fuerza elástica T_{i+1} por parte de la sección deformada $(i + 1)$ y la fuerza T_i por parte de la sección $(i - 1)$. Como la masa de la sección i es igual a $(m/l) \times (r_{i+1} - r_i)$, entonces, basándose en la segunda ley de Newton, podemos escribir:

$$T_i - T_{i+1} = \frac{m}{l} (r_{i+1} - r_i)\, \omega^2 \frac{r_{i+1} + r_i}{2},$$

o

$$T_{i+1} - T_i = -\frac{m\omega^2}{2l} (r_{i+1}^2 - r_i^2).$$

Escribimos las ecuaciones de movimiento para las secciones desde n hasta k, considerando que $r_{n+1} = l$ y $r_k = x$:

$$-T_n = -\frac{m\omega^2}{2l} (l^2 - r_n^2),$$

$$T_n - T_{n-1} = -\frac{m\omega^2}{2l} (r_n^2 - r_{n-1}^2),$$

. . . . . .

$$T_{k+2} - T_{k+1} = -\frac{m\omega^2}{2l} (r_{k+2}^2 - r_{k+1}^2),$$

$$T_{k+1} - T_x = -\frac{m\omega^2}{2l} (r_{k+1}^2 - x^2).$$

En la primera ecuación de este sistema consideramos que la fuerza elástica no actúa sobre el extremo de la barra, o sea, $T_{n+1} = 0$. Sumando las ecuaciones del sistema obtenemos que la tensión que buscamos es $T_x = \frac{m\omega^2}{2}(l^2 - x^2)$. Cuanto más cerca están las secciones de la barra del eje de rotación, tanto mayor será el grado de tensión de estas secciones de la barra.

212. En un sistema de referencia inmóvil con relación al eje, la fuerza de tensión de la barra no realiza trabajo, ya que ésta todo el tiempo está dirigida perpendicularmente a la velocidad de la bola. En un sistema en movimiento esta fuerza realiza un trabajo diferente de cero y debido a este trabajo cambia la energía cinética de la bola.

213. Un sector del aro AB de masa m posee en la posición más alta una energía $mg\,2R + m\,(2v)^2/2$. Las energías cinética y potencial del sector AB comienzan a disminuir durante el movimiento. La pérdida de la energía tiene lugar como consecuencia del trabajo de las fuerzas de deformación elástica del aro, cuya resultante es la fuerza centrípeta siempre dirigida hacia el centro. La velocidad del sector AB forma un ángulo obtuso α con la fuerza F (fig. 371). Por eso el trabajo de la fuerza $A_1 = F\,\Delta S \cos\alpha$ es negativo y, por consiguiente, se disminuye la energía del sector de masa m. Como el sector AB pasa por la posición extrema inferior, el trabajo de la fuerza F, como es fácil ver, se hace positivo y la energía del sector AB comienza a aumentar.

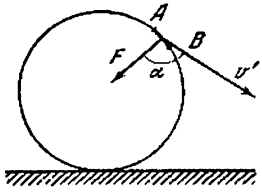


Fig. 371

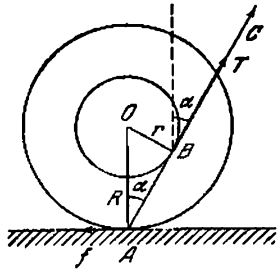


Fig. 372

214. Tracemos del punto A que es «el eje instantáneo de rotación» (véase el problema 57), una tangente a la circunferencia interna de la bobina (fig. 372). Si la dirección del hilo coincide con la dirección de la tangente AC, el momento de las fuerzas que hacen la bobina con relación al eje instantáneo, será nulo. Por eso la bobina que está en reposo no girará alrededor del eje instantáneo y, por consiguiente, no rodará. El valor del ángulo α, para que tiene lugar el cambio de la dirección del movimiento de la bobina se determina del triángulo AOB: $\operatorname{sen}\alpha = r/R$. Si la inclinación del hilo es mayor que α, la

bobina rodará hacia la derecha, si es menor, rodará hacia la izquierda con condición de que no haya deslizamiento. Si la tensión del hilo T satisface la condición $Tr \leqslant fR$, donde f es la fuerza de rozamiento, entonces la bobina permanece inmóvil. En caso contrario para el valor de sen $\alpha = r/R$ ella comienza a girar en su lugar alrededor del punto O en sentido antihorario.

215. Dividamos todo el aro en secciones pequeños e iguales de masa Δm cada una. Analicemos dos secciones simétricas (con relación al centro). Todas las partículas del aro participan simultáneamente en dos movimientos: en el movimiento de avance con

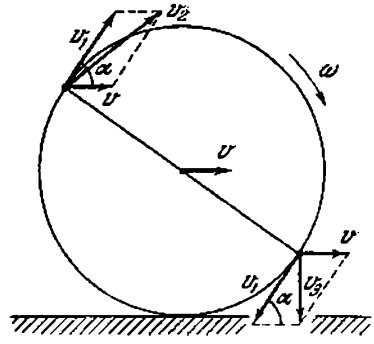


Fig. 373

velocidad v y en el movimiento de rotación con velocidad $v_1 = \omega R$. La velocidad resultante v_2 de la sección superior del aro se determina como la suma geométrica de las velocidades v y v_1 (fig. 373):

$$v_2^2 = v_1^2 + v^2 + 2vv_1 \cos \alpha.$$

Para la sección simétrica tenemos

$$v_3^2 = v^2 + v_1^2 - 2vv_1 \cos \alpha.$$

La energía cinética resultante de ambas secciones es

$$\Delta E = \Delta m v_2^2/2 + \Delta m v_3^2/2 = \Delta m v^2 + \Delta m \omega^2 R^2.$$

Como esta expresión es válida para cualquier una de las dos secciones, podemos escribir para todo el aro que

$$E = Mv^2/2 + MR^2\omega^2/2.$$

Si el aro rueda sin deslizamiento,
entonces $v = \omega R$ y por lo tanto $E = Mv^2$.

216. $E = \dfrac{2Pv^2}{g}(\pi r + l).$

217. El cilindro de material más denso evidentemente será el hueco. Para velocidades iguales del movimiento de avance, la energía cinética del movimiento de rotación será mayor en el cilindro hueco, porque las partículas de su masa se encuentran más alejadas del centro y, por lo tanto, tienen mayores velocidades. Debido a ello, en el proceso de rodadura sin deslizar de un plano inclinado el cilindro hueco adquiere una velocidad menor que el cilindro sólido. Las energías cinéticas totales de ambos cilindros al final del trayecto serán iguales, lo que es posible sólo para diferentes velocidades, porque para velocidades iguales las energías del movimiento de avance serán iguales y la energía del movimiento de rotación del cilindro sólido será obligatoriamente menor que la del cilindro hueco.

218. En el movimiento de la bobina la fuerza de rozamiento no realiza trabajo, porque no existe deslizamiento del cable y de la bobina. Por lo tanto, la energía del sistema no cambia y es

$$\frac{P}{g} v^2 + PR = \frac{P - \rho x}{g} u^2 + (P - \rho x) R,$$

donde u es la velocidad que buscamos. De la ecuación obtenemos que $u = \sqrt{(Pv^2 + \rho R g x)/(P - \rho x)}$ que tiende al infinito cuando $P = \rho x$, porque no tenemos en consideración la masa de la bobina. La cantidad de movimiento se disminuye gracias a la acción de la fuerza de rozamiento dirigida en sentido opuesto al del movimiento.

219. Como la fuerza de rozamiento es constante, el movimiento será uniformemente retardado. La potencia desarrollada por la fuerza de rozamiento es igual a fv, donde $v = \omega r$ es la velocidad instantánea del punto de la polea, al cual fue aplicada la fuerza f. El trabajo en un tiempo t es igual a la potencia media multiplicada por el tiempo t:

$$A = f \frac{\omega_0 r + \omega r}{2} t.$$

El cambio de la energía cinética de la polea es igual a este trabajo:

$$\frac{mr^2}{2} (\omega_0^2 - \omega^2) = \frac{frt}{2} (\omega_0 + \omega).$$

De ahí $\omega = \omega_0 - ft/mr$.

220. Como la fuerza de rozamiento f es constante, la variación de la cantidad de movimiento del aro en un tiempo t será igual a $mv = ft$. En caso de rodadura sin deslizar, la velocidad del punto del aro, al cual fue aplicada la fuerza de rozamiento, es nula. Igualando el trabajo de las fuerzas de rozamiento a la diferencia de las energías cinéticas, obtenemos que

$$\frac{m\omega_0^2 r^2}{2} - mv^2 = f \frac{\omega_0 r + 0}{2} t$$

(véase el problema 215). Resolviendo la ecuación respecto a v hallamos que $v = \omega_0 r/2$.

221. Las ecuaciones que expresan la variación de la cantidad de movimiento y la variación de la energía cinética del aro, tienen la forma:

$$m(v_0 - v) = ft, \qquad \frac{mv_0^2}{2} - mv^2 = f\frac{v_0 + 0}{2}t,$$

donde $v = \omega r$ es la velocidad del centro del aro durante la rodadura sin deslizar. Resolviendo estas ecuaciones con relación a v, obtenemos que $v = v_0/2$. Por consiguiente, el valor que buscamos es $\omega = v_0/2r$.

222. Las ecuaciones que expresan la variación de la cantidad de movimiento y la variación de la energía cinética del aro, tienen la forma:

$$m(v_0 - v) = ft,$$

$$\frac{mv_0^2}{2} + \frac{m\omega_0^2 r^2}{2} - \frac{mv^2}{2} - \frac{m\omega^2 r^2}{2} = f\frac{(v_0 + \omega_0 r) + (v + \omega r)}{2}t,$$

donde v es la velocidad del centro del aro en cualquier momento de tiempo ulterior. Resolviendo el sistema de ecuaciones dado, hallamos que

$$v = v_0 - (f/m)t, \qquad \omega = \omega_0 - (f/mr)t.$$

Si $v_0 < \omega_0 r$, en el momento de tiempo $\tau = mv_0/f$ el aro para girando con velocidad angular $\omega = \omega_0 - v_0/r$. Luego el aro comienza a moverse en sentido contrario con deslizamiento. Al pasar un tiempo el deslizamiento cesa y el aro rodará sin deslizamiento hacia la izquierda con velocidad de traslación $v = (\omega_0 r - v_0)/2$ (véase el problema 221).
Si $v_0 > \omega_0 r$, entonces, transcurrido un tiempo $\tau = mr\omega_0/f$, el aro deja de girar, moviéndose hacia la derecha con velocidad de traslación $v = v_0 - r\omega_0$. Posteriormente, la rotación del aro se realizará en sentido contrario y, pasado un tiempo, el aro rodará sin deslizamiento hacia la derecha; la velocidad angular será $\omega = (v_0 - r\omega_0)/2r$. Subrayamos, como muestra la experiencia, que el aro frenará inclusive en la ausencia del deslizamiento. Nosotros no obtenemos tal resultado, porque no tenemos en consideración la fricción por rodadura.

223. Como los aros no deslizan, entonces v_0, que es la velocidad del centro de gravedad de los aros, y v que la velocidad del paso, se relacionan como $v_0 = v\dfrac{R}{R - r}$.
Supongamos que el peso descienda a una altura h. Considerando que en el momento inicial el sistema estaba en reposo y valiéndose del principio de conservación de la energía, podemos escribir que

$$mgh = mv^2/2 + Mv_0^2$$

(véase el problema 215).

De la última relación hallamos la velocidad del peso:

$$v=\sqrt{\frac{2mgh}{m+2M\left(\frac{R}{R-r}\right)^2}},$$

y determinamos la aceleración del peso que es igual a

$$a=\frac{mg}{m+2M\left(\frac{R}{R-r}\right)^2}.$$

El peso se mueve hacia abajo con aceleración a bajo la acción de dos fuerzas: la fuerza de gravedad mg y la de tensión del hilo T. La tensión del hilo que buscamos es:

$$T=mg(g-a)=\frac{2mMg\left(\frac{R}{R-r}\right)^2}{m+2M\left(\frac{R}{R-r}\right)^2}.$$

Como el centro de gravedad del aro se mueve con aceleración $a\frac{R}{R-r}$, bajo la acción de la fuerza T y de la fuerza de fricción F, entonces, basándose en la segunda ley de Newton, para la fuerza F obtenemos la igualdad

$$F=T-Ma\frac{R}{R-r},$$

o

$$F=\frac{Mmg\left(\frac{R}{R-r}\right)^2\left(2-\frac{R}{R-r}\right)}{m+2M\left(\frac{R}{R-r}\right)^2}=\frac{Mmg\left(1+\frac{r}{R}\right)}{m\left(1-\frac{r}{R}\right)^2 2+}.$$

El valor de la fuerza de fricción no puede superar el valor kMg. Como resultado de esto, el deslizamiento comenzará cuando

$$\frac{Mmg\left(\frac{R}{R-r}\right)^2\left(1+\frac{r}{R}\right)}{m+2M\left(\frac{R}{R-r}\right)^2}>kMg$$

o

$$k<\frac{1+\frac{r}{R}}{2\frac{M}{m}+\left(1-\frac{r}{R}\right)^2}.$$

224. El centro de gravedad de la bobina no se desplazará si la tensión del hilo satisface la igualdad $R = Mg$ sen α. Para determinar la tensión del hilo T, determinamos primeramente

la aceleración del peso de masa m. Supongamos que el peso descienda a una altura h. Como el centro de gravedad de la bobina, por la condición del problema, deberá mantenerse en reposo, entonces la variación de la energía potencial es igual a mgh. Si v es la velocidad del movimiento del peso de masa m, entonces la velocidad de los puntos de la bobina que se encuentran a una distancia R del eje de rotación es vR/r. Por consiguiente, la energía cinética del sistema es

$$E=\frac{mv^2}{2}+\frac{Mv^2}{2}\frac{R^2}{r^2}.$$

Del principio de conservación de la energía deducimos que

$$(m+MR^2/r^2)v^2/2=mgh \quad \text{ó} \quad v=\sqrt{\frac{2mgh}{m+MR^2/r^2}}.$$

De esta ecuación obtenemos que la aceleración del peso es $a=\frac{mg}{m+MR^2/r^2}$. Conociendo la aceleración del peso, encontramos la tensión del hilo

$$T=m(g-a)=mg\frac{MR^2/r^2}{MR^2/r^2+m}.$$

De este modo para sen α obtenemos la siguiente expresión:

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{M/m+r^2/R^2}.$$

El centro de gravedad de la bobina estará en reposo sólo cuando

$$M/m+r^2/R^2\geqslant 1.$$

225. Si la velocidad de la tabla es igual a v, la velocidad del centro de gravedad de cada rodillo es $v/2$ (véase el problema 57). La energía cinética del sistema (tabla y ambos rodillos) será igual a

$$\frac{Mv^2}{2}+\frac{2mv^2}{4}=\frac{M+m}{2}v^2.$$

Igualando la energía cinética al trabajo de la fuerza Q en el trayecto S, obtenemos que

$$\frac{M+m}{2}v^2=QS, \quad v=\sqrt{\frac{2QS}{M+m}}$$

(fig. 374). (Las fuerzas de fricción no realizan trabajo porque no existe deslizamiento).
De la expresión para la velocidad del movimiento de la tabla deducimos que su aceleración es $a = Q/(M + m)$. Para determinar la fuerza de fricción con que el rodillo actúa sobre la

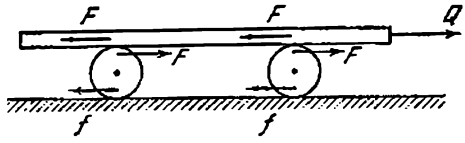


Fig. 374

tabla, escribimos la ecuación de movimiento de la tabla: $Ma = Q - 2F$. Sustituyendo el valor de la aceleración a en esta ecuación, obtenemos que $F = mQ/2\,(M + m)$.
Como la velocidad del centro de gravedad del rodillo es dos veces menor que la velocidad de la tabla, entonces la aceleración del centro de gravedad del rodillo será dos veces menor que la aceleración de la tabla. Debido a ello la ecuación de movimiento del centro de gravedad del rodillo tendrá la siguiente forma: $ma/2 = F - f$. De esta ecuación se deduce que $f = 0$.

226. Supongamos para mayor precisión que $m_1R > m_2r$. En este caso, el primer peso bajará y el segundo se elevará. Supongamos que el primer peso baje a una altura h. Entonces el segundo sube a hr/R. De este modo, la pérdida de la energía potencial será

$$m_1gh - m_2ghr/R = gh\,(m_1 - m_2r/R)$$

Si el valor absoluto de la velocidad del primer peso es v, entonces la velocidad del segundo será vr/R. Todos los puntos de la primera etapa de la polea tienen velocidades v y todos los puntos de la segunda etapa poseen una velocidad vr/R. La energía cinética del sistema será igual a

$$\frac{m_1 + M_1}{2}\,v^2 + \frac{m_2 + M_2}{2}\,\frac{r_2}{R^2}\,v^2.$$

Del principio de conservación de la energía deducimos que

$$\frac{m_1 + M_1}{2}\,v^2 + \frac{m_2 + M_2}{2}\,\frac{r_2}{R^2}\,v^2 = \left(m_1 - m_2\,\frac{r}{R}\right)gh,$$

o

$$v = \sqrt{\frac{2\,(m_1 - m_2r/R)\,gh}{(m_1 + M_1) + (M_2 + M_2)\,r^2/R^2}},$$

de donde hallamos la aceleración del primer peso

$$a_1 = \frac{m_1 - m_2r/R}{(m_1 + M_1) + (m_2 + M_2)\,r^2/R^2}\,g.$$

De la relación $a_1/a_2 = R/r$, donde a_2 es la aceleración del segundo peso, determinamos

$a_2 = \dfrac{(m_1 - m_2 r/R)\, gr/R}{(m_1 + M_1) + (m_2 + M_2)\, r^2/R^2}$. Las tensiones de los hilos T_1 y T_2, basándose en la segunda ley de Newton, son

$$T_1 = \frac{M_1 + m_2 \dfrac{r}{R} + \dfrac{r^2}{R^2}(m_2 + M_2)}{m_1 + M_1 + (m_2 + M_2)\dfrac{r^2}{R^2}}\, m_1 g,$$

$$T_2 = \frac{m_1 + M_1 + \dfrac{r}{R}\left(m_1 + M_2 \dfrac{r}{R}\right)}{m_1 + M_1 + (m_2 + M_2)\dfrac{r^2}{R^2}}\, m_2 g.$$

La fuerza F con que el sistema actúa sobre el eje de la polea, es

$$F = T_1 + T_2 + (M_1 + M_2)\, g.$$

227. Supongamos que el trayecto recorrido por el centro de gravedad del cilindro, en un tiempo t, sea S, y la velocidad del centro

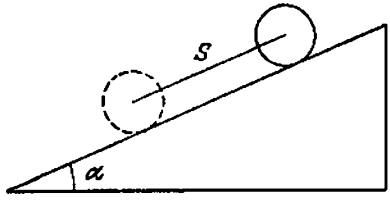


Fig. 375

de gravedad, en este momento de tiempo sea igual a v. (fig. 375). Basándose en el principio de conservación de la energía, podemos escribir que

$$Mv^2 = MgS \operatorname{sen} \alpha,$$

de donde la velocidad es $v = \sqrt{gS \operatorname{sen} \alpha}$ y por lo tanto, la aceleración es $a = g \operatorname{sen} \alpha/2$. La velocidad del centro de gravedad del cilindro y la velocidad angular de rotación del mismo serán, respectivamente, $v = (g \operatorname{sen} \alpha/2)\, t$ y $\omega = (g \operatorname{sen} \alpha/2R)\, t$.

§ 9. LEY DE GRAVITACION UNIVERSAL

228. Por la segunda ley de Newton tenemos que $m_i g = F$, donde m_i es la masa inercial, es decir, el valor que caracteriza la capacidad de los cuerpos de adquirir una u otra aceleración bajo la acción de una determinada fuerza. Por otro lado, según la ley de gravitación universal $F = \gamma m_g M_g/R^2$, donde el

coeficiente de proporcionalidad γ es, también, denominado de constante gravitacional, y m_g y M_g son las masas gravitacionales de interacción de los cuerpos. La masa gravitacional determina la fuerza de atracción gravitacional y, en este sentido, puede ser llamada de «carga gravitacional». De antemano no era evidente que $m_i = m_g$. Sin embargo sólo por la verificación de esta igualdad (es suficiente apenas la proporcionalidad), la aceleración de caída libre es única para todos los cuerpos, ya que, al sustituir las fuerzas de gravitación en la segunda ley de Newton, las masas m_i y m_g pueden reducirse $g = \gamma M/R^2$. Solamente la fuerza de gravitación transmite a todos los cuerpos la misma aceleración independientemente de sus masas.

229. La aceleración es $g = \gamma M/R^2$ (véase el problema 228). Tomando $g = 9{,}81$ m/s^2, encontramos que $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $m^3/kg \cdot s^2$.

230. Los cuerpos dentro de una nave cósmica no ejercerán presión sobre sus paredes si éstos tienen una aceleración igual a la aceleración de la nave cósmica. La misma aceleración en la región del espacio dada, puede transmitirse a todos los cuerpos independientemente de sus masas, sólo por la fuerza gravitacional. Por consiguiente es necesario que el motor de la nave esté desconectado y que no exista resistencia del medio exterior. La nave puede moverse en cualquier dirección respecto a la dirección de las fuerzas gravitacionales.

231. La fuerza de gravedad transmite la misma aceleración al péndulo y al cuadro. En el sistema no surge ninguna deformación durante la caída libre provocada por la gravitación. Por eso el péndulo se moverá respecto al cuadro como si no exista la gravitación (véase la resolución del problema 230). El cuadro girará con velocidad angular constante hasta que dure la caída del cuadro.

232. En la sección BCA (fig. 376) la fuerza de gravitación realiza un trabajo positivo (el ángulo θ_1 es agudo) y, por lo tanto,

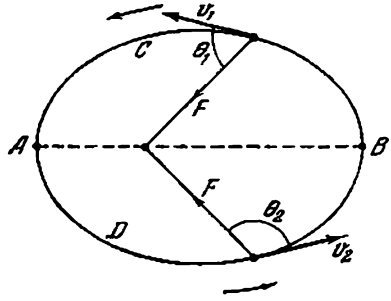


Fig. 376

la velocidad del planeta aumenta. En el punto A la velocidad alcanza su valor máximo. En la sección ADB la fuerza de

gravitación realiza un trabajo negativo (el ángulo θ_2 es obtuso), por consiguiente en el movimiento por esta sección la velocidad del planeta se disminuye, alcanzando su valor mínimo en el punto B.

233. A fin de que el satélite se mueva por una órbita cerrada (circunferencia de radio $R + h$) sobre él debe actuar una fuerza dirigida al centro. En el caso dado esta fuerza es la de atracción de la Tierra. Por la segunda ley de Newton tenemos que

$$mv^2/(R + h) = \gamma mM/(R + h)^2,$$

donde M es la masa de la Tierra; $R = 6370$ km, el radio del globo terráqueo; γ, la constante gravitacional. En la superficie de la Tierra, tenemos $\gamma mM/R^2 = mg$. Por lo tanto,

$$v = \sqrt{gR^2/(R + h)} \approx 7{,}5 \text{ km/s}.$$

234. Bajo la influencia de la resistencia atmosférica, el satélite, en el correr del tiempo, se aproxima paulatinamente a la Tierra. El radio de su órbita se disminuye. Como en las capas superiores la resistencia es pequeña, la disminución del radio durante una vuelta es insignificante. Considerando la órbita aproximadamente circular podemos escribir que

$$mv^2/R = \gamma mM/R^2,$$

donde R es el radio de la órbita. Recibimos que $v = \sqrt{\gamma M/R}$, es decir, la velocidad del satélite aumenta con la disminución de R. Este resultado puede explicarse de la siguiente manera.

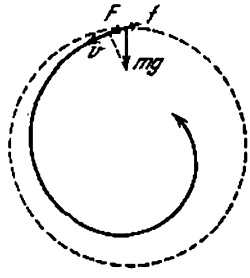


Fig. 377

Como consecuencia de la resistencia atmosférica el movimiento del satélite lanzado, por ejemplo, a una órbita circular (línea punteada en la fig. 377) se realizará en realidad según una cierta espiral (línea llena en la fig. 377). Gracias a esto, la proyección de la fuerza de gravitación F en la dirección de la velocidad del satélite v es diferente de cero. Precisamente el trabajo de la fuerza F (la fuerza F es mayor que la fuerza de resistencia de la atmósfera f) aumentará la velocidad.

Al moverse en la atmósfera, la energía mecánica total del satélite se disminuye, sin embargo la energía potencial al aproximarse a la Tierra, se disminuye más rápidamente que la energía

total. Por eso la energía cinética aumenta. Es conveniente subrayar que en las capas atmosféricas densas, debido a la fuerza de resistencia grande, no podemos ni aproximadamente considerar el movimiento del satélite como giratorio por una circunferencia y, por consiguiente, nuestra conclusión no es válida.

235. Si lanzamos el contenedor en sentido opuesto al movimiento del satélite A, entonces este último se moverá según una elipse *2*, situada dentro de la órbita del satélite (fig. 378). El período

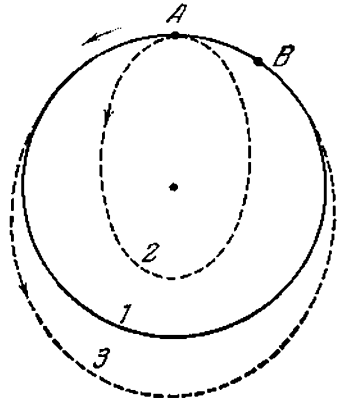


Fig. 378

de rotación del contenedor será mucho menor que el período de rotación del satélite B y como consecuencia de esto, ellos podrán encontrarse en el punto de contacto de las órbitas solamente después de que los satélites realicen el gran número de vueltas. El contenedor deberá ser lanzado en sentido del movimiento del satélite A. El comenzará el movimiento según la elipse *3*.

Es necesario escoger la velocidad u de modo que en una vuelta del contenedor el satélite B también realice una vuelta y recorra adicionalmente el trayecto AB. Esto es realmente posible, ya que el período de rotación por la elipse *3* es varias veces mayor que el período de rotación por la órbita circular *1*. El contenedor se encontrará con el satélite en el punto de contacto de las órbitas *3* y *1*.

236. Considerando la órbita de la Tierra aproximadamente circular, para la fuerza de gravitación podemos escribir la expresión: $F = m\omega^2 R$, donde m es la masa de la Tierra y $\omega = 2\pi/T$, la velocidad angular de la Tierra ($T = 365$ días). Por otro lado, de acuerdo con la ley de atracción universal $F = \gamma mM/R^2$, donde M es la masa del Sol, recibimos que

$$\gamma mM/R^2 = m\omega^2 R \quad \text{ó} \quad M = \omega^2 R^3/\gamma \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}.$$

237. Como la Luna y el satélite se mueven en el campo gravitacional de la Tierra, aplicamos la tercera ley de Kepler, o sea,

$$T_1^2/T_2^2 = (h + H + 2R_0)^3/8R^3$$

(fig. 379), de donde $h = 2R\,(T_1/T_2)^{2/3} - H - 2R_0 = 220$ km.

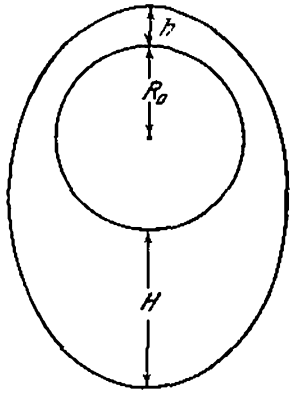


Fig. 379

238. Como la masa de la bola, en el mismo volumen, es mayor que la masa del agua, entonces el campo gravitacional es mayor cerca de la bola que lejos de ella. De modo análogo, el agua en las proximidades de la bola está más comprimida. La fuerza de presión del líquido que actúa sobre la burbuja del lado izquierdo será un tanto menor que la fuerza que actúa sobre

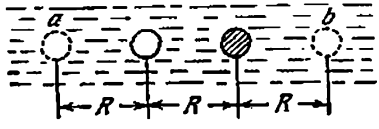


Fig. 380

la burbuja del lado derecho. Por otra parte, la fuerza de gravitación entre el aire en la burbuja y la bola es mayor que la fuerza de atracción entre el aire y el volumen de agua mostrado con el punteado (volumen *a* en la fig. 380). Como la masa de aire en la burbuja es muy pequeña, resulta ser decisiva la acción del primer factor. La burbuja se repelerá de la bola.

El movimiento de la bola de hierro, al contrario, se determinará por el hecho de que la fuerza de atracción entre el aire en la burbuja y la bola es mucho menor que la fuerza de atracción entre la bola y el volumen de agua marcado con la línea punteada (fig. 380, volumen *b*). El cálculo de la fuerza se hace por

medio de las siguientes consideraciones. En un medio homogéneo (agua) existe una esfera que carece casi por completo de masa (burbuja) y una esfera con masa excesiva (bola). Formalmente esto puede analizarse como la presencia de masas negativa y positiva.

La fuerza de interacción entre las esferas en el líquido es igual a la fuerza de interacción en el vacío entre una masa negativa, igual a masa de agua en el volumen de la burbuja, y una masa positiva, igual a la diferencia entre la masa de la bola de hierro y la masa de agua en el mismo volumen. Por lo tanto tenemos que $F = -\gamma m_1 (m_2 - m_1)/R^2$, donde m_1 es la masa de agua en la esfera de radio r y m_2, la masa de la bola de hierro.

239. En las cercanías de la burbuja el campo gravitacional es menor que en un líquido homogéneo. Por consiguiente, allí el líquido es menos comprimido. Por eso, una burbuja tiende al sector del líquido, donde existe otra burbuja e inversamente. Las burbujas se atraerán. Dos burbujas en un líquido homogéneo, cuyas masas son insignificantes, pueden considerarse formalmente como masas negativas sobrepuestas en una masa positiva m del medio en el volumen de la burbuja:

$$F = \gamma (-m) (-m)/R^2 = \gamma m^2/R^2.$$

240. Si la esfera fuera sólida, entonces la fuerza de gravitación sería igual a $F_1 = \gamma M m/l^2$, donde $M = 4/3\pi R^3\rho$ era la masa de la esfera sin la cavidad. La presencia de la cavidad es equivalente al surgimiento de la fuerza de repulsión $F_2 = \gamma m' m/S^2$, donde $m' = 4/3\pi r^3\rho$ siendo S la distancia entre el centro de la cavidad y el punto material.

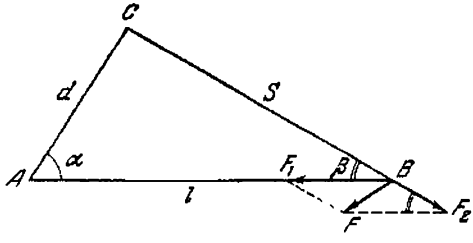


Fig. 381

La fuerza F que buscamos es la suma geométrica de las fuerzas F_1 y F_2 (fig. 381). Aplicando el teorema de los cosenos, recibimos que

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos\beta} =$$
$$= \frac{4}{3}\pi\gamma m\rho \sqrt{\frac{R^6}{l^4} + \frac{r^6}{(l^2-d^2)^2} - \frac{2R^3r^3\cos\beta}{l^2(l^2-d^2)}} \approx 5{,}7\cdot 10^{-6}\ N.$$

241. La fuerza de atracción que buscamos será la suma geométrica de las fuerzas de atracción creadas por las diferentes secciones de la esfera. Las secciones pequeñas σ_1 y σ_2 (fig. 382) se cortan

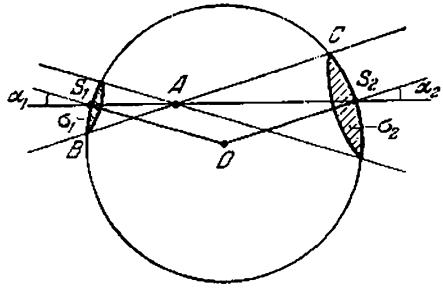


Fig. 382

de la esfera en forma de conos con vértice en el punto A que se obtienen girando la generatriz BC alrededor del eje S_1S_2. Las áreas de las secciones son iguales a $(AS_1)^2\,\omega/\cos\alpha_1$ y $(AS_2)^2\,\omega/\cos\alpha_2$, y sus masas a $(AS_1)^2\,\omega\rho/\cos\alpha_1$ y $(AS_2)^2\,\omega\rho/\cos\alpha_2$, respectivamente, donde ω es el ángulo sólido, bajo el cual se ven ambas secciones desde el punto A; ρ es la densidad superficial de la esfera (la masa por unidad de área); $\angle\alpha_1 = \angle\alpha_2$, porque el triángulo S_1OS_2 es isósceles. Las fuerzas de atracción creadas por las secciones, son iguales a

$$\gamma\frac{m(AS_1)^2\,\omega\rho}{(AS_2)^2\cos\alpha_1}=\gamma\frac{m\omega\rho}{\cos\alpha_1};\ \gamma\frac{m(AS_2)^2\,\omega\rho}{(AS_2)^2\cos\alpha_2}=\gamma\frac{m\omega\rho}{\cos\alpha_2},$$

respectivamente, donde m es la masa del cuerpo, y están dirigidas en sentidos opuestos. La resultante de las masas es nula. Al examinar de modo análogo otras secciones correspondientes de la esfera, nos convencemos de que todas ellas, de dos en dos, se compensan mutuamente. Por consiguiente, la fuerza de atracción que actúa por parte de la esfera sobre el cuerpo situado dentro de la esfera, es igual a cero. Subrayamos que este resultado es válido también para una esfera de espesor finito, porque ésta puede ser dividida en cualquier cantidad de capas esféricas finas, para cada una de las cuales es válida la demostración hecha arriba.

242. La fuerza de atracción es igual a la fuerza con que el cuerpo de masa m se atrae a la esfera de radio r y densidad ρ. Las capas espesas exteriores de la Tierra no ejercen, como fue demostrado en el problema 241, influencia alguna en el cuerpo. Por eso la fuerza que buscamos será

$$F=\gamma\frac{(4\pi/3)\,\rho r^3 m}{r^2}=\gamma\frac{2\pi}{3}\rho m r.$$

Esta fuerza disminuye proporcionalmente a r a medida que se aproxima al centro de la Tierra.

243. El nivel del agua no cambiará, porque la cantidad de agua desplazada continuará la misma.

244. El equilibrio no se alterará, puesto que, de acuerdo con la ley de Pascal, la presión sobre el fondo del recipiente será igual en todos los lugares.

245. 1) Como el pedazo de hielo flota, el peso de toda el agua desplazada por éste es igual al peso del propio hielo o del agua recibida de éste. Por eso el agua que se forma después del deshielo ocupará un volumen igual al volumen de la parte hundida del pedazo de hielo y por consiguiente el nivel del agua no cambiará.
2) El volumen de la parte sumergida del pedazo de hielo con la piedra es mayor que la suma de los volúmenes de la piedra y el agua que se obtiene después del deshielo. Por lo tanto, el nivel del agua en el copo se descenderá.
3) El peso del agua desplazada es igual al peso del hielo (el peso del aire en la burbuja puede prescindirse). Por eso igualmente como en el caso 1), el nivel del agua no cambiará.

246. El peso del cuerpo hundido en el líquido en el primer caso es igual a $P_1 = (d - d_1)\,V$; en el segundo caso es igual a $P_2 = (d - d_2)\,V$, donde V es el volumen del cuerpo; de ahí resulta que

$$d = (P_2 d_1 - P_1 d_2)/(P_2 - P_1).$$

247. Solamente en los pequeños lagos el hielo puede mantenerse suspenso gracias a la orilla. En el centro de un lago grande éste obligatoriamente flotará. La relación de las densidades del hielo y del agua es 0,9. Por consiguiente, 0,9 de todo el espesor del hielo se encuentra en el agua. La distancia entre la superficie del hielo y el agua es 1 m.

248. Al retirar la piedra, la caja se hizo más ligera en un peso igual al de la piedra y, por lo tanto, el volumen del agua desplazada por la caja disminuyó en $V_1 = P/d_1$, donde P es el peso de la piedra y d_1, el peso específico del agua. Al sumergirse en el agua, la piedra desalojará un volumen de agua igual a su propio volumen, o sea, $V_2 = P/d_2$, donde d_2 es el peso específico de la substancia de la piedra. Como $d_2 > d_1$, entonces $V_1 > V_2$ y por consiguiente el nivel del agua en la taza disminuirá.

249. En ambos casos el trabajo de las bombas es igual, porque la misma cantidad de agua bombeada sube a la misma altura.

250. Una figura en forma de Г está en una posición estable, en el fondo de un recipiente vacío, porque la perpendicular trazada del centro de gravedad de la figura no sale de los límites del área de la base. A medida que vertemos agua en el recipiente comienza a aumentar la fuerza de empuje que actúa sobre el rectángulo (se supone que el agua tiene la posibilidad de pasar por debajo de la figura). Para una profundidad de agua en el recipiente igual a 0,5 a, la suma de los momentos de las fuerzas

que tienden a girar el cuerpo en sentido horario, será igual a la suma de los momentos de las fuerzas que tienden a girar el cuerpo en sentido antihorario. Si continuamos llenando el recipiente de agua, la figura caerá.

251. La longitud del tubo x se halla de la condición $dx = d_0 (x - h)$ que expresa la igualdad de las presiones en la profundidad del extremo inferior del tubo. Aquí d_0 es el peso específico del agua. Obtenemos, entonces, que $x = d_0 h/(d_0 - d) = 50$ cm.

252. La presión sobre el fondo es igual a $p = \rho g (H + h)$ (fig. 383). Por otro lado, como el recipiente es cilíndrico tenemos $p =$

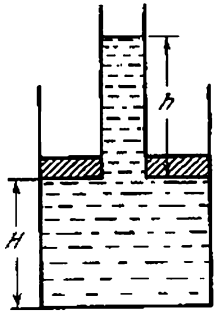


Fig. 383

$= (P + mg)/\pi R^2$. La altura h podemos determinar igualando entre sí las fuerzas que actúan sobre el émbolo: $\rho g h \pi (R^2 - r^2) = P$, de donde resulta que

$$H = \frac{1}{\pi R^2 \rho} \left(m - \frac{P}{g} \frac{r^2}{R^2 - r^2} \right) \approx 10 \text{ cm}.$$

253. Valiéndose del principio de conservación de la energía y del principio de Arquímedes, llegamos a la siguiente ecuación:

$$mgx = \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \rho - m \right) gh,$$

donde ρ es la densidad del agua y x, la altura que buscamos. Resolviendo la ecuación, recibimos que $x = (4/3\pi R^3 \rho - m)\, h/m$.

254. De la igualdad de los momentos respecto al punto A (fig. 384), que actúan sobre la tabla, tenemos

$$P_1 (l - a - x/2) \cos \alpha = P (l/2 - a) \cos \alpha,$$

donde $P_1 = Sxd_0$, $P = Sld$, S es el área de la sección transversal de la tabla y d_0, el peso específico del agua. De aquí resulta que

$$x = (l-a) \pm \sqrt{(l-a)^2 - (d/d_0)\, l\,(l-2a)}.$$

Como $x < l - a$, entonces es válida solamente una solución:

$$x = (l-a) - \sqrt{(l-a)^2 - (d/d_0)\, l\,(l-2a)}.$$

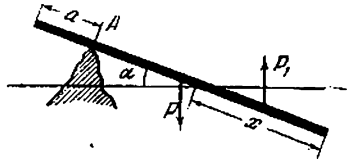


Fig. 384

255. El hombre no logró su objetivo, porque, aumentando la fuerza de empuje, el hombre con ello aumentó considerablemente el peso de su carga (la densidad del aire comprimido en la cámara es mayor que la densidad del aire circundante).

256. La indicación de la balanza aumentará si la densidad media del cuerpo que debe ser pesado, es menor que la densidad de las pesas de la balanza. La indicación de la balanza disminuirá, si la densidad media del cuerpo es mayor que la de las pesas de la balanza. En el caso cuando las pesas y el cuerpo tienen una densidad media igual, el equilibrio de la balanza no se alterará.

257. La verdadera masa del cuerpo es

$$M = M_1 + d_0\,(V - M_1/d_1) \approx 801{,}16 \text{ g}.$$

El error relativo cometido (en %) es igual a

$$\frac{M - M_1}{M}\,100\,\% \approx 0{,}14\,\%.$$

258. La presión atmosférica normal es igual aproximadamente a 10^5 Pa. Esto significa que el peso de una columna de aire atmosférica de área igual a 1 m² es 10^5 N. Conociendo la superficie del globo terrestre, podemos calcular la masa de toda la atmósfera de la Tierra. La superficie de la Tierra es $S = 4\pi R^2$, donde $R = 6\,370$ km es el radio medio de la Tierra. La masa de la atmósfera es $M \approx 4\pi R^2 \times 1$ kg/cm² $\approx 5 \cdot 10^{15}$ toneladas.

259. Supongamos que el interior de una botella está lleno de vidrio. Si ejercemos presión sobre la superficie exterior, entonces esta misma presión surgirá en todas las secciones interiores del vidrio. En este caso tendrá lugar una compresión, y el volumen de la parte interior de la botella disminuirá. No tiene importancia qué es lo que ejerce presión sobre la superficie interior

de la botella, el agua o el vidrio que llena la botella. Si la botella se somete a una presión interna o externa, igual a p, la capacidad de ésta disminuye.

260. La presión del líquido en el punto D es nula y en el punto A es ρgh. Como la presión en la pared lateral aumenta linealmente, la presión media es

$$p_{\text{med}} = (0 + \rho gh)/2.$$

La fuerza con que el líquido actúa sobre la pared lateral inclinada es

$$F = \frac{\rho gh}{2} \frac{h}{\operatorname{sen} \alpha} b = \rho g \frac{h^2 b}{2 \operatorname{sen} \alpha}.$$

La fuerza f con que las paredes laterales actúan sobre el fondo, está dirigida hacia arriba y es igual a

$$f = 2F \cos \alpha = \rho g h^2 b \operatorname{ctg} \alpha.$$

(La componente vertical de la fuerza resultante que actúa sobre el fondo del recipiente será igual, sin duda alguna, a la fuerza de gravedad del líquido invertido. En realidad, tenemos

$$\rho ghab - f = \rho ghb\,(a - h \operatorname{ctg} \alpha) = \rho gV,$$

donde V es el volumen del líquido invertido).

261. La fuerza con que el líquido hace subir el recipiente es

$$F = \pi (R^2 - r^2) \rho gh.$$

Por lo tanto,

$$\pi (R^2 - r^2) \rho gh = P, \qquad \rho = \frac{P}{\pi (R^2 - r^2) gh}.$$

262. La presión sobre «el fondo» del recipiente es igual a ρgh. La fuerza con que la parte sombreada del líquido (fig. 385) presiona

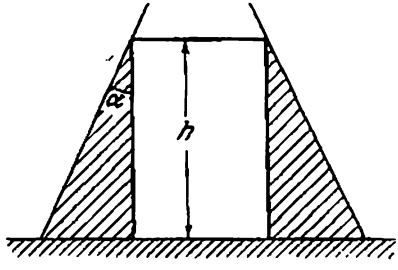


Fig. 385

sobre la mesa es $\rho ghn\,(2Rh \operatorname{tg} \alpha - h^2 \operatorname{tg}^2 \alpha)$. Por la tercera ley de Newton tenemos que la misma fuerza actúa sobre el líquido. La condición de equilibrio del líquido en el momento

cuando el recipiente deja de presionar sobre la mesa, tiene la forma

$$P + P_1 = \rho g h \pi (2Rh \operatorname{tg} \alpha - h^2 \operatorname{tg}^2 \alpha),$$

donde P_1 es el peso de toda la parte sombreada del líquido (el cono truncado sin el volumen del cilindro):

$$P_1 = \frac{\rho g h}{3} \{\pi R^2 + \pi (R - h \operatorname{tg} \alpha)^2 + \\ + \pi R (R - h \operatorname{tg} \alpha)\} - \rho g h \pi (R - h \operatorname{tg} \alpha)^2,$$

de donde hallamos que

$$\rho = \frac{3P}{\pi g h^2 \operatorname{tg} \alpha (3R - h \operatorname{tg} \alpha)}.$$

263. En el recipiente cilíndrico el fondo caerá en todos tres casos, porque la fuerza de presión sobre el fondo del recipiente desde arriba, será la misma todas las veces. En el recipiente que se estrecha en la parte superior, el fondo caerá sólo si vertemos aceite, ya que el nivel del aceite será aquí mayor que en el recipiente cilíndrico. En el recipiente que se hace más ancho en la parte superior, el fondo caerá al poner mercurio, cuyo nivel será mayor que en el recipiente cilíndrico; lo mismo tendrá lugar si colocamos un peso que se distribuye, en el caso dado, por una superficie menor que en otros dos casos.

264. Si el nivel del agua es igual en los vasos, entonces también será igual el nivel del mercurio hasta el momento, cuando en él se introduce el pedazo de madera. La introducción en el vaso de un pedazo de madera será lo mismo que si ponemos una cantidad de agua igual a la desplazada por este pedazo, es decir, una cantidad de agua igual en peso al pedazo de madera. Por consiguiente, si las secciones de los vasos son iguales, los niveles del agua y del mercurio en ambos vasos coincidirán. Si las secciones son diferentes el agua estará por encima y el mercurio más abajo en el vaso, cuya sección es menor. Esto tiene lugar, porque la adición de cantidades iguales en peso (y en volumen) de agua en los vasos con diferentes secciones conduce a un aumento diferente de presión sobre la superficie del mercurio.

265. Al introducir el cubo en el segundo vaso el mercurio en ambos recipientes se elevará a una altura x y ocupará la posición AB (fig. 386). La altura necesaria de la columna de agua en el segundo vaso se halla por la igualdad de las presiones, por ejemplo, en el nivel CD: $(y + x)\rho_1 g = h\rho_2 g$, donde ρ_1 es la densidad del mercurio y ρ_2, la densidad del agua; y puede determinarse, valiéndose de la condición de conservación del volumen del mercurio: $(x + y) S_1 = V_2$, donde V_2 es el volumen del mercurio desplazado por el cubo después de verter el agua. Si el agua cubre completamente el cubo, entonces, por el principio de Arquímedes podemos escribir

$$V_0 \rho_0 g = V_2 \rho_1 g + (V_0 - V_2) \rho_2 g,$$

donde ρ_0 es la densidad del hierro. Resolviendo las ecuaciones escritas obtenemos que

$$h = \rho_1 (\rho_0 - \rho_2) V_0 / \rho_2 (\rho_1 - \rho_2) S_1.$$

Si el agua no cubre el cubo, entonces el principio de Arquímedes se escribirá de la siguiente forma:

$$V_0 \rho_0 g = V_2 \rho_1 g + h S \rho_2 g,$$

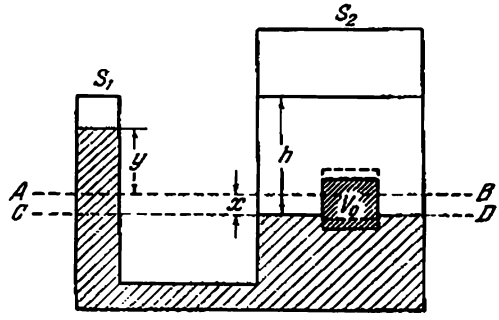


Fig. 386

donde $S = V_0^{2/3}$ es el área de una cara del cubo. En este caso, la altura que buscamos será: $h = \rho_0 V_0 / \rho_2 (S_1 + V_0^{2/3})$. La primera solución es válida si

$$S_1 \leqslant \frac{\rho_1 (\rho_0 - \rho_2)}{\rho_2 (\rho_1 - \rho_0)} V_0^{2/3}$$

y la segunda si

$$S_1 \geqslant \frac{\rho_1 (\rho_0 - \rho_2)}{\rho_2 (\rho_1 - \rho_0)} V_0^{2/3}.$$

266. Como resultado de la variación de la presión atmosférica, la fuerza de Arquímedes que actúa sobre los barómetros por parte del aire se varía tanto por el cambio de la densidad del aire, como por el cambio del volumen de los barómetros, cuando se cambian los niveles del mercurio en sus secciones abiertas. Tomando en consideración todas las condiciones del problema, los barómetros tienen no sólo el mismo peso, sino también el mismo volumen. Por eso, para cada uno de ellos la variación de la fuerza de empuje, debido a la primera causa, es la misma. La variación de los volúmenes, como es evidente, será diferente. En el barómetro en forma de U, para una variación de la diferencia de niveles en un determinado valor, el nivel del mercurio en cada caño acodado debe cambiar sólo en la mitad de este valor. En el barómetro de cubeta el nivel del mercurio en la cubeta cambia muy poco y en el tubo cambia prácticamente

en todo el valor de variación de la diferencia de niveles. Además, en la misma cantidad en que cambia el volumen del mercurio dentro del tubo variará el volumen en la cubeta. Por consiguiente, para el barómetro de cubeta, la variación del volumen será dos veces mayor que para el barómetro en forma de U (a diámetros iguales de los tubos). Al aumentar la presión, el volumen del barómetro de cubeta se hace menor que el volumen del barómetro en forma de U, la fuerza de Arquímedes que actúa sobre el barómetro de cubeta también será menor y por eso él pesa más.

267. Cuando el hombre está en pie sobre el colchón, todo su peso se distribuye en un área menor (área de la planta de los pies), que cuando está acostado. Por eso el estado de equilibrio se alcanzará, en primer caso, para una presión mayor del aire en el colchón que en segundo caso.

268. Analicemos primeramente la cámara llena de aire (en la fig. 387, *a* vemos el corte de la cámara). Para el equilibrio de las secciones de la cámara *AB* y *CD* es evidente la necesidad de que la ten-

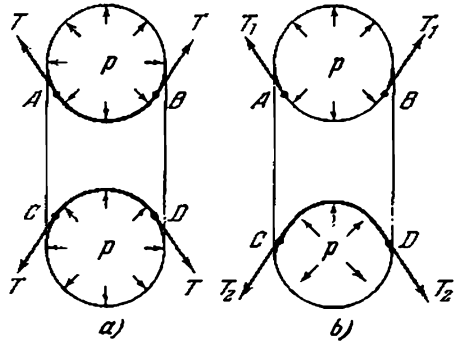


Fig. 387

sión de las paredes estiradas de la cámara *T* equilibre la presión excesiva *p* en el interior de la cámara. Analicemos, ahora, las fuerzas que actúan sobre las secciones *AB* y *CD* en el caso cuando la cámara está colocada en la rueda cargada (fig. 387, *b*). En la parte superior de la cámara la distribución de las fuerzas que actúan sobre la sección *AB* no cambia esencialmente. En la parte inferior la situación será absolutamente diferente. Sobre la sección *CD* actuará una fuerza elástica por parte de la llanta igual a la carga aplicada a la rueda (el peso de la rueda y un cuarto del peso del automóvil). Bajo la acción de esta fuerza adicional, la cámara se deforma y el ángulo entre las fuerzas de tensión de la goma *T* aumenta. La fuerza resultante de la tensión que actúa sobre la sección *CD* disminuye y por eso la presión excesiva del aire dentro de la cámara equilibran tanto la fuerza de tensión como el peso de la rueda y una parte del automóvil.

De esta forma la llanta no cae, porque ella se mantiene por la presión excesiva del aire dentro de la cámara. En la parte superior de la cámara, esta presión excesiva se equilibra por la tensión de las paredes de ésta, y en la parte inferior, tanto la tensión disminuida de las paredes, como la fuerza aplicada a la rueda.

269. La fuerza con que se estira la pared de la parte cilíndrica de la caldera en dirección perpendicular al eje de ésta OO_1 es igual por unidad de longitud a $f_1 = (2Rl/2l)\,p = pR$, donde $2Rl$ es el área de la sección de la caldera $ABCD$ y p, la presión en el interior de la caldera (fig. 388); $2Rlp$ es la fuerza que

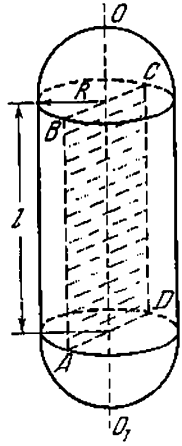


Fig. 388

actúa sobre una mitad del cilindro (véase el problema 156). El valor máximo de la fuerza por unidad de longitud de los fondos esféricos, puede hallarse de la fórmula

$$f_2 = (\pi R^2/2\pi R)\,p = pR/2 = f_1/2.$$

Por lo tanto, los fondos esféricos pueden soportar una presión dos veces mayor que la parte cilíndrica de la caldera (para el mismo espesor de las paredes). Para que la resistencia de la caldera sea igual en todas sus partes, el espesor de los fondos puede ser dos veces menor que el espesor de las paredes cilíndricas, es decir, 0,25 cm.

270. La forma de la caldera debe ser tal que la fuerza aplicada a una unidad de longitud de la sección de la caldera sea la mínima. Esta fuerza es igual a $f = pS/l$, donde S es el área de la sección de la caldera; l, el perímetro de la sección; p, la presión del vapor. La fuerza f será mínima, si la relación entre el área de la sección y el perímetro de la sección es mínima. Como se sabe, esta relación tiene su valor mínimo para un círculo. Además

se sabe que la sección de una esfera en cualquier plano es un círculo. Por eso la forma más ventajosa de la caldera, desde el punto de vista de su resistencia, es la forma esférica.

271. Separemos en el interior del líquido una columna de altura h (fig. 389). La ecuación de movimiento de esta columna tiene

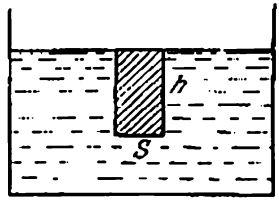


Fig. 389

la forma: $ma = mg - pS$, donde $m = \rho Sh$ es la masa del líquido; p, la presión a una profundidad h. Por consiguiente, $p = \rho h (g - a)$.

272. Conforme a la solución del problema 271, la fuerza de empuje puede escribirse en la forma siguiente: $F = \rho V (g - a)$, donde V es el volumen de la parte sumergida del cuerpo. La ecuación de movimiento del cuerpo flotante de masa M, tendrá la forma: $Ma = Mg - \rho V (g - a)$, de donde recibimos que $V = M/\rho$, lo mismo que en un recipiente inmóvil. El cuerpo no emergirá.

273. La presión del líquido sobre la tapa de la cisterna, a una distancia x de la pared delantera, es $p = \rho xa$. Como esta presión crece linealmente a medida que nos alejamos de la pared delantera, la fuerza que buscamos será igual a $F = \frac{\rho al + 0}{2} ld = \rho \frac{l^2 d}{2} a$.

274. $F = \rho hldg + \rho (l^2 d/2) a$.

275. Si el tanque estuviese en reposo o se moviese uniformemente, la presión a una profundidad h sería igual a $p_1 = \rho gh$. Por otro lado, si el tanque tuviese un movimiento acelerado y no existiese la fuerza de gravedad, entonces la presión en el punto A sería igual a $p_2 = \rho al$. Esta es precisamente la presión que, de acuerdo con la segunda ley de Newton, hubiera transmitido a la columna del líquido de longitud l la aceleración necesaria a. Durante el movimiento acelerado del tanque en el campo gravitacional surgirá tanto la presión p_1, como la presión p_2. De acuerdo con el principio de Pascal, la presión en el líquido es igual en todas las direcciones. Por eso, las presiones p_1 y p_2 se suman y la presión resultante en el punto A será igual a $p = \rho (gh + al)$.

276. Tenemos (fig. 390)

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{\sqrt{g^2+a^2}}, \qquad \frac{H-h}{l/2} < \frac{a}{\sqrt{g^2+a^2}}.$$

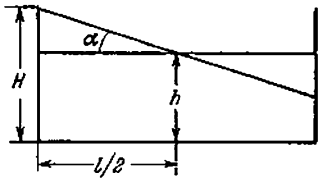


Fig. 390

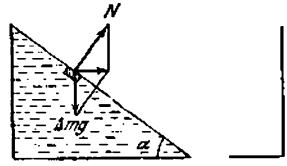


Fig. 391

277. A fin de que el líquido no se desborde, debemos transmitir al recipiente una aceleración, de modo que la superficie del líquido ocupe la posición mostrada en la fig. 391. El volumen máximo del líquido es igual a $bcS/2l$. La masa de todo el sistema es $M + \frac{bcS}{2l}\rho$. La aceleración necesaria se determina por la condición de que la suma de las fuerzas que actúan sobre un pequeño volumen del líquido de masa Δm cerca de la superficie, esté dirigida horizontalmente (fig. 391). Por la segunda ley de Newton, tenemos $\Delta ma = \Delta mg \operatorname{tg}\alpha$. Por consiguiente, la fuerza que buscamos es

$$F = \left(M + \frac{bcS}{2l}\rho\right) g \frac{b}{c}.$$

278. El movimiento del líquido en el sifón está garantizado por las fuerzas de cohesión entre los elementos del líquido. El líquido en una columna larga pesa más que el líquido en la columna corta que conduce al bombeo de éste. Basándose en esta afirmación, se podrá concluir que con la ayuda del sifón es posible trasegar el agua por encima de una pared de cualquier altura. Sin embargo, esto no es así. A una altura de elevación igual a 10 m, la presión dentro del líquido se hace nula. Surgirán, entonces, burbujas de aire existentes siempre en el agua, que comenzarán a dilatarse y la columna de agua dejará de ser continua. En cuanto ocurra esto, el sifón dejará de funcionar.

279. Inicialmente el aparato funcionará como un sifón. El agua correrá por un tubo fino al recipiente de agua. Luego a través de A pasará una burbuja de aire y dividirá el líquido en la columna superior en dos partes. Después de esto el líquido dejará de correr.

280. La presión del agua inmediatamente debajo del émbolo de cada bomba será menor que la presión atmosférica en un valor de $\rho g(H + h)$, donde ρ es la densidad del agua. Por eso, para mantener el émbolo es necesario tirar por él hacia arriba con

una fuerza $F = \rho g (H + h) S$, donde S es el área del émbolo. Por consiguiente, es preciso utilizar una fuerza mayor para empujar los émbolos que tienen un área mayor.

281. Las cámaras se llenan en la parte inferior de un aire más denso. El aire sale de las cámaras en la parte superior. Como resultado de ello, la presión se igualará paulatinamente y la máquina trabajará sólo hasta el momento cuando la diferencia de las presiones entre las partes del recipiente será suficiente para hacer subir el agua por el tubo a la parte superior del recipiente.

282. En el caso dado, la rueda no es simétrica y la presión del aire sobre la parte derecha de la misma es mayor que la presión sobre la parte izquierda. La fuerza de la presión excesiva que actúa sobre la parte derecha de la rueda es igual a $F=(p_1-p_2) S$, donde S es el área de la sección transversal de la cámara. El peso de las cámaras llenadas de agua no puede superar $P = \rho g S h$. Como $h \leqslant \frac{p_1-p_2}{\rho g}$, entonces $F \geqslant P$. La rueda comenzará a girar en sentido antihorario. Por eso las cámaras se elevarán de la parte inferior del recipiente a la parte superior llena de aire. La rueda girará en sentido antihorario hasta que la disminución de la diferencia de presiones no se haga insuficiente para elevar el agua a una altura h.

283. El «techo» del globo estratosférico no se determina por la altura máxima que puede alcanzar el globo, pero sí por la altura para la cual el descenso se hace con una velocidad que garantice la «seguridad» de aterrizaje. Como se sabe la envoltura del globo estratosférico se llena de un gas ligero (hidrógeno o helio) solamente de manera parcial y como, en el proceso de ascensión del globo, este gas se dilata expulsando de la envoltura el aire, esto permite mantener la fuerza de ascensión más o menos constante. A cierta altura el gas ocupará todo el volumen de la envoltura. Sin embargo, después de ello la fuerza ascensional del globo estratosférico aún sigue aumentándose debido al escape del gas por el orificio inferior de la envoltura. Con ello el peso del globo comienza a disminuir. Sólo después de que una determinada cantidad de gas se escape de la envoltura, el globo estratosférico alcanzará el «techo». Para el descenso del globo es preciso librar una cantidad adicional de gas a través de la válvula superior de la envoltura. Para un descenso suave, la fuerza ascensional deberá ser apenas un poco menor que el peso del globo estratosférico. A una altura pequeña, la velocidad de descenso resultará excesivamente grande porque el volumen del gas disminuirá y su cantidad será menor que en el proceso de la ascensión. Tirando el lastre fuera, se recibirá la disminución de la velocidad de descenso.

§ 11. HIDRO- Y AERODINAMICA

284. Designemos por h la distancia desde el nivel del agua hasta el orificio superior, por x la distancia incógnita del recipiente hasta el punto de intersección de los chorros en dirección hori-

zontal y por y, la distancia del nivel del agua en el recipiente hasta el mismo punto (fig. 392). El punto de intersección de los chorros permanecerá en el mismo lugar, si el nivel del agua en el recipiente no cambia. Para esto hace falta que $Q = Sv_1 +$

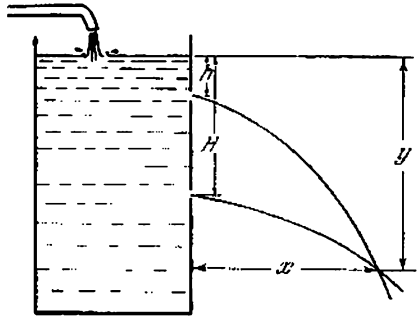


Fig. 392

$+ Sv_2$, donde $v_1 = \sqrt{2gh}$ y $v_2 = \sqrt{2g(H+h)}$ son las velocidades con que los chorros salen de los orificios.
Basándose en las leyes fundamentales de la cinemática, podemos escribir que

$$x = v_1 t_1 = v_2 t_2, \qquad y = h + gt_1^2/2 = h + H = gt_2^2/2,$$

donde t_1 y t_2 son los tiempos de «caída» del agua desde los orificios hasta el punto de intersección de los chorros. Entonces recibimos

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{Q^2}{2gS^2} - H^2\frac{2gS^2}{Q^2}\right) = 120 \text{ cm},$$

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{Q^2}{2gS^2} + H^2\frac{2gS^2}{Q^2}\right) = 130 \text{ cm}.$$

285. La velocidad de salida del agua del orificio es $v = \sqrt{2gh}$. El impulso de la fuerza con que el recipiente actúa sobre el agua que sale es $F\,\Delta t = \Delta m v$, donde $\Delta m = \rho S v\,\Delta t$ es la masa del agua expulsada durante el intervalo de tiempo Δt. Por lo tanto, $F = \rho v^2 S = 2\rho g h S$. La presión cerca del fondo es $p = \rho g h$ y por eso $F = 2pS$. Con esta misma fuerza el chorro de agua actúa sobre el recipiente. De este modo, el agua actúa sobre la pared con orificio con una fuerza de un valor $2pS$ menor que la fuerza con que el agua actúa sobre la pared opuesta, y no de pS como parece a primera vista. Esto está relacionado con la disminución de la presión sobre la pared con orificio debido a la mayor velocidad de la corriente del agua cerca de esta pared. El recipiente comenzará el movimiento, si $kQ < 2pS$ ó $k < 2\rho g h S/Q$.

286. De acuerdo con la segunda ley de Newton debe verificarse obligatoriamente la igualdad $pS_0 = 2pS$. Por consiguiente, con la salida del líquido por el tubo, el área de la sección transversal del chorro deberá disminuirse en dos veces: $S = S_0/2$. Esta compresión del chorro se explica del siguiente modo. Los chorros extremos del líquido que se aproximan al tubo en la parte superior no pueden, gracias a la inercia, superar el extremo del tubo, pasando muy junto de las paredes, y tienden al centro del chorro. Bajo la presión de las partículas que se mueven cerca del centro del chorro, las líneas de la corriente del agua se enderezan y el chorro ya más estrecho del líquido corre a lo largo del tubo.

287. Menospreciando el agua salpicada, nosotros consideramos el choque del chorro en la pared como absolutamente inelástico. Según la segunda ley de Newton, la variación de la cantidad de movimiento del agua durante el intervalo de tiempo Δt es $\Delta mv = F\,\Delta t$, donde $\Delta m = \rho\,(\pi d^2/4)\,v\,\Delta t$ es la masa del agua que pasa durante el intervalo de tiempo Δt a través de la sección transversal del tubo. De ahí obtenemos que $F = (\rho\pi d^2/4)\,v^2 \approx 0{,}08$ N.

288. Durante el movimiento del gas por el tubo (fig. 393), la cantidad de su movimiento no cambia en valor, pero cambia

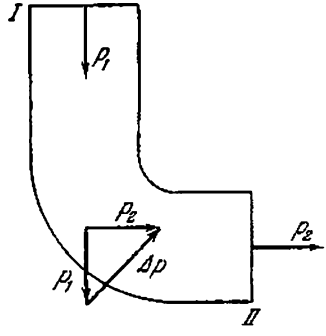


Fig. 393

en dirección. Por unidad de tiempo a través de la sección transversal I de la parte vertical del tubo pasa la masa ρSv que posee una cantidad de movimiento $\mathbf{p}_1 = \rho Sv\mathbf{v}_1$, donde $\mathbf{v}_1$ es el vector de velocidad de la corriente del gas en la parte vertical, numéricamente igual a la velocidad dada v. Durante este mismo tiempo, a través de la sección II pasa la masa que posee una cantidad de movimiento $\mathbf{p}_2 = \rho Sv\mathbf{v}_2$, donde $\mathbf{v}_2$ es el vector de velocidad en la parte horizontal, que también es numéricamente igual a v. La variación de la cantidad de movimiento es igual al impulso de la fuerza F con que el tubo actúa sobre el gas: $\mathbf{F} = \rho Sv\,(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)$. Por su valor la fuerza es $F =$

$= \rho S v^2 \sqrt{2}$. Según la tercera ley de Newton el gas actúa sobre el tubo con la misma fuerza. Esta fuerza está dirigida hacia el lado opuesto a la curva del tubo.

289. La velocidad inicial del agua respecto a la paleta es $v = \sqrt{2gh} - \omega R$. Por eso, por unidad de tiempo, la paleta desplaza una masa de agua igual a $m = \rho S (\sqrt{2gh} - \omega R)$. La velocidad del agua respecto a la paleta, después del choque, es igual a 0 y por eso la variación de la cantidad de movimiento del agua, por unidad de tiempo, es igual a mv. De acuerdo con la segunda ley de Newton tenemos:

$$F = \rho S (\sqrt{2gh} - \omega R)^2.$$

290. En primer momento el buque se moverá hacia la derecha, porque la presión sobre el estribor disminuye en un valor $2pS$, donde p es la presión a una profundidad h de la ruptura y S, su área (véase el problema 285). Más tarde cuando el chorro de agua alcanzará la pared opuesta, sobre ésta comenzará a actuar una fuerza $F = \rho S v^2$, donde v es la velocidad del chorro respecto al buque (véase el problema 287). F es un tanto mayor que $2pS$, puesto que $v > \sqrt{2gh}$ debido al hecho de que el buque se mueve al encuentro del chorro. Como consecuencia de ello el movimiento comenzará a disminuirse.

291. La velocidad de la corriente del líquido en el tubo es constante en toda la sección debido a la pequeña compresibilidad de éste y la continuidad del chorro. Esta velocidad es $v = \sqrt{2gH}$. La velocidad del líquido en el recipiente es muy pequeña y prácticamente igual a cero, porque el área del recipiente es mucho mayor que el de la sección del tubo. Por lo tanto, en el límite recipiente — tubo deberá haber un salto de presión que designaremos por $(p_1 - p_2)$. El trabajo de las fuerzas de presión provoca un cambio de la velocidad desde 0 hasta $\sqrt{2gH}$. Basándose en el principio de conservación de la energía, podemos escribir

$$\Delta m v^2/2 = (p_1 - p_2) S \Delta h,$$

donde S es el área de la sección del tubo; Δh, la altura de un volumen pequeño del líquido y $\Delta m = \rho S \Delta h$, la masa de este volumen. Por consiguiente, $\rho v^2/2 = p_1 - p_2 = \rho g H$.
Debido a la constancia de velocidad de la corriente, la presión en el tubo cambia de acuerdo con la ley $p = p_0 - \rho g (h - x)$, igualmente como en un líquido inmóvil. p_0 es la presión atmosférica y x, la distancia que se calcula del extremo superior del tubo. La variación de la presión con la altura se representa en la fig. 394. En el eje de las ordenadas se encuentra la presión y en el de las abscisas, la distancia de la superficie del líquido en el recipiente.

292. El agua que sale del tubo durante un pequeño intervalo de tiempo Δt posee una cantidad de movimiento igual a $\Delta p = \rho S v^2 \Delta t$, donde $v = \sqrt{2gH}$ es la velocidad del chorro del

agua (véase el problema 291). De acuerdo con la segunda ley de Newton tenemos que $F\ \Delta t = 2\rho gHS\ \Delta t$. Con la misma fuerza

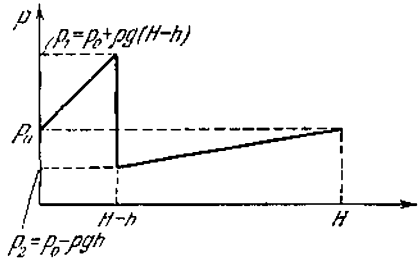


Fig. 394

el chorro actuará sobre el recipiente con agua. Por lo tanto, la indicación de la balanza inicialmente disminuirá en $2\rho gHS$.

293. En el primer momento, mientras que el chorro no alcance el platillo, no habrá equilibrio. El platillo subirá porque el agua que salió del recipiente deja de ejercer presión sobre el fondo de éste. No obstante, después de alcanzar el chorro el platillo, el equilibrio se restablece. Analicemos una sección (o un volumen pequeño) del chorro de masa Δm. Cayendo sobre el platillo esta sección transmite al chorro en dirección vertical un impulso $\Delta m\sqrt{2gh}$, donde h es la altura del grifo sobre el platillo. Por otro lado, esta sección, abandonando el recipiente, deja de presionar sobre su fondo y sobre el platillo, en el transcurso de tiempo de caída $t = \sqrt{2h/g}$. Esto equivale al surgimiento del impulso de la fuerza que actúa sobre el recipiente verticalmente hacia arriba durante el período de caída de la sección del líquido. El valor medio de este impulso, durante el tiempo de caída, será igual a

$$\Delta mg\sqrt{2h/g} = \Delta m\sqrt{2gh}.$$

De este modo, con cada volumen del líquido Δm está relacionado, por término medio, el surgimiento de dos impulsos de fuerza iguales y de sentidos opuestos. Como el chorro corre ininterrumpidamente, la balanza se encontrará en equilibrio. En el momento cuando cesa el chorro, el platillo bajará, porque los últimos volúmenes del líquido, cayendo en el platillo, actúan sobre éste con una fuerza que supera su peso y la disminución de la presión sobre el fondo del recipiente cesará.

294. Basándose en el principio de conservación de la energía, podemos escribir que $Mv^2/2 = mgh$, donde M es la masa de agua que queda en el tubo al cerrarse la válvula K_2; m es la masa de agua que sube a una altura h. De ahí recibimos: $\frac{\rho l\pi d^2}{4}\frac{v^2}{2} = \rho V_0 gh$, donde V_0 es el volumen de la masa m. En 2 s se

sube como término medio un volumen de agua $V_0 = \pi d^2 v^2/8\,gh = 1{,}7 \cdot 10^{-3}$ m³. En una hora de trabajo del ariete se subirá un volumen $V = 1{,}7 \cdot 10^{-3} \cdot 30 \cdot 60 \approx 3$ m³.

295. La presión en el flujo de aire que contornea el techo es menor que la presión del aire en reposo. Esta presión excesiva de aire inmóvil por debajo del techo, provoca los fenómenos descritos.

296. Gracias a la gran velocidad de la corriente del gas dentro del chorro, la presión interior en el chorro es menor que la de la atmósfera. Por debajo la bola se mantendrá por la presión del chorro y por los lados, por la presión estática de la atmósfera.

297. Cuando la corriente del aire pasa entre los discos su velocidad disminuye, a medida que se aproxima a los bordes de los discos. Cerca de los bordes la velocidad es mínima. La presión en el chorro del gas es tanto menor cuanto mayor sea su velocidad. Por eso la presión entre los discos es menor que la de la atmósfera. La presión atmosférica aprieta el disco inferior contra el superior y por eso la corriente del gas cesa. Luego, la presión estática del gas desplaza nuevamente el disco y el proceso vuelve a repetirse.

298. En el flujo de agua que corre la presión disminuye a medida que aumenta la velocidad de la corriente. La velocidad de la corriente de agua en el recipiente es esencialmente menor que la velocidad de la corriente en el tubo y, por lo tanto, la presión del agua en el recipiente es mayor que en el tubo. En el límite recipiente—tubo la velocidad de la corriente aumenta y la presión disminuye; como consecuencia de esto la bola puesta en la red resulta ser apretada contra ésta y no emergerá.

299. En un intervalo de tiempo τ el pistón se desplaza a una distancia $u\tau$ (fig. 395). En este caso la fuerza F realizará un trabajo $A = Fu\tau$. La masa del líquido derramado en el tiempo τ

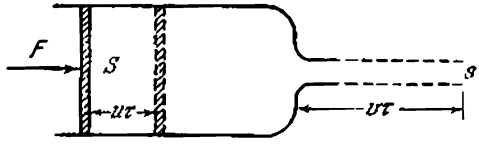


Fig. 395

es $\rho Su\tau$. La velocidad de la corriente del líquido v se determina según la relación: $Su = sv$. La variación de la energía cinética del líquido durante el tiempo τ es igual a:

$$\rho Su\tau\,(v^2/2 - u^2/2).$$

Esta variación de la energía debe ser igual al trabajo de la fuerza F:

$$Fu\tau = \rho Su\tau\,(v^2/2 - u^2/2).$$

Excluyendo u hallamos que $v^2 = \frac{2F}{S\rho}\frac{1}{1-s^2/S^2}$. Si $s \ll S$, entonces $v = \sqrt{2F/S\rho}$.

300. Al resolver el problema 299, tenemos en consideración que la velocidad de cualquier volumen del líquido que se encuentra en la bomba es constante. La variación de la velocidad desde u hasta v tiene lugar en la salida del líquido de la bomba. No obstante, esto no pasa inmediatamente después de que la fuerza comienza a actuar sobre el pistón. Hace falta que pase cierto tiempo durante el cual el proceso se establezca, o sea, las partículas del líquido en el cilindro adquieran una velocidad constante. Para $s \to S$ el intervalo de tiempo tiende al infinito y por eso la velocidad adquirida por el líquido bajo la acción de una fuerza constante se hace infinitamente grande.

301. Introduzcamos el sistema de coordenadas, representado en la fig. 396. La velocidad de la corriente del líquido por la fórmula de Torricelli es: $V = \sqrt{2gy}$, donde y es el espesor de

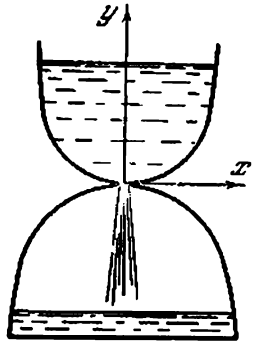


Fig. 396

la capa de agua en el recipiente superior. Como consecuencia de la incompresibilidad del agua, tenemos $sV = Sv$, donde v es la velocidad de descenso de nivel superior del agua; S, su área y s, el área del orificio. Si consideramos que el recipiente tiene una simetría axial, entonces $S = \pi x^2$, donde x es la coordenada horizontal de la pared del recipiente. Por consiguiente, $\pi x^2/\sqrt{2gy} = s/v = \text{const}$, puesto que por la condición del problema el nivel del agua deberá bajar con velocidad constante. De ahí determinamos que la forma del recipiente se da por la ecuación $y = kx^4$, donde $k = \pi^2 v^2/2gs^2$.

302. En la sección horizontal la presión en dependencia de la distancia r hasta el eje cambia según la ley $p = p_0 + (\rho\omega^2/2)\, r^2$, donde p_0 es la presión en el eje del vaso y ρ, la densidad del líquido. La deformación de la compresión del líquido será

máxima cerca de las paredes del vaso, al mismo tiempo que la deformación de tracción de la barra en rotación (problema 211) será máxima en la proximidad del eje.

303. A una distancia r del eje de rotación la presión excesiva es $p = (\rho\omega^2/2)\, r^2$ (véase la solución del problema 302). Por otro lado, esta presión se determina por la diferencia entre el nivel del líquido en el sector dado y el nivel en el eje: $p = \rho g h$ (fig. 397). Igualando estas expresiones, recibimos: $h = (\omega^2/2g)\, r^2$. Esta es la ecuación de una parábola. Por consiguiente, la superficie del líquido en el recipiente en rotación tiene la forma de un paraboloide de rotación.

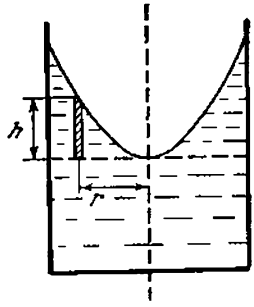


Fig. 397

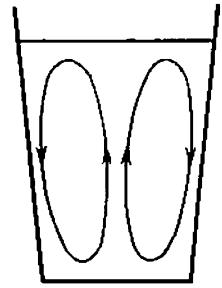


Fig. 398

304. Al revolver el agua, comunicamos a las partículas de ésta en el vaso cierta velocidad angular ω. La distribución de la presión en el líquido será aproximadamente la misma que fue obtenida en la solución del problema 302. La presión excesiva dentro del líquido equilibra la presión provocada por la diferencia de niveles en los bordes del vaso y en el eje (véase el problema 303). Después de parar de revolver, como resultado de fricción en el fondo, la velocidad de rotación del líquido en el fondo comienza a disminuir tanto más sensiblemente cuanto más lejos el líquido se encuentra del eje. Ahora, la presión excesiva provocada por la rotación no equilibrará el peso de la columna de líquido cerca de los bordes del recipiente. Como consecuencia de esto surge una circulación del líquido que se ve esquemáticamente en la fig. 398. Por eso los trocitos de las hojas de té se juntan en el medio del fondo del vaso.

Capítulo II

Calor. Física molecular

§ 12. DILATACION TERMICA DE LOS CUERPOS SOLIDOS Y LIQUIDOS

305. $\Delta t \approx 420°$ C.

306. La gran resistencia de las construcciones de hormigón armado es posible sólo gracias a que el coeficiente de dilatación del hormigón es muy próximo al del hierro.

307. La cantidad de calor transmitida por unidad de tiempo de un cuerpo al otro es proporcional a la diferencia de temperaturas de estos cuerpos. Para una diferencia grande de temperaturas, entre un termómetro y los objetos que lo circundan, el cambio del volumen del mercurio será rápido. Si las indicaciones del termómetro son próximas a la temperatura de los cuerpos que lo circundan, el cambio de volumen del mercurio será lento. Gracias a ello para el cambio de temperatura es necesario esperar un intervalo de tiempo bastante largo, en tanto que el termómetro no adquiera exactamente la temperatura del cuerpo humano. Si colocamos el termómetro calentado en contacto con el aire relativamente frío del cuarto la columna de mercurio, debido a la gran diferencia de temperaturas, «cae» con tanta rapidez que el termómetro puede ser «sacudido» casi al instante.

308. Al enfriar la escala desde t_1 hasta $t_0 = 0°$ C, el valor de cada división disminuye. Por eso la altura de la columna de mercurio calculada para la temperatura $t_0 = 0°$ C tendrá, en realidad, otro valor igual a $H = H_1 (1 + \alpha t_1)$. Las alturas de las columnas de mercurio para diferentes temperaturas e iguales presiones son inversamente proporcionales a las densidades

$$H_0/H_1 = \rho_1/\rho_0 = 1/(1 + \beta t_1),$$

de donde

$$H_0 = H_1 (1 + \alpha t_1)/(1 + \beta t_1) \approx H_1 (1 + \alpha t_1 - \beta t_1).$$

309. Se puede previamente enfriar el termómetro en una nevera y sacudirlo. Si no existe nevera es necesario mantener el termómetro debajo del sobaco un largo período de tiempo y después

sacudirlo inmediatamente. El termómetro indicará la temperatura del cuerpo humano.

310. La diferencia de las longitudes de las reglas a temperatura t_1 es igual a $l'_0(1+\alpha_1 t_1) - l''_0(1+\alpha_2 t_1) = l$. Para una temperatura t_2 esta diferencia es

$$l'_0(1+\alpha_1 t_2) - l''_0(1+\alpha_2 t_2) = \pm l.$$

El signo positivo corresponde al caso cuando la diferencia de las longitudes de las reglas permanece invariable (fig. 399, *a*).

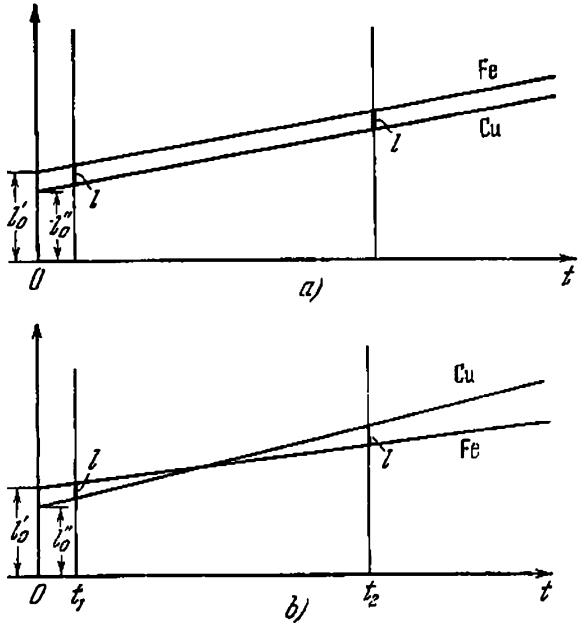


Fig. 399

El signo negativo corresponde a la dependencia de las longitudes de las reglas con relación a la temperatura que se ve en la fig. 399, *b*. En el primer caso, el sistema de ecuaciones conduce a los resultados siguientes:

$$l'_{0\,(1)} = \frac{\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1}\,l = 6{,}8 \text{ cm}, \qquad l''_{0\,(1)} = \frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}\,l = 4{,}8 \text{ cm}.$$

En el segundo caso,

$$l'_{0\,(2)} = \frac{2+\alpha_2(t_1+t_2)}{(t_2-t_1)(\alpha_2-\alpha_1)}\,l = 2008{,}5 \text{ cm},$$

$$l''_{0\,(2)} = \frac{2+\alpha_1(t_1+t_2)}{(t_2-t_1)(\alpha_2-\alpha_1)}\,l = 2006 \text{ cm}.$$

Si $t = 0°$ C, la longitud de la regla de hierro deberá ser mayor que la de cobre.

311. El posible esquema de suspensión se muestra en la fig. 400. 1 y 2 son las barras con un pequeño coeficiente de dilatación lineal α_1 (por ejemplo, de acero), 3 son las barras con un coe-

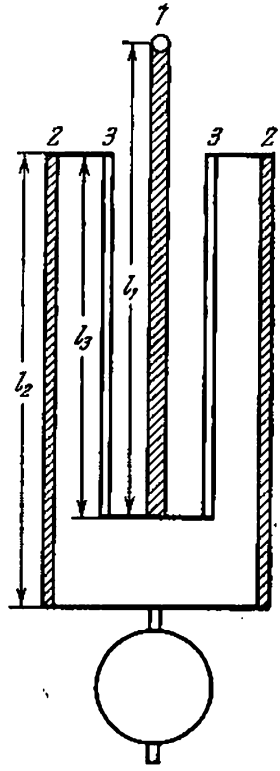


Fig. 400

ficiente de dilatación grande α_2 (por ejemplo, de zinc o latón). Las longitudes de las barras pueden escogerse de modo que la longitud del péndulo no cambie con la temperatura. Para esto se necesita que $\alpha_1 (l_1 + l_2) = \alpha_2 l_3$.

312. Al calentar el balón, el volumen de su cavidad aumenta por la misma ley que el volumen del vidrio: $v_1 = v_0 (1 + \beta t_1)$, donde β es el coeficiente de dilatación cúbica del vidrio. Si designamos por ρ_0 y ρ_1 las densidades del mercurio a temperaturas t_0 y t_1, entonces podemos escribir que $m_0 = v_0 \rho_0$ y $m_1 =$

$= v_1\rho_1$, si $\rho_1 = \rho_0/(1 + \beta_1 t_1)$. De este sistema de ecuaciones obtenemos para β la siguiente expresión:

$$\beta = \frac{m_1(1+\beta_1 t_1) - m_0}{m_0 t_1} \approx 3\cdot 10^{-5}\ \text{grad}^{-1}.$$

El coeficiente de dilatación lineal será $\alpha = \beta/3 \approx 10^{-5}\ \text{grad}^{-1}$

313. Supongamos que el péndulo del reloj que funciona con precisión realiza N oscilaciones diarias. Entonces a temperatura t_1 el péndulo de nuestro reloj realiza N oscilaciones en $(n - 5)$ segundos (donde $n = 86\,400$ es el número de segundos en 24 horas) y a temperatura t_2 realiza N oscilaciones en $(n + 10)$ segundos. Los períodos de oscilaciones serán respectivamente iguales a $T_1 = (n - 5)/N$ y $T_2 = (n + 10)/N$, de donde la relación de los períodos es $T_1/T_2 = (n - 5)/(n + 10) \approx \approx 1 - 15/n$. Por otra parte, considerando que el período de oscilaciones del péndulo es $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, obtenemos que

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{1+\alpha t_1}{1+\alpha t_2}} \approx \sqrt{1+\alpha(t_1-t_2)} \approx 1 + \frac{\alpha}{2}(t_1 - t_2).$$

Igualando las expresiones para la relación de los períodos hallamos que

$$\alpha \approx 30/(t_2 - t_1)\, n \approx 2{,}3\cdot 10^{-5}\ \text{grad}^{-1}.$$

§ 13. PRINCIPIO DE CONSERVACION DE LA ENERGIA. CONDUCTIBILIDAD TERMICA

314. Según el principio de conservación de la energía tenemos que la cantidad de calor desprendido es igual a la disminución de la energía cinética:

$$Q = Mv_0^2/2 - (M + m)\, v^2/2,$$

donde v es la velocidad del carrito después de que colocaron en éste los ladrillos. Esta velocidad se determina, valiéndose del principio de conservación de la cantidad de movimiento: $v = Mv_0/(M + m)$, y por lo tanto resulta que $Q = Mmv_0^2/2(M + + m)$.

315. Basándose en el principio de conservación de la energía, podemos escribir que

$$mgl = mv^2/2 + k(l - l_0)^2/2 + Q,$$

donde l es la longitud del cordón en el momento cuando la arandela lo abandona. Por otro lado, el cambio de la energía mecánica de la arandela es igual al trabajo de las fuerzas de fricción:

$$mv^2/2 - mgl = A,$$

donde $A = -fl$. Por consiguiente, $Q = -A - k(l - l_0)^2/2$. Aplicando la ley de Hook $f = k(l - l_0)$, hallamos que $Q = = fl_0 + f^2/2k$.

316. La corriente eléctrica realiza un trabajo $A = w\tau$. Gracias a este trabajo, de la nevera será retirada una cantidad de calor $Q_2 = q\lambda + qct$, donde c es la capacidad calorífica del agua y λ, el calor de fusión del hielo. La cantidad de calor desprendido en el cuarto según el principio de conservación de la energía será

$$Q_1 = A + Q_2 = w\tau + qct + q\lambda,$$

ya que la energía eléctrica se transforma finalmente en calor.

317. La temperatura en el cuarto aumentará. La cantidad de calor desprendido por unidad de tiempo será igual a la potencia consumida por la nevera, puesto que la energía eléctrica se transforma finalmente en calor y el calor retirado de la nevera volverá nuevamente al cuarto.

318. Es más ventajoso utilizar una nevera que consume el calor del aire exterior y lo desprende en el cuarto. En este caso el calor desprendido en el cuarto, por unidad de tiempo, será igual a $w + Q_2$, donde w es la potencia consumida por la nevera, y Q_2, el calor tomado del aire exterior por unidad de tiempo (véase el problema 316). Solamente la carestía y la complejidad de los aparatos electrocalentadores impiden en la actualidad la utilización de semejante método de calentamiento.

319. En el proceso de disolución, la rejilla cristalina de una sal se descompone. Este proceso exige gasto de cierta energía que se toma del disolvente. En el segundo caso, una parte de las uniones intermoleculares de la rejilla cristalina ya se destruyó durante la pulverización del cristal. Por eso para disolver un polvo se necesita una cantidad menor de energía; y el agua, al disolverse en el segundo recipiente, tendrá una temperatura mayor. El efecto, sin duda alguna, será en extremo insignificante.

320. La cantidad de calor desprendido por el agua que se enfría es igual a $m_2c\,(t_2 - \theta)$, donde θ es la temperatura final. El agua fría recibirá una cantidad de calor igual a $m_1c\,(\theta - t_1)$. El calor recibido por el calorímetro es $q\,(\theta - t_1)$. De acuerdo con el principio de conservación de la energía podemos escribir:

$$m_1c\,(\theta - t_1) + q\,(\theta - t_1) = m_2c\,(t_2 - \theta),$$

de donde

$$\theta = \frac{(m_1t_1 + m_2t_2)\,c + qt_1}{(m_1 + m_2)\,c + q} \approx 4^\circ\,\mathrm{C}.$$

321. La potencia gastada para calentar el agua en el calorímetro es $N_1 = DVct/\tau$, donde D es la densidad del agua; c, calor específico del agua La relación que buscamos será

$$Q = \frac{N - N_1}{N} = 1 - \frac{DVct}{N\tau} \approx 5\,\%.$$

322. $Q = \dfrac{k}{d}\,(T_1 - T_0)\,St \approx 4 \cdot 10^7$ J.

323. La cantidad de calor Q que pasa a través de la primera lámina en un segundo es igual a $Q = k_1 \frac{T_2 - T_1}{d_1} S$, donde S es el área de la lámina. Como el proceso es estacionario, entonces la misma cantidad de calor pasará a través de la segunda lámina: $Q = k_2 \frac{T_0 - T_2}{d_2} S$. De las condiciones del problema

$$k_1 \frac{T_2 - T_1}{d_1} S = k_2 \frac{T_0 - T_2}{d_1} S$$

y hallamos

$$T_2 = \frac{k_2 d_1 T_0 + k_1 d_2 T_1}{k_2 d_1 + k_1 d_2}.$$

324. Sustituyendo el valor de la temperatura T_2 en la expresión para Q (véase el problema 323), cuando $d_1 = d_2 = d$, hallamos que

$$Q = \frac{2k_1 k_2}{k_1 + k_2} \frac{T_0 - T_1}{2d} S.$$

Por consiguiente, el coeficiente de conductibilidad térmica de la pared será $k = \frac{2k_1 k_2}{k_1 + k_2}$.

325. La cantidad de calor que pasa en un segundo a través de las secciones transversales de las barras con coeficientes de conductibilidad térmica k_1 y k_2, son iguales, respectivamente, a

$$Q_1 = \frac{k_1}{d} (T_1 - T_0) S \quad \text{y} \quad Q_2 = \frac{k_2}{d} (T_1 - T_0) S.$$

La cantidad de calor que pasa a través de dos barras, cuya área total es $2S$, es

$$Q = Q_1 + Q_2 = \frac{k_1 + k_2}{2} \frac{T_1 - T_0}{d} \cdot 2S$$

De donde concluimos que el coeficiente de conductibilidad térmica de la pared es $k = (k_1 + k_2)/2$.

326. Los coeficientes de conductibilidad térmica de las paredes A y B son iguales a

$$k_A = \frac{k_1 + k_2}{2}, \qquad k_B = \frac{2k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

(véase las soluciones de los problemas 324 y 325). De la desigualdad evidente $(k_1 - k_2)^2 > 0$ deducimos que $(k_1 + k_2)^2 > 4k_1 k_2$, de donde resulta que

$$\frac{k_1 + k_2}{2} > \frac{2k_1 k_2}{k_1 + k_2}, \text{ o sea, } k_A > k_B.$$

327. La cantidad de calor que cada segundo pasa del calentador al agua, a través del fondo de la cacerola, es igual a

$$Q = \frac{k}{d}(T - T_1)S = m\lambda.$$

donde T_1 es la temperatura de ebullición del agua y λ, el calor específico de vaporización; de ahí recibimos que $T = T_1 + m\lambda d/kS$.

§ 14. PROPIEDADES DE LOS GASES

328. El casquillo retirado de la pluma actúa como una bomba. Debajo del casquillo surge un volumen enrarecido que succiona la tinta del depósito. El orificio sirve para mantener la presión constante debajo del casquillo.

329. Considerando que la temperatura permanece constante, aplicaremos la ley de Boyle—Marriotte al volumen de aire sobre el mercurio:

$$(p_{01} - p_1)(l - 748mm) = (p_{02} - p_2)(l - 736mm)$$

de donde resulta que $l = 764$ mm.

330. En la posición de equilibrio tenemos que $f - mg - F = 0$, donde f es la fuerza de empuje: $f = dh_1S$, donde d es el peso específico del agua; h_1, la altura de la columna de aire en el tubo de ensayo después de la sumersión. En el caso dado, la fuerza de empuje se crea por la diferencia de presiones en el extremo soldado del tubo desde abajo y desde arriba: $f = p_1S - (p_0 + dh)S$, donde p_1 es la presión del aire en el tubo después de sumersión. Por la ley de Boyle—Marriotte tenemos: $p_0lS = p_1h_1S$. Del sistema de ecuaciones dado hallamos que

$$F = \frac{S}{2}[(p_0 + dh)^2 + 4p_0 dl - (p_0 + dh)] - mg = 0{,}87\text{N}.$$

331. Inicialmente, debido a la disminución del nivel de agua en el vaso, la presión p del aire bajará de un modo casi isotérmico. Esto tendrá lugar hasta el momento cuando la presión resultante en el nivel del extremo inferior del tubo no se hace igual a la presión atmosférica p_0: $p + \rho gh = p_0$, donde h es la altura de la columna del líquido en el vaso sobre el nivel del extremo inferior del tubo. A partir de este momento al vaso comienzan a pasar burbujas de aire. La presión en el nivel del inferior del tubo extremo permanecerá igual a la atmosférica; la presión del aire será $p = p_0 - \rho gh$ y aumentará linealmente con la disminución del nivel del agua. En estas condiciones la velocidad de la salida del líquido del vaso será constante. La dependencia de p en función de la cantidad Q se muestra

en la fig. 401. Las oscilaciones insignificantes de presión provocadas por el paso de burbujas aisladas de aire no se consideran en la fig. 401.

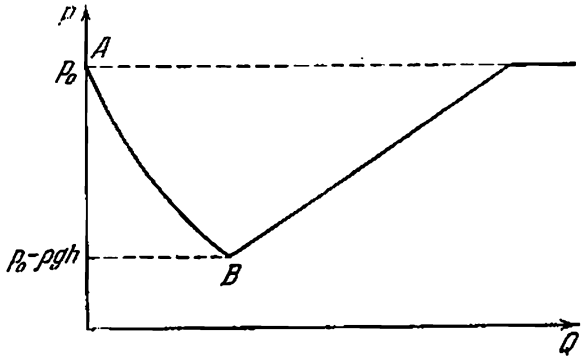


Fig. 401

332. Al extraer el aire del recipiente resulta que después de una bombeada la presión en éste será igual a $p_1 = p_0V/(V + v_0)$. Después de la segunda bombeada será $p_1V = p_2(V + v_0)$ y por consiguiente $p_2 = p_0\left(\frac{V}{V+v_0}\right)^2$, etc. Después de n bombeadas, la presión en el recipiente será $p' = p_0\left(\frac{V}{V+v_0}\right)^n$.

Al comprimir el aire en el vaso después de n bombeadas, la presión establecida será

$$p = p' + \frac{p_0 nv_0}{V} = p_0\left\{\left(\frac{V}{V+V_0}\right)^n + \frac{nv_0}{V}\right\}.$$

$p > p_0$ para cualquier n debido a que durante la compresión la bomba a cada bombeada se apodera de una cantidad de aire que tiene la presión p_0 y durante el bombeo del recipiente se eliminan volúmenes de aire v_0 a presiones menores que p_0.

333. Aplicando la ley de Boyle—Mariotte a los dos volúmenes de gas en el tubo cerrado, hallamos que

$$p\frac{L-l}{2}S = p_1\left(\frac{L-l}{2} - \Delta l\right)S,$$

$$p\frac{L-l}{2}S = p_2\left(\frac{L-l}{2} + \Delta l\right)S.$$

$$p_1 = p_2 + dl.$$

Aquí p es la presión estando el tubo en posición horizontal; p_1 y p_2 son las presiones sobre las partes inferior y superior del tubo, estando éste en posición vertical con los extremos

cerrados; d es el peso específico del mercurio y S, la sección transversal del tubo. De ahí determinamos que la presión inicial en el tubo es:

$$p = d\frac{l}{2}\left(\frac{l_0}{\Delta l} - \frac{\Delta l}{l_0}\right).$$

Para simplificar designemos $l_0 = (L - l)/2$.

Si abrimos uno de los extremos del tubo, estando éste en posición horizontal, la presión del gas en el tubo se hace igual a la presión atmosférica. De acuerdo con la ley de Boyle—Marriotte tenemos que $pl_0S = dHl_1S$ (siendo H la presión atmosférica), de donde obtenemos

$$l_1 = \frac{ll_0}{2H}\left(\frac{l_0}{\Delta l} - \frac{\Delta l}{l_0}\right).$$

La columna de mercurio se desplazará a una distancia igual a

$$\Delta l_1 = l_0 - l_1 = \frac{ll_0}{2H}\left[\frac{2H}{l} - \left(\frac{l_0}{\Delta l} - \frac{\Delta l}{l_0}\right)\right].$$

A fin de que el mercurio no se derrame del tubo es necesario que se verifique la condición:

$$\frac{l_0}{\Delta l} \leqslant \sqrt{\left(\frac{H}{l}\right)^2 + 1} + \frac{H}{l}.$$

Al abrir el extremo superior, cuando el tubo está en posición vertical, tendremos

$$pl_0S = d(H + l)\, l_2S,$$

de donde:

$$\Delta l_2 = l_0 - l_2 = \frac{ll_0}{2(H+l)}\left[\frac{2H}{l} - \left(\frac{l_0}{\Delta l} - \frac{\Delta l}{l_0}\right) + 2\right].$$

El mercurio no caerá del tubo si

$$\frac{l_0}{\Delta l} \leqslant \sqrt{\left\{\frac{2(H+l)}{l}\right\}^2 + 1} + \frac{2(H+l)}{l}.$$

Al abrir el extremo inferior, tendremos

$$pl_0S = d(H - l)\, l_3S,$$

de donde:

$$\Delta l_3 = l_0 - l_3 = \frac{ll_0}{2(H-l)}\left[\frac{2H}{l} - \left(\frac{l_0}{\Delta l} - \frac{\Delta l}{l_0}\right) - 2\right].$$

A fin de que la columna de mercurio no se derrame del tubo, deberá verificarse la siguiente condición:

$$\frac{l_0}{\Delta l} \leqslant \sqrt{\frac{4(H-l)^2}{l^2} + 1} + \frac{2(H-l)}{l}.$$

334. Como para cualquier gas $p = 1$ atm y $T = 273$ K, $V_\mu = 22{,}4$ l/mol, entonces para todos los gases tomados en una molécula-gramo, $C = pV_\mu/T = 0{,}082 \frac{\text{l}\cdot\text{atm}}{(\text{mol}\cdot\text{K})}$. Esta constante por lo general se designa por R y se denomina constante universal de los gases. El valor de R en el sistema de unidades SI es: $R = 8{,}31$ J/(k mol·K).

335. El volumen ocupado por un gas es proporcional a su masa, siendo la presión y la temperatura constantes. A un mol corresponde un volumen V_μ; a una masa cualquiera m, un volumen V. Es evidente que $V_\mu = V_\mu/m$, donde μ es la masa molar. Sustituyendo esta expresión en la ecuación de estado para un mol, tendremos que $pV = (m/\mu)\,RT$.

336. Al desaparecer la atracción entre las moléculas, la presión deberá aumentar. Para demostrarlo separaremos mentalmente dentro del gas o el líquido dos capas I y II (fig. 402). Las moléculas de la capa I, al penetrar en la capa II, como consecuencia del movimiento térmico, chocan con las moléculas de la capa II y como resultado sobre esta capa actuarán las fuerzas de presión p_T que dependen de la temperatura. Las fuerzas de atracción de las moléculas de la capa I actúan sobre las de la capa II en sentido opuesto. La presión resultante de la capa I sobre la capa II será $p = p_T - p_i$, donde p_i es la presión de las fuerzas internas de la atracción. La desaparición de p_i aumenta la presión.

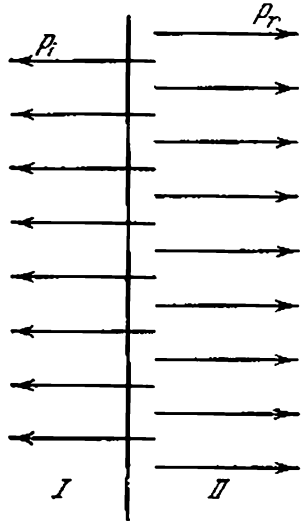


Fig. 402

337. Si las fuerzas de interacción entre las moléculas desaparecieson, el agua se transformaría en un gas ideal. La presión puede determinarse de la ecuación de estado de un gas ideal:

$$p = \frac{m}{\mu}\frac{RT}{V} \approx 137 \text{ atm.}$$

338. Separemos un volumen cilíndrico de gas junto a la pared (fig. 403). Las fuerzas que actúan sobre la superficie lateral del cilindro se compensan mutuamente. Como el volumen se

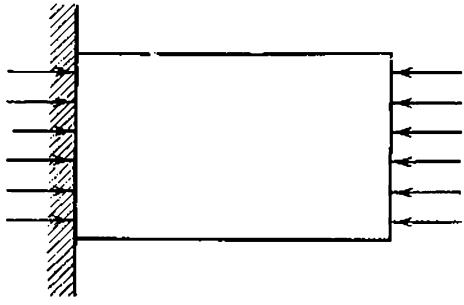


Fig. 403

encuentra en equilibrio, la presión de la pared sobre el gas deberá ser obligatoriamente igual a la presión que ejerce el gas sobre la otra base del cilindro. Valiéndose de la tercera ley de Newton, podemos concluir que la presión del gas sobre la pared es igual a la presión dentro del vaso.

339. La presión en el gas depende de las fuerzas de interacción entre las moléculas (véase el problema 336). Las fuerzas de interacción entre las moléculas del gas y entre las moléculas del gas y la pared son diferentes. La igualdad de las presiones dentro del gas y junto a la pared del recipiente (véase el problema 338), puede existir solamente gracias a la diferencia de concentraciones.

340. Como consecuencia de la constancia del volumen tenemos

$$p_2/p_1 = T_2/T_1, \quad \text{ó} \quad (p_2 - p_1)/p_1 = (T_2 - T_1)/T_1 = 0{,}004,$$

de donde: $T_1 = (T_2 - T_1)/0{,}004 = 250$ K.

341. Basándose en el principio de Arquímedes tenemos $mg + P = dV$, donde d es el peso específico del agua y V, el volumen de la esfera. De la ecuación de estado hallamos

$$(p_0 + dh)\, V = (m/\mu)\, RT.$$

Excluyendo de estas ecuaciones V, determinamos que

$$m = \frac{P\mu\,(p_0 + dh)}{dRT - \mu g\,(p_0 + dh)} \approx 1{,}666 \text{ g.}$$

El equilibrio será inestable.

342. Estando el tubo en posición horizontal el aparato no podrá servir de termómetro, puesto que a cualquier temperatura las presiones por las partes derecha e izquierda sobre la gota se equilibrarán. Si el tubo está en posición vertical, entonces la presión del gas en la esfera inferior será mayor que la presión en la esfera superior en un valor constante. A un volumen constante, la presión con la elevación de la temperatura aumenta tanto más rápido, cuanto mayor es la presión inicial. Para mantener la constancia de diferencias de las presiones en las esferas, la gota comenzará a moverse hacia arriba. Entonces el aparato podrá servir de termómetro.

343. Como las masas del gas en ambas mitades del cilindro son iguales y el pistón se encuentra en equilibrio, entonces $V_2/V_1 = T_2/T_1$, de donde $T_2=(V_2/V_1)\ T_1 = 330$ K. Aplicando la ley de Boyle—Marriotte al volumen del gas, cuya temperatura no cambia, tendremos $p = p_0V_0/V_1 = 1{,}05$ atm.

344. Iguales volúmenes de diferentes gases a idénticas condiciones exteriores, contienen el mismo número de moléculas (ley de Avogadro). Por eso $V_1 : V_2 : V_3 : V_4 = N_1 : N_2 : N_3 : N_4$, donde V_i es el volumen del gas correspondiente y N_i es el número de las moléculas de este gas. La masa de una cantidad cualquiera de gas es proporcional al número de sus moléculas y a la masa molar del gas:

$$m_1 : m_2 : m_3 : m_4 = N_1\mu_1 : N_2\mu_2 : N_3\mu_3 : N_4\mu_4.$$

Por otra parte, designando por $n_i = (V_i/V)\ 100\%$ el volumen relativo porcentual del gas dado, hallaremos

$$n_1 : n_2 : n_3 : n_4 = \frac{V_1}{V} : \frac{V_2}{V} : \frac{V_3}{V} : \frac{V_4}{V} = \frac{N_1}{N} : \frac{N_2}{N} : \frac{N_3}{N} : \frac{N_4}{N}.$$

Si caractorizamos la composición porcentual del aire por los valores $n'_i = (m_i/m)\ 100\%$ (composición en masa), entonces, basándose en las relaciones anteriores, podemos escribir

$$n'_1 : n'_2 : n'_3 : n'_4 = \frac{m_1}{m} : \frac{m_2}{m} : \frac{m_3}{m} : \frac{m_4}{m} =$$

$$= \frac{N_1\mu_1}{N} : \frac{N_2\mu_2}{N} : \frac{N_3\mu_3}{N} : \frac{N_4\mu_4}{N} =$$

$$= n_1\mu_1 : n_2\mu_2 : n_3\mu_3 : n_4\mu_4,$$

de donde

$$n'_i = \frac{n'_1 + n'_2 + n'_3 + n'_4}{n_1\mu_1 + n_2\mu_2 + n_3\mu_3 + n_4\mu_4}\, n_i\mu_i.$$

Teniendo en consideración que $n'_1 + n'_2 + n'_3 + n'_4 = 100\%$, obtenemos que

$$n'_i = \frac{n_i\mu_i \cdot 100\%}{n_1\mu_1 + n_2\mu_2 + n_3\mu_3 + n_4\mu_4},$$

y por lo tanto

$$n_1' = 75{,}52\%, \quad n_2' = 23{,}15\%$$
$$n_3' = 1{,}28\%, \quad n_4' = 0{,}05\%$$

345. Para cada gas podemos escribir la ecuación de estado:

$$p_1 V = (m_1/\mu_1)\, RT,$$
$$p_2 V = (m_2/\mu_2)\, RT,$$
$$p_3 V = (m_3/\mu_3)\, RT,$$
$$p_4 V = (m_4/\mu_4)\, RT,$$

de donde

$$(p_1 + p_2 + p_3 + p_4)\, V = \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} + \frac{m_3}{\mu_3} + \frac{m_4}{\mu_4}\Big)\, RT.$$

Por otra parte, para una mezcla de gases tenemos que $pV = (m/\mu)\, RT$, donde $m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$, y μ es la masa molar incógnita. Por la ley de Dalton, tenemos $p = p_1 + p_2 + p_3 + p_4$ y por lo tanto resulta que

$$\mu = \frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}{\dfrac{m_1}{\mu_1} + \dfrac{m_2}{\mu_2} + \dfrac{m_3}{\mu_3} + \dfrac{m_4}{\mu_4}} = \frac{n_1' + n_2' + n_3' + n_4'}{\dfrac{n_1'}{\mu_1} + \dfrac{n_2'}{\mu_2} + \dfrac{n_3'}{\mu_3} + \dfrac{n_4'}{\mu_4}} = 28{,}966,$$

donde $n_i' = (m_i/m)\ 100\%$ es la composición porcentual en masa del gas. El resultado obtenido en el problema anterior permite hallar μ, conociendo la composición del aire en volumen

$$\mu = \frac{\mu_1 n_1 + \mu_2 n_2 + \mu_3 n_3 + \mu_4 n_4}{n_1 + n_2 + n_3 + n_4} = 28{,}966.$$

346. Basándose en la ecuación de Clapeyron hallamos que

$$\mu = mRT/pV = \rho RT/p = 72 \text{ g/mol}.$$

La fórmula incógnita será C_5H_{12} (uno de los isómeros del pentano).

347. Al comprimir el gas en una envoltura térmicamente aislante, el trabajo realizado por las fuerzas exteriores conduce al aumento de la energía interna del gas y, entonces, su temperatura se eleva. La presión en el gas aumentará tanto por la disminución del volumen como por la elevación de su temperatura. Durante la compresión isotérmica, la presión aumenta sólo gracias a la reducción del volumen. Por consiguiente, en el primer caso la presión aumentará en un valor mayor que en el segundo caso.

348. La dependencia de p en función de V se muestra en la fig. 404. El trabajo máximo igual al área sombreada en la fig. 404 se realiza en un proceso isotérmico (1-2). En el sector *1-2* la tem-

peratura no cambiará. En el sector *2-3* la temperatura disminuirá dos veces. Posteriormente la temperatura aumentará y si $V_4 = 4l$, $T_4 = T_1$.

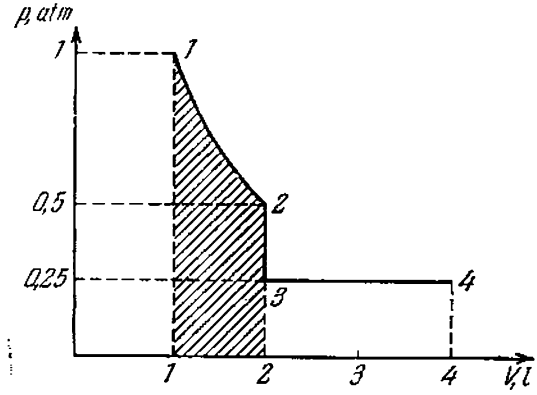


Fig. 404

349. *1-2* es una isobara (fig. 405). El gas se calienta a una presión constante absorbiendo el calor.
2-3 es una isócora. El gas se enfría a un volumen constante; la presión disminuirá y el calor se desprenderá.

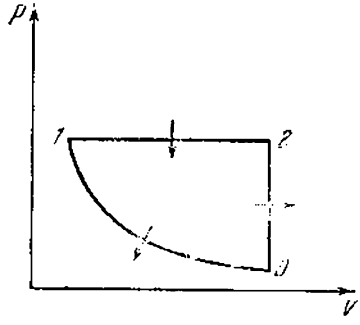


Fig. 405

3-1 es una isoterma. El volumen de gas disminuye a una temperatura constante. La presión aumenta. El gas no se calienta, a pesar de que las fuerzas exteriores realizan un trabajo sobre éste. Por consiguiente en este sector el gas entregará el calor.

350. La cantidad de calor desprendido durante la combustión del metano en el transcurso de una hora es igual a $Q_1 = rpV_0\mu/RT$, donde $\mu = 16$ g/mol es la masa molar del gas y $T = 284$ K,

su temperatura. La cantidad de calor recibida por el agua en una hora, es

$$Q_2 = \frac{\pi D^2}{4} v\rho c\,(t_2 - t_1)\,3600,$$

donde ρ es la densidad del agua; c, el calor específico. Por las condiciones del problema, tenemos $Q_2/Q_1 = \eta = 0{,}6$. Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenido, determinamos que

$$t_2 = t_1 + \frac{rpV_0\mu\eta}{9\,000\pi D^2 v\rho\, cRT} \approx 93^\circ\ \mathrm{C}.$$

351. En el estado inicial $p_1V = (m/\mu_1)\,RT_1$, donde μ_1 es la masa molar del ozono. En el estado final tenemos $p_2V = (m/\mu_2)\,RT_2$, donde μ_2 es la masa molar del oxígeno. De la ecuación de equilibrio térmico, tenemos

$$\frac{m}{\mu_1}\,q = \frac{C_V}{\mu_2}\,m\,(T_2 - T_1).$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones dado, hallamos

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{q}{C_V T_1} + \frac{\mu_1}{\mu_2} - 1 = 1.$$

352. Como consecuencia de la dependencia lineal de la presión con relación al volúmen, podemos escribir: $p = aV + b$.

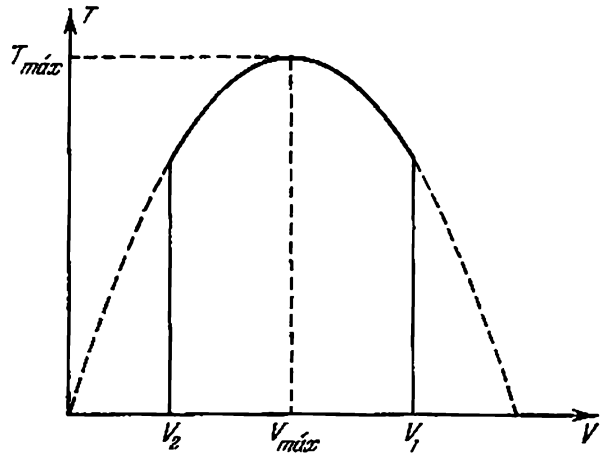


Fig. 406

Las constantes a y b se determinan de las condiciones del problema: $a = (p_1 - p_2)/(V_1 - V_2) \approx -0{,}5$ atm/l, $b = (p_2V_1 - p_1V_2)/(V_1 - V_2) \approx 20$ atm. Colocando la expresión para p

en la ecuación de estado de un gas ideal recibimos que $pV = (m/\mu) RT = \text{const} \cdot T$ y hallamos que

$$aV^2 + bV = \text{const} \cdot T. \qquad (1)$$

El gráfico de dependencia de T en función de V (fig. 406) tiene la forma de una parábola. La curva alcanza el valor máximo para $V_{\text{máx}} = -b/2a \approx 20$ l, cuando las raíces de la ecuación de segundo grado (1) coinciden. En este caso tenemos

$$p_{\text{máx}} = aV_{\text{máx}} + b = b/2 \approx 10 \text{ atm},$$

y por consiguiente,

$$T_{\text{máx}} = p_{\text{máx}} V_{\text{máx}} \mu / mR \approx 490 \text{ K}.$$

353. La energía del volumen unitario del gas es $u_1 = CT\rho$, donde ρ es la densidad del aire. De acuerdo con la ecuación de estado de un gas ideal, tenemos que $pV/T = mB$ (B es constante). Como $\rho = m/V$, tenemos $\rho T = p/B$; por consiguiente $u_1 = (C/B)\, p$ se determina solamente por la presión. La energía de todo el aire en el cuarto también se halla por la presión. La presión en el cuarto es igual a la presión atmosférica y no cambia con el calentamiento del aire. Por eso la energía del aire en el cuarto no cambia. Calentándose, una parte del aire sale a través de las rajas hacia afuera, lo que permite mantener la constancia de energía a pesar del calentamiento. Solamente en un cuarto herméticamente cerrado la energía aumentaría con el calentamiento.

354. Basándose en la ecuación de estado, la masa del gas que buscamos será

$$\Delta m = \frac{\mu p V}{R} \frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2} \approx 1{,}3 \text{ kg}.$$

355. Supongamos que inicialmente el tubo de ensayo se encuentre en el fondo en estado de equilibrio estable. A medida que la temperatura aumenta, la presión del aire en él y, por consiguiente, la fuerza de empuje crecen. A determinada temperatura T_1, el tubo comienza a emerger. Como la presión del líquido disminuye a medida de alejarse del fondo, el volumen del aire en el tubo y por lo tanto, la fuerza de empuje continúan creciendo. El tubo alcanzará rápidamente la superficie del agua. Si continuamos aumentando la temperatura, el tubo se encontrará en la superficie. Si disminuimos la temperatura, entonces a temperatura T_1 el tubo no se hundirá. El problema reside en que el tubo posee una gran reserva de flotabilidad provocada por el aumento considerable de la fuerza de empuje debido a la inmersión del tubo. Solamente a determinada temperatura $T_2 < T_1$, el tubo comienza a hundirse. En este caso, la fuerza de empuje comenzará a disminuir porque el aire en el tubo, a medida que éste sumerge ocupará un volumen menor. El tubo alcanzará el fondo con mucha rapidez.

La dependencia de la posición h del tubo (respecto al fondo del recipiente) en función de la temperatura T, se representa en la fig. 407. Si $T < T_2$ el tubo obligatoriamente se encontrará

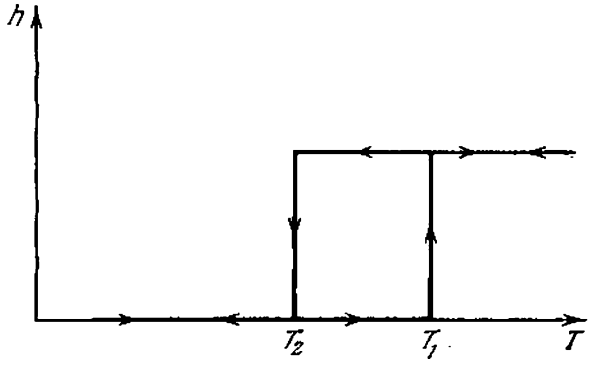


Fig. 407

en el fondo; si $T > T_1$, se encontrará en la superficie. Si $T_2 < T < T_1$, el tubo estará en el fondo o en la superficie en dependencia de los valores anteriores de la temperatura.

356. El gas se dilata a una determinada presión constante p creada por el pistón. En este caso el trabajo es $A = p(V_2 - V_1)$, donde V_1 y V_2 son los volúmenes inicial y final del gas. Utilizando la ecuación de estado expresamos el producto pV a través de la temperatura T. Entonces $A = (m/\mu) R (T_2 - T_1) \approx 330$ J.

357. El calor transmitido al gas provocará su calentamiento y la realización del trabajo mecánico. Según el principio de conservación de la energía, recibimos que

$$Q = \frac{m}{\mu} C_V (T_2 - T_1) + \frac{m}{\mu} R (T_2 - T_1) =$$
$$= \frac{m}{\mu} (T_2 - T_1)(C_V + R) \approx 148 \text{ J}.$$

§ 15. PROPIEDADES DE LOS LIQUIDOS

358. Es «más difícil» comprimir un litro de aire porque para ello hace falta realizar un trabajo mayor. El agua es poco compresible y para aumentar la presión dentro de ella hasta tres atmósferas, es necesaria una pequeña disminución de su volumen.

359. Un termómetro máximo puede obtenerse del siguiente modo. Sobre la columna del líquido del termómetro que se encuentra en posición horizontal (fig. 408) se coloca un cuerpo pequeño

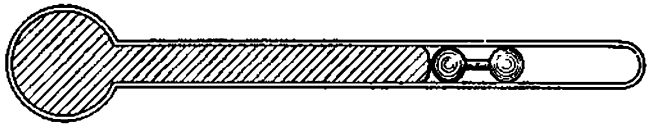


Fig. 408

no humectado por el líquido, pudiendo éste moverse libremente a lo largo del tubo del termómetro. La posición del cuerpo indicará la temperatura máxima, porque, al tener lugar la dilatación del líquido, el cuerpo se mueve a lo largo del tubo y, al tener lugar la compresión, el cuerpo permanece en su lugar. Análogamente podemos obtener un termómetro mínimo. Para esto el cuerpo humectado por el líquido del termómetro debe introducirse dentro del líquido.

360. Al extenderse una película elástica de goma, la fuerza de tensión depende del valor de su deformación. La fuerza de tensión superficial se determina solamente por las propiedades del líquido y no cambia con el aumento de su superficie.

361. La tensión superficial de la bencina pura es menor que la tensión superficial de la bencina, en la cual fue disuelta una grasa. Debido a esto al humedecer con bencina los bordes de la mancha, ésta comienza a disminuirse en dirección al centro. Al humectar la propia mancha, ésta comenzará a extenderse por el tejido.

362. En una capa superficial compacta del suelo se forman capilares del mismo tipo que muestra la fig. 409. Ellos se hacen más

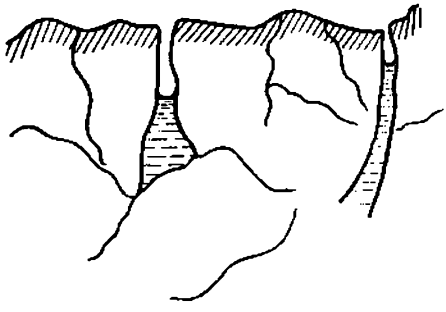


Fig. 409

delgados en la parte superior y el agua se eleva por ellos. El agua se evapora desde la superficie intensamente. Al arar el suelo

la estructura de los capilares se distruye y la humedad se conserva mejor en la tierra.

363. En el interior del cuero hay una gran cantidad de capilares. Dentro de un capilar de sección constante una gota de líquido que humedece se encontrará en equilibrio. El calentamiento del líquido disminuye la tensión superficial y por eso éste se mueve en dirección a la parte fría del capilar. La crema se moverá hacia el interior del cuero si lo calentamos por parte externa.

364. La grasa se derrite y las fuerzas capilares la desplazan hacia la superficie fría del tejido colocado debajo de la chaqueta (véase el problema 363).

365. La parte del leño que se encuentra en la sombra está más fría. Por eso las fuerzas capilares desplazan el agua en esta dirección.

366. La presión hidrostática equilibrará la presión capilar: $\rho g h = 4\alpha/d$. De donde $h = 30$ cm.

367. Sobre la sección de la película $abcd$ actúan las siguientes fuerzas: la fuerza de gravedad, la tensión superficial F_{ab} aplicada a la línea ab, y la tensión superficial F_{cd} aplicada a la línea cd. El equilibrio es posible solamente en el caso, cuando F_{ab} es mayor que F_{cd} en un valor igual a la fuerza de gravedad de la sección de la película que analizamos. La diferencia de las fuerzas de tensión superficial se explica por la diferencia de concentración del jabón en las capas superficiales de la película.

368. La fuerza de empuje equilibra la fuerza de gravedad del cubo mg y la fuerza de tensión superficial $4a\alpha$, es decir, $a^2x\rho g = mg + 4a\alpha$, donde x es la distancia que buscamos; de ahí resulta que $x = (mg + 4a\alpha)/a^2\rho g \approx 2{,}3$ cm. Las fuerzas de tensión superficial hacen una corrección cerca de 0,1 cm.

369. El líquido se eleva a una altura $h = 2\alpha/\rho g r$. La energía potencial de la columna del líquido es $W = mgh/2 = 2\pi\alpha^2/\rho g$. Las fuerzas de tensión superficial realizan un trabajo $A = 2\pi r\alpha h = 4\pi\alpha^2/\rho g$. La mitad de este trabajo irá para aumentar la energía potencial y la otra mitad, para ser desprendida en forma de calor. Por consiguiente, $Q = 2\pi\alpha^2/\rho g$.

370. La presión dentro del líquido en un punto que se encuentra por arriba de cierto nivel a una distancia h, es menor que la presión a este nivel en un valor $\rho g h$. En el recipiente a nivel del líquido, la presión es nula. Por consiguiente, la presión a una altura h será negativa (el líquido está «estirado») e igual a $p = -\rho g h$.

371. Las fuerzas de atracción que actúan sobre la molécula situada en la capa superficial por parte de todas las demás moléculas, poseen una resultante dirigida hacia abajo. No obstante, por parte de las moléculas vecinas más inmediatas sobre la molécula actúan fuerzas de repulsión. Debido a esto, la molécula se encuentra en equilibrio.

Como resultado de la acción tanto de las fuerzas de atracción como de las fuerzas de repulsión, la densidad del líquido en la capa superficial es menor que dentro del líquido. En efecto, sobre la molécula *1* (fig. 410) actúan la fuerza de repulsión por parte de la molécula *2*, y las fuerzas de atracción por parte

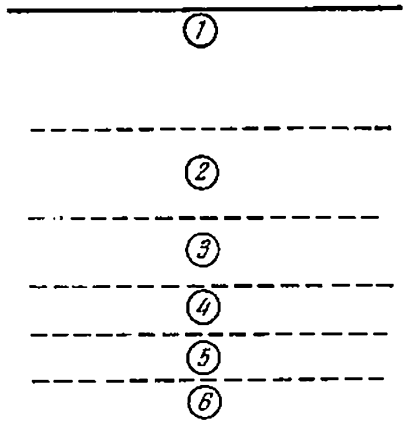


Fig. 410

de todas las demás moléculas (*3*, *4*, . . .). Sobre la molécula *2* actúan las fuerzas de repulsión por parte de las moléculas *3* y *1* y las fuerzas de atracción por parte de las moléculas que se encuentran a una profundidad mayor. Como resultado la distancia *1-2* deberá ser mayor que la distancia *2-3*, etc.
El esquema indicado es muy superficial (por ejemplo, no se toma en consideración el movimiento térmico, etc.), pero da un resultado cualitativamente verdadero. El aumento de la superficie del líquido se acompaña por el surgimiento de nuevas áreas enrarecidas de la capa superficial. Entonces, deberá realizarse un trabajo contra las fuerzas de atracción entre las moléculas. Este trabajo se denomina energía superficial.

372. La presión necesaria deberá ser mayor que la atmosférica en un valor capaz de equilibrar la presión hidrostática de la columna del líquido y la presión capilar en la burbuja de aire de radio r. La presión deberá superar a la atmosférica en $p = \rho gh + 2\alpha/r = 484$ N/m².

373. Como en este caso $\rho gh < 2\alpha/r$, entonces el líquido se eleva hasta el extremo superior del tubo. El menisco tendrá la forma de un segmento esférico (fig. 411). El radio de curvatura del segmento se determina por la condición de que las fuerzas de tensión superficial equilibran toda la columna del líquido,

o sea, $2\pi r\alpha \cos\varphi = \pi r^2 h\rho g$, de donde $\cos\varphi = rh\rho g/2\alpha$. Como se ve de la fig. 411 el radio de curvatura del segmento es $R = r/\cos\varphi = 2\alpha/h g\rho = 0{,}74$ mm.

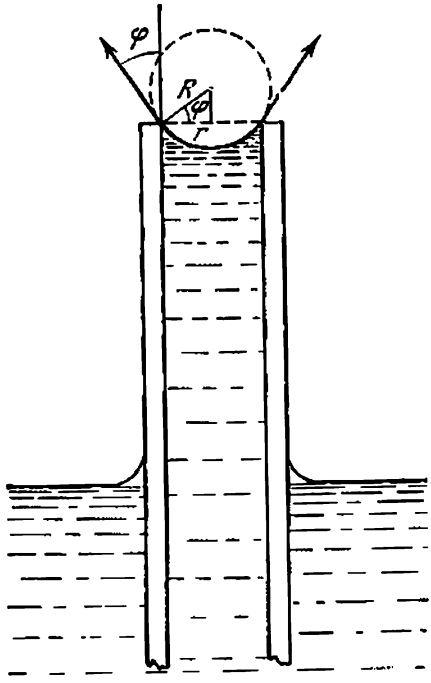


Fig. 411

374. Después de abrir el tubo en su extremo inferior se produce un menisco convexo de la misma forma que en el extremo superior. Por eso la longitud de la columna de agua que se encuentra en el tubo, será igual a $2h$, si $l \geqslant h$ y será igual a $(l + h)$, si $l \leqslant h$.

375. 1) Las fuerzas de tensión superficial podrán mantener en el capilar dado una columna de agua de altura no mayor que h. Por eso el agua se verterá del capilar.
2) El agua no se verterá; el menisco es convexo. Para un líquido que moja absolutamente las paredes, el menisco tendrá la forma de una somiesfera.
3) El agua no se verterá. El menisco es convexo. Su curvatura es menor que en el segundo caso.
4) El agua no se verterá. El menisco es plano.
5) El agua no se verterá. El menisco es cóncavo.

376. Dentro de la pompa de jabón de radio R la presión p es mayor que la atmosférica en doble valor de la presión capilar, porque la película de la pompa es doble: $p = p_0 + 4\alpha/R$. La presión dentro de la pompa de radio R junto con la presión dentro del sector de la película entre las pompas, deberá equilibrar la presión dentro de la pompa menor. Por consiguiente, $4\alpha/R + 4\alpha/R_x = 4\alpha/r$, donde R_x es el radio de curvatura del sector de la película AB. De ahí resulta que $R_x = Rr/(R - r)$. Las fuerzas de tensión superficial en cualquier punto de la superficie de contacto de las pompas, equilibran la una a la otra y son iguales entre sí. Esto es posible solamente en el caso, cuando los ángulos entre ellas son iguales a 120°.

377. Por el principio de conservación de la energía, la cruz no puede girar. Las componentes de las fuerzas de tensión superficial se equilibran por las fuerzas de presión hidrostática, puesto que la presión hidrostática del agua que se encuentra por encima del nivel horizontal del líquido es negativa (véase el problema 370).

378. Si los cuerpos están humedecidos por el agua, la superficie del agua tiene la forma mostrada en la fig. 412, *a*. Entre las

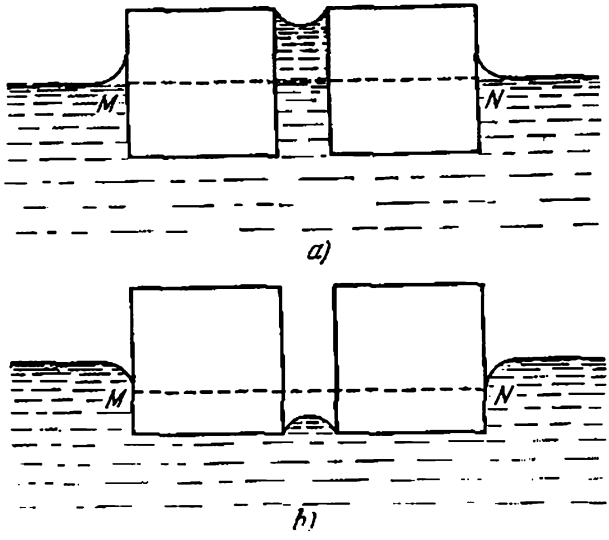


Fig. 412

cerillas sobre el nivel MN el agua está «estirada» por las fuerzas capilares y la presión dentro de ella es menor que la presión atmosférica. Las cerillas se aproximan, porque la presión ejercida sobre ellas por los lados es igual a la atmosférica. Para las cerillas no humedecidas por el agua, la forma de la super-

ficie se muestra en la fig. 412, *b*. La presión entre las cerillas es igual a la atmosférica y la presión por los lados más abajo del nivel *MN* es mayor que la atmosférica. Durante la aproximación de las cerillas, en el último caso, a los ángulos interfaciales dados corresponden diferentes formas de la superficie (fig. 413) del líquido. Sin embargo, una de ellas (fig. 413, *a*)

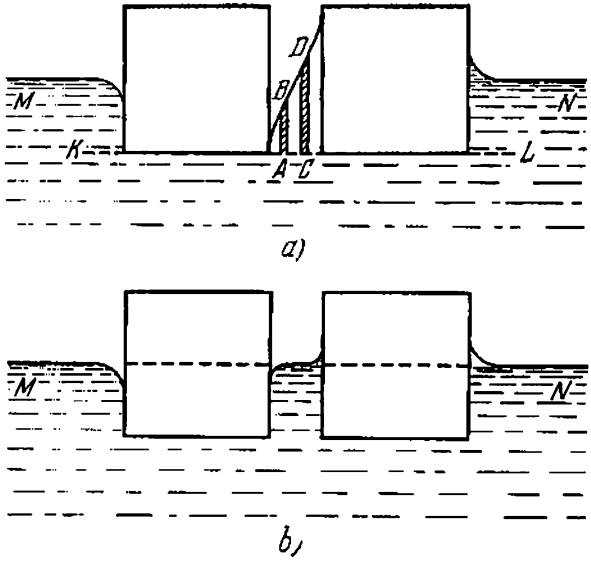


Fig. 413

no puede realizarse. La presión a nivel *KL* deberá ser igual en todos los puntos. En particular, la presión de las columnas *AB* y *CD* de diferentes alturas deberá ser igual. Pero esto es imposible, porque la posición de las columnas puede calcularse, para que su superficie tenga la misma forma. Entonces, la presión adicional de las fuerzas superficiales es única y la presión hidrostática es diferente. Por consiguiente, durante la aproximación de las cerillas, la superficie del agua entre éstas tenderá a la forma horizontal (fig. 413, *b*). En este caso, como se ve de la figura, la presión entre las cerillas a nivel *MN* es igual a la atmosférica. La presión a la izquierda sobre la primera cerilla es igual a la presión atmosférica y más abajo del nivel *MN*. La presión a la derecha sobre la segunda cerilla es menor que la atmosférica por encima del nivel *MN*. Como resultado entre las cerillas tendrá lugar la repulsión.

§ 16. TRANSFORMACIONES MUTUAS DE CUERPOS SOLIDOS Y LIQUIDOS

379. La congelación a cero grados centígrados tendrá lugar solamente en la presencia de los centros de cristalización. Como centro de cristalización pueden servir cualquieras partículas insolubles. Quando la masa de agua es muy grande, en ella siempre hay por lo menos uno de estos centros y esto ya es suficiente para congelar toda el agua. Si la masa de agua está dividida en diminutas gotas, entonces solamente en un número relativamente pequeño de gotas encontraremos tales centros de cristalización y sólo estas gotas se congelarán.

380. La cantidad de calor recibida por el agua y por el hielo por unidad de tiempo es aproximadamente igual, puesto que la diferencia de temperaturas entre el agua y el aire de la habitación es aproximadamente la misma que entre el hielo y el aire de la habitación. Durante 15 minutos el agua recibió 840 J de calor. Por lo tanto, el hielo en 10 horas recibió 33 600 J, de donde $\lambda = 336$ J/g.

381. $v = 2464$ m/s.

382. Las ecuaciones de equilibrio térmico tienen la siguiente forma:

$$Q_1 = m_1 c_1 \Delta t + C \Delta t,$$

$$Q_2 = m_1 c_1 \Delta t/2 + m_1 \lambda + m_1 c_2 \Delta t/2 + C \Delta t,$$

donde m_1 y c_1 son la masa y capacidad calorífica del hielo; C, la capacidad calorífica del calorímetro; c_2, la capacidad calorífica del agua; $\Delta t = 2°$ C. De ahí resulta que

$$c = \frac{Q_1\left(\frac{c_2}{2c_1} + \frac{\lambda}{c_1 \Delta t} + \frac{1}{6}\right) - Q_2}{\frac{c_2}{c_1}\frac{\Delta t}{2} - \frac{\Delta t}{2} + \frac{\lambda}{c_1}} = 630 \text{ J/grad.}$$

383. La cantidad de calor que puede ser desprendido por el agua al enfriarla hasta 0° C es 16 800 J. Para calentar el hielo hasta 0° C hacen falta 50 400 J. Por lo tanto el hielo puede calentarse solamente debido al calor desprendido durante la congelación del agua. Para desprender los 33 600 J que faltan, deberán congelarse 100 g de agua. Como resultado en el calorímetro se forma una mezcla de 500 g de agua y 500 g de hielo que se encuentran a una temperatura de 0° C.

384. La temperatura final de las substancias existentes en el recipiente es $\theta = 0°$ C. La ecuación de equilibrio térmico tiene la siguiente forma:

$$m_1 c_1 (t_1 - \theta) = m_2 c_2 (\theta - t_2) + (m_2 - m_3) \lambda,$$

donde m_1 es la masa incógnita del recipiente y c_2, la capacidad calorífica del hielo. De aquí sigue que

$$m_1 = \frac{m_2 c_2 (\theta - t_2) + (m_2 - m_3) \lambda}{c_1 (t_1 - \theta)} = 200 \text{ g.}$$

385. 1) La masa de hielo m que hallamos puede determinarse de la siguiente ecuación: $m\lambda = Mc(-t)$, de donde $m = 100$ g.
2) La ecuación de equilibrio térmico se escribe en el caso dado de la siguiente manera: $M\lambda = Mc(-t)$, de donde $t = -80°$ C.

386. La temperatura de fusión del hielo por compresión hasta una presión de 1200 atm, disminuye en $\Delta t = 8{,}8°$ C. El hielo se derritirá hasta el momento cuando la congelación alcanza $-8{,}8°$ C. Con esto se absorbe una cantidad de calor $Q = m_1\lambda$, donde m_1 es la masa del hielo derretido y λ, el calor específico de fusión. Basándose en la ecuación de equilibrio térmico, tenemos: $m_1\lambda = mc\,\Delta t$, donde c es la capacidad calorífica del hielo. De ahí recibimos que $m_1 = cm\,\Delta t/\lambda \approx 5{,}6$ g.

§ 17. ELASTICIDAD Y RESISTENCIA

387. $F = SE(R - r)/r = 600$ N.

388. Al calentar la barra de extremos fijos en Δt, en ella surge una fuerza elástica F igual, según la ley de Hooke, a $F = SE\,\Delta l/l = SE\alpha\,\Delta t$, donde E es el módulo de elasticidad del acero y α, el coeficiente de dilatación del acero. Si liberamos paulatinamente uno de los extremos de la barra, entonces su longitud aumentará en $\Delta l = l\alpha\,\Delta t$. En este caso la fuerza disminuirá linealmente desde F hasta cero de modo que su valor medio será igual a $F/2$. El trabajo incógnito es $A = (F/2)\,\Delta l = 1/2\,SEl\alpha^2(\Delta t)^2$.

389. La tensión del hilo es $T = Mg/2 \operatorname{sen}\alpha$. De la ley de Hooke deducimos que $T = (\Delta l/2l)\,ES$. Como $\Delta l = 2(l/\cos\alpha - l)$, entonces

$$T = \frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}\,SE = \frac{Mg}{2\operatorname{sen}\alpha}.$$

Para ángulos pequeños tenemos que $\operatorname{sen}\alpha \approx \alpha$ y $\cos\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2(\alpha/2) \approx 1 - \alpha^2/2$. Teniéndolo en cuenta, obtenemos que $\alpha = \sqrt[3]{Mg/SE}$.

390. La barra calentada en Δt en estado libre se estirará en $\Delta l = l_0\alpha\,\Delta t$, donde l_0 es la longitud inicial de la barra. Para introducir la barra calentada entre las paredes es necesario comprimirla en Δl. Por la ley de Hooke, tenemos que $\Delta l = lF/ES$, de donde $F = ES\alpha\,\Delta t = 1100$ N.

391. Durante el calentamiento de las barras en estado libre, su longitud total aumentará en $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = (\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2)\,\Delta t$. La compresión de las barras en el mismo valor Δl, conducirá a la disminución de las longitudes de las barras en $\Delta l_1'$ y $\Delta l_2'$, siendo $\Delta l_1' + \Delta l_2' = \Delta l$. Para esto hace falta una fuerza

$$F = E_1 S\Delta l_1'/l_1 = E_2 S\Delta l_2'/l_2.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenido hallamos que

$$F = \frac{\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2}{l_1/E_1 + l_2/E_2} S\Delta t.$$

Con esta fuerza las barras actúan la una sobre la otra.

392. Partiendo de los conceptos de simetría, es evidente que el alargamiento de los hilos será igual. Designemos este alargamiento por Δl. De acuerdo con la ley de Hooke, la tensión del hilo de acero es $F_a = (\Delta l/l)\, SE_a$ y de cobre es $F_c = (\Delta l/l)\, SE_c$, de donde concluimos que la relación de las tensiones es igual a la relación de los módulos de elasticidad correspondientes: $F_c/F_a = E_c/E_a = 1/2$. En equilibrio $2F_c + F_a = mg$. Por consiguiente, $F_c = mg/4 = 250$ N y $F_a = 2F_c = 500$ N.

393. Basándose en la ley de Hooke, recibimos

$$F_{h.a} = (\Delta l/l)\, S_{h.a} E_{h.a} \quad \text{y} \quad F_h = (\Delta l/l)\, S_h E_h.$$

De ahí deducimos que $F_{h.a}/F_h = 2$. De este modo, 2/3 del peso recae sobre el hormigón armado y 1/3, sobre el hierro.

394. Bajo la acción de la fuerza de compresión F, el tubo disminuye en $Fl/S_c E_c$ y bajo la acción de la fuerza de extensión F, el perno se alarga en el valor $Fl/S_a E_a$. La suma $Fl/S_a E_a + Fl/S_c E_c$ es igual al desplazamiento de la tuerca a lo largo del perno:

$$Fl/S_a E_a + Fl/S_c F_c = h,$$

de donde:

$$F = \frac{h}{l} \frac{S_a E_a S_c E_c}{S_a E_a + S_c E_c}.$$

395. Como el coeficiente de dilatación térmica del cobre α_c es mayor que el del acero α_a, entonces el aumento de la temperatura provocará la compresión de la placa de cobre y la tracción de las placas de acero. Como consecuencia de la simetría, los alargamientos relativos de todas las tres placas son iguales. Designando por F la fuerza de compresión que actúa sobre la placa de cobre por parte de las dos placas de acero, para el alargamiento relativo de la placa de cobre tendremos que $\Delta l/l = \alpha_c t - F/SE_c$. La placa de cobre actúa sobre la placa de acero con una fuerza de extensión $F/2$. Igualando los alargamientos relativos de las placas, obtenemos que

$$\alpha_c t - \frac{F}{SE_c} = \alpha_a t + \frac{F}{2SE_a},$$

de donde

$$F = \frac{2SE_c E_a (\alpha_c - \alpha_a)\, t}{2E_a + E_c}.$$

396. Durante la rotación del anillo, en éste surge una tensión $T = mv^2/2\pi r$ (véase el problema 209). Para el anillo fino $m = 2\pi rS\rho$, donde S es la sección transversal del anillo. Por lo tanto, $T/S = \rho v^2$. De ahí el valor de la velocidad máxima es $v = \sqrt{T/\rho} \approx 41$ m/s.

397. Primeramente el perno estirado actuará sobre cada tuerca con una fuerza elástica F_0. El peso $P \leqslant F_0$ no tiene condiciones para aumentar la longitud de la parte del perno que se encuentra entre las tuercas y, por consiguiente, para cambiar su extensión. Por eso la fuerza con que actúa la barra sobre la tuerca superior, no cambiará hasta el momento cuando $P \leqslant F_0$. La

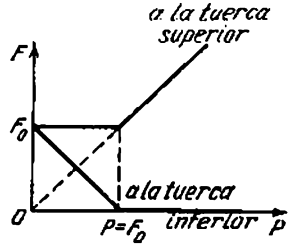


Fig. 414

tuerca inferior se somete a la acción de la fuerza F_0 por parte de la sección superior del perno y a la acción de la fuerza P, por parte de la sección inferior. Como la tuerca se encuentra en equilibrio, la fuerza que actúa sobre ésta por parte de la barra es $F = F_0 - P$. De este modo, la acción del peso $P \leqslant F_0$ se reduce solamente a la disminución de la presión de la tuerca inferior sobre la barra. Para $P > F_0$ la longitud del perno aumentará y la fuerza que actúa sobre la tuerca inferior por parte de la barra desaparecerá. Sobre la tuerca superior actuará la fuerza P. La dependencia de las fuerzas que actúan sobre las tuercas respecto a los valores del peso se muestra en la fig. 414.

§ 18. PROPIEDADES DE LOS VAPORES

398. En el calorímetro se habrá agua y vapor a una temperatura de 100° C.

399. El propio vapor de agua es invisible. Nosotros podemos observar solamente una nube de diminutas gotas que surgen después de la condensación. Al apagar el fuego en un mechero de gas, desaparece el chorro de aire calentado que anteriormente envolvía la tetera. Entonces el vapor de agua que sale de la tetera se enfría y se condensa.

400. Basándose en la ecuación de estado de un gas ideal, tenemos $\rho = m/V = p\mu/RT$. Si expresamos la presión en mm Hg y el

volumen en m^3, entonces $R = \frac{760 \cdot 0,0224}{273}$ mm de Hg·m^3/(K·mol), de donde $\rho = 1,06\ p\ 273/T$. Para las temperaturas próximas a la ambiente, o sea, para $T \approx 290$ K, tendremos que $\rho \approx p$.

401. A primera vista parece que la ecuación de estado de un gas ideal no puede dar valores próximos a los reales para la densidad o el volumen específico de los vapores saturados. Sin embargo esto no tiene lugar. Si calculamos la densidad del vapor por la fórmula $\rho = m/V = \mu p/RT$ y comparamos los valores recibidos con los datos en la tabla I, descubrimos una buena coincidencia.

Esto se explica del modo siguiente. La presión de un gas ideal aumenta directamente proporcional a la temperatura para un volumen constante del gas y por lo tanto, para una densidad constante. La dependencia representada en la fig. 155 de la presión de los vapores saturados en función de la temperatura, corresponde a un volumen constante del vapor saturado y del líquido con que éste se encuentra en equilibrio. Al elevar la temperatura, la densidad del vapor aumenta, ya que una parte del líquido se transforma en vapor. A una pequeña variación del volumen que está ocupado por el vapor, le corresponde un aumento substancial de su masa. La relación entre la presión y la densidad es aproximadamente proporcional a la temperatura como en el caso de un gas ideal.

La ecuación de Clapeyron—Mendeléiev da fundamentalmente la dependencia correcta entre p, V y T para el vapor de agua incluyendo los valores de los parámetros que corresponden al comienzo de la condensación. Pero la ecuación no puede describir el proceso de transformación de un vapor en líquido y en particular indicar para cuales valores de p, V y T comienza esta transición.

402. A 30° C la presión de los vapores saturados es $p = 31,82$ mm Hg. De acuerdo con la ecuación de estado de un gas ideal, tenemos

$$V = \frac{m}{\mu}\frac{RT}{p} \approx 296 \text{ l}.$$

403. Durante el aumento lento de la temperatura la presión de los vapores de agua en el cuarto puede considerarse constante. A la humedad $A_0 = 10\%$ le corresponde la presión de vapores $p = A_0 p_0/(100\%)$, donde $p_0 = 12,79$ mm Hg es la presión de los vapores saturados a 15° C. A una temperatura de 25° C, la presión de los vapores saturados es $p_1 = 23,76$ mm Hg. Por consiguiente, la humedad relativa que buscamos es

$$A = \frac{p}{p_1}\,100\% = \frac{A_0 p_0}{p_1} = 5,4\%.$$

404. Por las condiciones del problema sabemos que la humedad relativa en la calle y en el cuarto es aproximadamente igual a 100%. No obstante, la presión de los vapores saturados de agua en la calle es mucho menor que en el cuarto, ya que la

temperatura del aire en el cuarto es mayor y para la igualdad de las presiones, a cuenta de la salida de los vapores hacia fuera a través de las rejas, es necesario un tiempo considerable. Por eso al abrir la ventanilla los vapores comienzan a salir rápidamente del cuarto y la ropa se secará con más rapidez.

405. 1) Los niveles de agua se igualan como en los vasos comunicantes. Los vapores del agua en el vaso izquierdo se condensan parcialmente y en el derecho, una parte del agua se evaporizará. 2) Los niveles se igualan debido al paso de los vapores de un vaso para el otro. A una temperatura dada, la presión de los vapores condensados es la misma en ambos recipientes junto a la superficie del líquido y disminuye del mismo modo con la altura. Por eso, la presión de los vapores al mismo nivel en los vasos es diferente, lo que conduce al paso del vapor y a su posterior condensación en el vaso, cuyo nivel de agua es menor.

406. A $t_2 = 30°$ C la presión de los vapores se hace igual a la presión p_{20} de los vapores saturados ($p_{20} = 31{,}8$ mm Hg), sólo siendo la presión del aire igual a 10 atm. Durante una disminución isotérmica de la presión del aire en 10 veces su volumen aumenta también 10 veces. Por lo tanto, a una presión atmosférica y temperatura igual a 30° C, la presión del vapor de agua era $p = 3{,}18$ mm Hg. De la ecuación de Clapeyron deducimos que a una temperatura $t_1 = 10°$ C, la presión del vapor es $p_1 = p T_1/T_2$, donde $T_1 = 283$ K y $T_2 = 303$ K. La humedad relativa incógnita es

$$A = \frac{p_1}{p_0} 100\% = \frac{p}{p_0} \frac{T_1}{T_2} 100\% \approx 32{,}6\%,$$

donde $p_0 = 9{,}2$ mm Hg es la presión de los vapores condensados a una temperatura $t_1 = 10°$ C.

407. La presión $p = 6{,}5$ mm Hg es la presión de los vapores de agua saturados a $t = 5°$ C. La caída brusca de la presión confirma que toda el agua se transformó en vapor. El volumen del vapor bombeado hasta la evaporación completa del agua es $V = 3\,600$ l. Basándose en la ecuación de estado de Clapeyron—Mendeléiev, la masa de agua que buscamos es $m = pV\mu/RT \approx 23{,}4$ g.

408. Para calentar el agua hasta 100° C se necesita una cantidad de calor $Q_1 = mc\,\Delta t = 12\,600$ J. Por consiguiente, en la formación de vapor será gastada una cantidad de calor $Q_2 = Q - Q_1 = 11\,600$ J. La cantidad de agua que se transforma en vapor es $m_1 = Q_2/\lambda = 5{,}1$ g. Por la ecuación de estado de un gas ideal esta cantidad de vapor ocupa un volumen $V = (m_1/\mu)\,RT/p$. Prescindiendo de la disminución del volumen ocupado por el agua, hallamos la altura de ascensión del pistón: $h = V/S = 17$ cm.

Capítulo III

Electricidad y magnetismo

§ 19. ELECTROSTATICA

409. $F = q^2/4\pi\varepsilon_0 r^2 = 9\,000$ N. La fuerza es muy grande. Es imposible transmitir al cuerpo de dimensiones pequeñas una carga de un culombio, puesto que las fuerzas electrostáticas de repulsión son tan grandes que la carga no podrá mantenerse en el cuerpo.

410. $F_{gr} = \gamma \frac{m_e m_p}{r^2}$, $F_{el} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r^2}$,

$$F_{gr}/F_{el} = 4{,}5 \cdot 10^{-39}$$

411. Si las cargas tienen el mismo signo, entonces para $\alpha > 2$ la carga puntual se moverá en dirección al punto O; para $\alpha < 2$

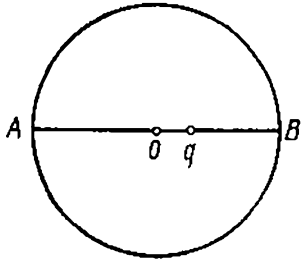


Fig. 415

en dirección al punto B (fig. 415). Si las cargas tienen signos diferentes la dirección del movimiento será inversa.

412. Las condiciones de equilibrio para la esfera colgada están dadas, para ambos casos que estamos analizando, por las ecuaciones:

$$T_1 \operatorname{sen} \alpha_1 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qq}{2a^2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,$$

$$T_1 \cos \alpha_1 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qq}{2a^2} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qq}{2a^2} - mg = 0,$$

$$T_2 \operatorname{sen} \alpha_2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qq}{2a^2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,$$

$$T_2 \cos \alpha_2 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qq}{a^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qq}{2a^2} \frac{\sqrt{2}}{2} - mg = 0,$$

donde T_1 y T_2 son las tensiones del hilo; α_1 y α_2, los ángulos de desviación del hilo; $(+Q)$ y $(-Q)$, las cargas de las esferas fijas; $+q$ es la carga de la esfera colgada; m, la masa de la

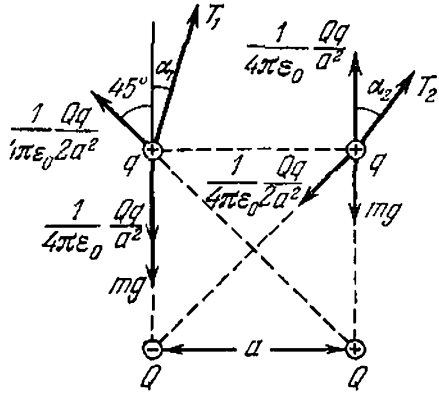


Fig. 416

esfera suspendida (fig. 416). Excluyendo las incógnitas del sistema de ecuaciones dado, recibimos

$$\operatorname{ctg} \alpha_1 - \operatorname{ctg} \alpha_2 = \operatorname{ctg} \alpha_1 - \operatorname{ctg} 2\alpha_2 = 2\,(2\sqrt{2} - 1),$$

de donde obtenemos: $\operatorname{ctg} \alpha_1 = 2\,(2\sqrt{2} - 1) \pm \sqrt{35 - 16\sqrt{2}}$. Por consiguiente,

$$\alpha_1 = 7°56', \quad \alpha_2 = 15°52' \quad \text{para } mg > \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qq}{a^2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right);$$

$$\alpha_1 = 82°04', \quad \alpha_2 = 164°08' \quad \text{para } mg < \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qq}{a^2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right).$$

413. Las cargas negativas inducidas en la superficie del conductor se distribuyen de modo que la intensidad resultante del campo dentro del conductor, creado por una carga puntual positiva y por las cargas negativas inducidas, es igual a cero. (Las cargas positivas inducidas se dirigirán hacia los bordes alejados de la lámina y podemos prescindir de su campo.) Esta distribución de las cargas inducidas no depende del grosor de la lámina. Coloquemos a la izquierda de la lámina, a la misma distancia d, una carga $(-q)$. Es lógico que en la parte izquierda de la lámina las cargas positivas inducidas se distribuyen del mismo modo que las cargas negativas en la parte derecha de la lámina.

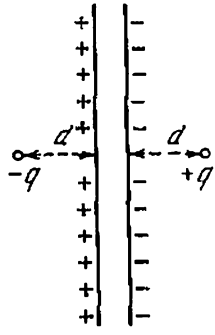


Fig. 417

Como ponemos a la izquierda de la lámina una carga $(-q)$, el campo eléctrico a la derecha de la lámina no cambiará. De este modo el campo eléctrico creado por la carga $(+q)$ y las cargas inducidas negativas a la derecha de la lámina, coincide con el campo creado por las cargas $(+q)$ y $(-q)$ y por las cargas inducidas en las superficies de la lámina (fig. 417). Si el grosor de la lámina es muy pequeño con relación a d, podremos considerar la lámina infinitamente fina y en este caso el campo creado por las cargas inducidas fuera de la lámina no existe. De esta manera demostramos que el campo a la derecha de la lámina, creado por la carga $(+q)$ y por las cargas negativas inducidas, coincide con el campo creado por las cargas puntuales $(+q)$ y $(-q)$. Como en el punto de la situación de la carga $+q$ la intensidad del campo de las cargas negativas inducidas es igual a la intensidad del campo de la carga puntual $-q$, que se encuentra a una distancia $2d$ de $+q$, entonces la fuerza de atracción que buscamos será igual a

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q^2}{4d^2}.$$

414. $T = \pi a\sqrt{\pi\varepsilon_0 ma/Qq}.$

415. Si $Q \gg q$, entonces se puede prescindir de la interacción entre los sectores aislados del anillo. Destaquemos un sector pequeño del anillo de longitud $R\,\Delta\alpha$ (fig. 418). Por parte de la carga Q

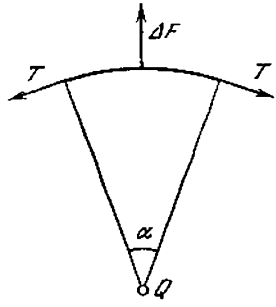


Fig. 418

actúa sobre éste la fuerza

$$\Delta F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q\Delta q}{R^2}, \quad \text{donde } \Delta q = q\Delta\alpha/2\pi.$$

Las fuerzas de tensión del anillo T equilibran a ΔF. De la condición de equilibrio y considerando $\Delta\alpha$ pequeño, podemos escribir

$$\Delta F = 2T \operatorname{sen}(\Delta\alpha/2) \approx T\,\Delta\alpha.$$

La fuerza incógnita es la fuerza de tensión $T = Qq/8\pi^2\varepsilon_0 R^2$.

416. Cuando el hilo se inclina bajo un ángulo φ, sobre la carga q actúa una fuerza F perpendicular a la lámina e igual a

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{4\,[l(1-\cos\varphi)+h]^2}$$

(véase la solución del problema 413). Para pequeños ángulos de desviación tenemos que $l(1-\cos\varphi) \ll h$ y por lo tanto, $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{4h^2}$. En este caso el período de oscilaciones será

$$T = 2\pi\sqrt{l\,\frac{16\pi\varepsilon_0\, mh^2}{q^2}} = \frac{8\pi h}{q^2}\sqrt{\pi\varepsilon_0\, lm}.$$

417. El problema formalmente se reduce a la determinación del período de las pequeñas oscilaciones de un péndulo simple de longitud $\lambda/2$, junto a la posición de equilibrio en el campo de la fuerza qE:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\lambda}{2}\,\frac{m}{qE}} \approx 2\cdot 10^{-12}\,\text{s}.$$

418. Cada carga crea en el punto D un campo de intensidad $E_1 = q/4\pi\varepsilon_0 a^2$. La intensidad resultante será la suma de los tres vectores (fig. 419). La suma de las componentes horizontales de estos vectores es nula, puesto que ellas son iguales en valor

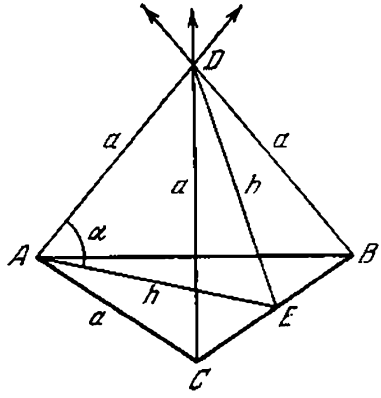


Fig. 419

y forman la una con la otra ángulos iguales a 120°. Los propios vectores forman con la vertical ángulos $90° - \alpha$, donde α es el ángulo entre la arista del tetraedro y la altura h del triángulo ABC. Las componentes verticales son iguales entre sí y cada una es q sen $\alpha/4\pi\varepsilon_0 a^2$. Del ΔADE se ve claramente que sen $\alpha = \sqrt{2/3}$, de donde la intensidad del campo que buscamos es

$$E = \frac{\sqrt{6}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a^2}.$$

419. Analicemos el caso de las cargas de signos contrarios, es decir, $q_1 > 0$, $q_2 < 0$. Las intensidades creadas por las cargas q_1

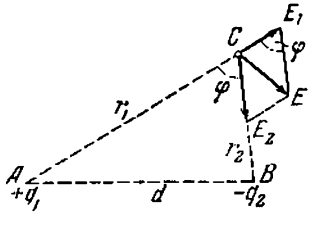


Fig. 420

y q_2 son iguales a $E_1 = q_1/4\pi\varepsilon_0 r_1^2$ y $E_2 = q_2/4\pi\varepsilon_0 r_2^2$, respectivamente. Como vemos en la fig. 420, $E^2 = E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2 \times$

$\times \cos\varphi$. Del ΔABC resulta $\cos\varphi = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1r_2}$. Por consiguiente,

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{q_1^2}{r_1^4} + \frac{q_2^2}{r_2^4} + \frac{q_1q_2}{r_1^2r_2^2}(r_1^2 + r_2^2 - d^2)}.$$

Si las cargas tienen el mismo signo, entonces

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{q_1^2}{r_1^4} + \frac{q_2^2}{r_2^4} + \frac{q_1q_2}{r_1^2r_2^2}(r_1^2 + r_2^2 - d^2)}.$$

420. 1) $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \left[\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r+l)^2}\right] \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p}{r^3}$;

2) $E = \frac{l}{4\pi\varepsilon_0} q \frac{l}{(r^2 + l^2/4)^{3/2}} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}$

(véase la fig. 421).

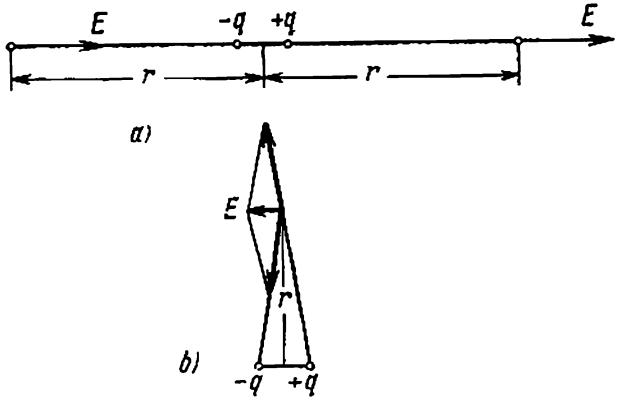


Fig. 421

421. La intensidad del campo E en un punto cualquier A en el eje del anillo puede hallarse como la suma geométrica de las intensidades creadas por pequeños elementos aislados del anillo cargado (fig. 422). Al sumar los vectores de la intensidad en el punto A, es necesario tener en cuenta solamente las componentes dirigidas a lo largo del eje del anillo. Las componentes de los vectores de la intensidad dirigidas perpendicularmente al eje, tendrán en la suma la resultante nula debido a la simo-

tría. Por lo tanto, la intensidad del campo en el punto A es

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2+r^2}\cos\alpha=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qr}{(R^2+r^2)^{3/2}}.$$

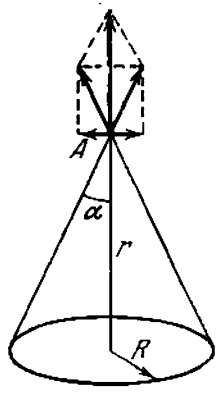


Fig. 422

422. La fuerza que actúa sobre la carga $-q$ es

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQx}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

y estará siempre dirigida al centro del anillo; como $x \ll R$, entonces, despreciando x en el denominador en comparación con R, obtenemos que

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{R^3}x.$$

De este modo la fuerza es proporcional a x y está dirigida al centro del anillo. Bajo la influencia de esta fuerza, la carga realiza un movimiento oscilatorio, cuyo período es $T = 4\pi\sqrt{\pi\varepsilon_0 mR^3/qQ}$.

423. En ambos casos la intensidad del campo eléctrico en un punto alejado en r de la lámina o del hilo, puede depender sólo de σ ó τ y r. La dependencia de σ y τ deberá ser lineal (principio de la superposición), o sea, $E = \sigma f(r)$ ó $E = \tau\varphi(r)$, donde $f(r)$ y $\varphi(r)$ son funciones por ahora desconocidas de r.
Observación. El principio de la superposición en este caso consiste en que la intensidad de la suma de las cargas es igual a la suma de las intensidades creadas por cada carga por separado.
Como sabemos, $[E] = \frac{1}{[\varepsilon_0]}\frac{Q}{L^2}$. Las dimensiones de σ y τ son: $[\sigma] = Q/L^2$ y $[\tau] = Q/L$. Es evidente que en el caso de la lámina $E = k_1\sigma/\varepsilon_0$ y en el caso del hilo $E = k_2\tau/\varepsilon_0 r$, donde k_1

y k_2 son cualesquier coeficientes adimensionales. Basándose en los conceptos de simetría hallamos fácilmente la dirección de la intensidad. La intensidad E está dirigida perpendicularmente a la lámina o al hilo. Teóricamente hallamos los coeficientes k_1 y k_2, cuyos valores son $k_1 = 1/2$ y $k_2 = 1/2\pi$.

424. Debido al pequeño grosor de la lámina podemos considerar que la carga está distribuida uniformemente en ambas superficies, cuyas áreas son iguales a ab. De este modo, la densidad superficial de la carga es $\sigma = q/2\,ab$. El campo dentro del metal será nulo y fuera del metal su intensidad será

$$E = 2\frac{q}{2\varepsilon_0 2ab} = \frac{q}{2\varepsilon_0 ab}.$$

425.
$$E_B = \frac{(Q_1 - Q_2)}{2\varepsilon_0 S}, \quad E_C = \frac{(Q_1 + Q_2)}{2\varepsilon_0 S},$$

$$E_A = -\frac{(Q_1 + Q_2)}{2\varepsilon_0 S}.$$

La intensidad será positiva si está dirigida desde la izquierda hacia la derecha.

426. Separemos en el conductor un pequeño segmento AB de modo que podemos considerarlo plano (fig. 423). En las cercanías de este segmento el campo puede analizarse como la superpo-

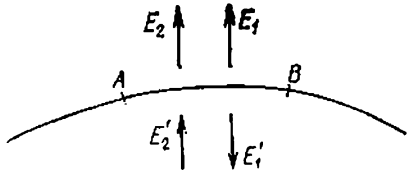


Fig. 423

sición de dos campos: del campo creado por las cargas de este segmento (vectores E_1, E_1') y del campo creado por las demás cargas del conductor (vectores E_2, E_2'). Como el segmento AB puede considerarse plano, entonces $E_1 = E_1' = \sigma/2\varepsilon_0$. Además, como el campo creado por las cargas que se encuentran fuera de los límites del segmento AB, es continuo, entonces $E_2 = E_2'$. Al final, como dentro del conductor no existe campo, entonces $E_1' = E_2'$, de donde, teniendo en cuenta las igualdades anteriores, obtenemos $E_1 = E_2 = \sigma/2\varepsilon_0$. Por lo tanto, la intensidad incógnita será

$$E = E_1 + E_2 = \sigma/2\varepsilon_0 + \sigma/2\varepsilon_0 = \sigma/\varepsilon_0.$$

427. Si $|x| \leqslant a/2$, entonces $E = \rho x/\varepsilon_0$. Si $|x| > a/2$, entonces $E = \rho a/2\varepsilon_0$.

428. Determinemos la intensidad del campo a una distancia $r < R$ del centro de la esfera. Tracemos del centro de la esfera una circunferencia de radio r. Todas las cargas que se encuentran

dentro de la circunferencia, crean en el punto que nos interesa una intensidad tal como si las mismas estuvieran en el centro. La intensidad del campo creado por las cargas que se encuentran fuera de la circunferencia, es nula. De este modo, obtenemos que

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi r^3\rho\frac{1}{r^2}=\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}.$$

Fuera de la esfera ($r > R$) la intensidad será

$$E=Q/4\pi\varepsilon_0 r^2,$$

donde Q es la carga de la esfera. (El gráfico $E = f(r)$, véase en la fig. 424).

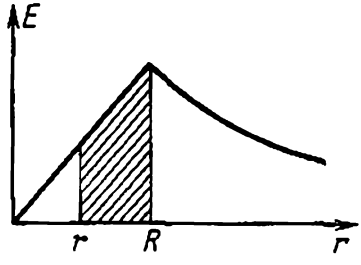


Fig. 424

429. Determinemos la intensidad del campo a una distancia $r < R$ del eje del cilindro. Las cargas que se encuentran dentro del cilindro de radio r crean a una distancia r del eje del cilindro la misma intensidad que crearan si estuvieson en el eje. Las cargas que se encuentran fuera del cilindro no crean campo. Por lo tanto, si $r < R$, entonces

$$E=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}=\frac{\pi r^2\rho}{2\pi\varepsilon_0 r}=\frac{\rho r}{2\varepsilon_0}.$$

Si $r > R$, resulta que

$$E=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}=\frac{\pi R^2\rho}{2\pi\varepsilon_0 r}=\frac{R^2\rho}{2\varepsilon_0 r}.$$

430. $E_A = \rho R_A/3\varepsilon_0 - \rho r/3\varepsilon_0 = \rho a/3\varepsilon_0$. (Véase la fig. 425 y la resolución del problema 428).

431. Véanse las resoluciones de los problemas 430 y 429.

432. La molécula se atraerá por el cilindro cargado. La fuerza de atracción es

$$F=\frac{\tau q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r+\lambda}\right)=\frac{\tau q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r(r+\lambda)}.$$

En esta expresión nosotros podemos prescindir del valor λ ($\lambda \sim 10^{-8}$ cm) en comparación con r (r no puede ser menor que el radio del cilindro). Por fin, para F recibimos la expresión:

$$F = \tau q\lambda / 2\pi\varepsilon_0 r^2.$$

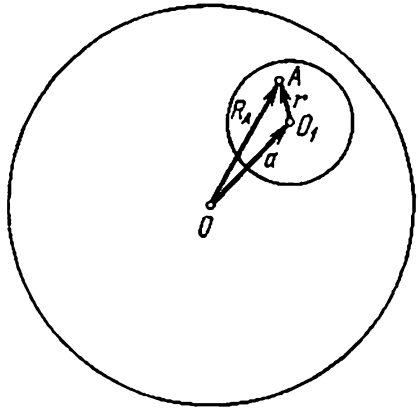


Fig. 425

433. Primeramente las fuerzas que actúan sobre ambas moléculas son iguales. Al aproximarse al cilindro, la fuerza F_1 que actúa sobre la molécula con un momento eléctrico constante crece proporcionalmente a $1/r^2$: $F_1 = 2\varkappa q\lambda/r^2$ (véase el problema 432). La fuerza F_2 que actúa sobre la molécula «elástica», crece con más rapidez proporcionalmente a $1/r^3$ (a cuenta del aumento continuo del momento eléctrico de esta molécula). Las masas de las moléculas son iguales y por eso la aceleración de la segunda molécula al aproximarse al cilindro, aumentará con mayor rapidez que de la primera y ella alcanzará más rápido la superficie del cilindro.

434. Teniendo en cuenta que a y b son mucho más grandes que c y d podemos representar la lámina infinitamente grande. Considerando que la intensidad del campo de algunas cargas es igual a la suma de las intensidades creadas por cada una de estas cargas y utilizando las soluciones de los problemas 413 y 424, recibimos el valor de la fuerza incógnita:

$$F = \frac{qQ}{2\varepsilon_0 ab} - \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 d^2}.$$

El primer sumando corresponde a la fuerza de repulsión, el segundo, a la fuerza de atracción. La lámina cargada positivamente atraerá una carga puntual positiva, si $Q^2/16\pi\varepsilon_0 d^2 > qQ/2\varepsilon_0 ab$, o sea, si $Q/d^2 > 8\pi q/ab$.

435. Fuera de la esfera el potencial es $\varphi = Q/4\pi\varepsilon_0 r = R^3\rho/3\varepsilon_0 r$. Para determinar el potencial dentro de la esfera (siendo $r < R$) hace falta adicionar al potencial $\varphi = Q/4\pi\varepsilon_0 R$ un valor numéricamente igual al trabajo realizado por el campo sobre una carga unitaria positiva durante su desplazamiento radial desde r hasta R. Esto trabajo es igual al área sombreada en la fig. 424 (véase el problema 428). Calculando, obtenemos que $\varphi = (3R^2 - r^2)\rho/6\varepsilon_0$.

436. Todos los puntos de la esfera tienen el mismo potencial. Para resolver el problema es suficiente hallar el potencial de un punto. Es más cómodo determinar el potencial del centro de la esfera que es igual al potencial creado en el centro de la esfera por una carga puntual $\varphi = q/4\pi\varepsilon_0 d$ más el potencial creado por las cargas que surgen en la superficie de la esfera debido a la inducción electrostática. Pero este último potencial es nulo, puesto que la carga resultante en la esfera es nula y todos los elementos de la carga se encuentran a igual distancia del centro. Por consiguiente, el potencial de la esfera es $\varphi = q/4\pi\varepsilon_0 d$.

437. El potencial de la esfera φ es igual a

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{R+r} - \frac{Q}{r}\right)$$

Como la esfera está puesta a tierra, su potencial es nulo, es decir, $q/(R+r) - Q/r = 0$. Por lo tanto, $Q = \frac{r}{R+r}q$.

438. En la parte más estrecha del tubo surgirán cargas inducidas positivas. Bajo la acción de estas cargas, el electrón comenzará a acelerarse. La energía cinética del electrón aumentará debido a la disminución de la energía potencial del sistema electrón—tubo.

439. $$q = -Q\frac{R_3 - R_2}{R_3 - R_1}\frac{R_1}{R_2}.$$

440. Para el equilibrio de la carga q hace falta que las cargas $(-Q)$ se encuentren a iguales distancias a de ella (fig. 426). La suma de las fuerzas que actúan sobre la carga $(-Q)$ también es nula:

$$Q^2/4a^2 - Qq/a^2 = 0.$$

De ahí $q = Q/4$. La distancia a puede ser cualquiera. El equilibrio es inestable, puesto que durante el movimiento de la carga $-Q$ a lo largo de OO' en el segmento x de la carga q, la fuerza de atracción $F_q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{4(a+x)^2}$ que actúa por parte de la carga q es menor que la fuerza de repulsión:

$$F_Q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{(2a+x)^2}$$

y la carga $(-Q)$ irá aún más lejos de la posición de equilibrio. Al desplazarse la carga $-Q$ a lo largo de OO_1 a la distancia x en dirección a la carga q, $F_q > F_Q$ para $x \leqslant a$ y el sistema no vuelve a la posición de equilibrio. El equilibrio también

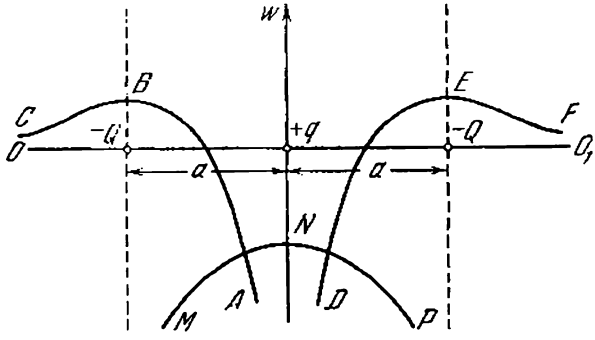


Fig. 426

se perturba, como se ve fácilmente, por el desplazamiento arbitrario de la carga q.

La energía potencial de la carga $-Q$ en el campo de otras dos cargas es

$$W_1 = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{y} - \frac{Q}{a+y}\right) = \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0}\,\frac{3y-a}{y(a+y)},$$

donde y es la distancia entre la carga q y una de las cargas $-Q$. La dependencia de W_1 con relación a y, siendo $0 \leqslant y \leqslant \infty$, se da por la curva ABC para una carga y por la curva DEF para otra carga (fig. 426).

La energía de la carga q, estando las cargas $-Q$ inmóviles, es

$$W_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-Q}{a-z} - \frac{Q}{a+z}\right) = -\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\,\frac{a}{a^2-z^2}$$

donde z es el desplazamiento de la carga q de la posición de equilibrio. Al variar z desde 0 hasta a, la energía cambia de acuerdo con la curva MNP (fig. 426).

Es característico que los máximos de todas las tres curvas potenciales corresponden a la posición de las cargas en equilibrio. Precisamente con esto está relacionada la inestabilidad del equilibrio.

441. No, no se podrá. A fin que una carga positiva se encuentre en estado de equilibrio estable es preciso que en el desplazamiento de la carga en dirección cualquiera, actúe sobre ésta una fuerza con que la carga vuelva al estado de equilibrio. Por consiguiente, las líneas de fuerza del campo eléctrico se convergerán en el punto donde está situada la carga. Pero las líneas de fuerza del campo eléctrico comienzan en las cargas

positivas y terminan en las cargas negativas. En el punto donde se encuentra la carga que analizamos, no existen cargas negativas y por lo tanto, las líneas de fuerza del campo exterior respecto a la carga del campo no pueden convergerse en el punto donde ella se encuentra.

442. La energía de la esfera cargada es igual al trabajo que pueden realizar las cargas que se encuentran en la esfera, si ellas abandonan la esfera alejándose infinitamente. Supongamos que de la esfera cada vez se aparte al infinito una porción de carga de q unidades ($q \ll Q$). Al alejarse la enésima porción, la carga de la esfera se hará $(Q - nq)$ y el campo eléctrico realizará un trabajo igual a

$$\Delta A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(Q-nq)}{R} q.$$

El trabajo realizado en el desplazamiento de N porciones de la carga, donde $N = Q/q$ es

$$A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{Q-q}{R} q + \frac{Q-2q}{R} q + \frac{Q-3q}{R} q + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{Q-Nq}{R} q \right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{Q^2}{2R} \left(1 - \frac{1}{N}\right) \right].$$

Siendo $N \to \infty$ $(q \to 0)$ $A = Q^2/8\pi\varepsilon_0 R$. Por lo tanto la energía de la esfera cargada es $W = Q^2/8\pi\varepsilon_0 R$. (Esta energía se denomina energía propia.) El mismo resultado puede obtenerse utilizando el gráfico de variación del potencial de la esfera con la disminución de la carga. El gráfico tendrá la forma de una línea recta que forma un ángulo cualquier con el eje de las abscisas y el trabajo será numéricamente igual al área limitada por el gráfico y por los ejes de las coordenadas.

443. La energía de todo el sistema de cargas es igual a la suma de las energías propias de las cargas que se encuentran en la primera esfera $(W_1 = Q_1^2/8\pi\varepsilon_0 R_1)$ y en la segunda esfera $(W_2 = Q_2^2/8\pi\varepsilon_0 R_2)$, así como de la energía de interacción de las cargas de la primera esfera con las cargas de la segunda. La energía de interacción es igual al producto de la carga Q_2 por el potencial creado en la superficie de la esfera de radio R_2 por la carga Q_1. De este modo, la energía incógnita W de todo el sistema es

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{Q_1^2}{2R_1} + \frac{Q_2^2}{2R_2} + Q_2 \left(\frac{Q_1}{R_2} \right) \right].$$

En el caso, cuando $Q_1 = -Q_2 = Q$ (condensador esférico), tenemos

$$W = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

444. $$W=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1^2}{2r_1}+\frac{q_2^2}{2r_2}+\ldots+\frac{q_n^2}{2r_n}+q^2\left(\frac{q_1}{r_2}\right)+\right.$$
$$\left.+q_3\left(\frac{q_1+q_2}{r_3}\right)+\ldots q_n\left(\frac{q_1+q_2+\ldots+q_{n-1}}{r_n}\right)\right].$$

445. Como siempre consideramos el potencial en el infinito igual a cero. Entonces los potenciales de las láminas serán iguales, respectivamente, a $+U/2$ y $-U/2$, siendo $U=Q/C$. Los potenciales en los puntos de la posición inicial del electrón son iguales, respectivamente, a 0, $+U/4$, $-U/4$. Los valores iniciales de la energía total del electrón son

$$1)\ \frac{mv_0^2}{2},\quad 2)\ \frac{mv_0^2}{2}-\frac{eU}{4},\quad 3)\ \frac{mv_0^2}{2}+\frac{eU}{4}.$$

Las velocidades finales v_1, v_2, v_3 se hallan, aplicando el principio de conservación de la energía:

$$1)\quad \frac{mv_0^2}{2}=\frac{mv_1^2}{2},\quad v_1=v_0;$$

$$2)\quad \frac{mv_0^2}{2}-\frac{eU}{4}=\frac{mv_2^2}{2},\quad v_2=\sqrt{\frac{mv_0^2-eQ/2C}{m}};$$

$$3)\quad \frac{mv_0^2}{2}+\frac{eU}{4}=\frac{mv_3^2}{2},\quad v_3=\sqrt{\frac{mv_0^2+eQ/2C}{m}}.$$

En el primer caso, la velocidad final es igual a la velocidad inicial, en el segundo caso, es menor que la velocidad inicial y en el tercer caso, es mayor que la inicial. En todos los casos, la velocidad primero aumenta (durante el movimiento dentro del condensador) y después comienza a disminuir.

446. La distancia entre las cargas se hará mínima en el momento cuando sus velocidades se hacen iguales, es decir, en el momento cuando la velocidad relativa de las cargas es nula. Es evidente que la velocidad de las cargas a distancia mínima entre ellas, de acuerdo con el principio de conservación del impulso, es igual a $v=(m_1v_1-m_2v_2)/(m_1+m_2)$. Valiéndose del principio de conservación de la energía, podemos escribir que

$$\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2}+\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0r_1}=\frac{(m_1+m_2)\,v^2}{2}+\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0r_2},$$

y hallamos la distancia mínima r_2 entre las cargas

$$r_2=\frac{r_1}{1+\dfrac{2\pi\varepsilon_0m_1m_2}{(m_1+m_2)}\,\dfrac{(v_1+v_2)^2}{q_1q_2}r_1}.$$

447. La energía de interacción es igual a la mitad de la energía de interacción de dos cargas puntuales $+q$ y $-q$, que se encuentran a una distancia $2d$, o sea,

$$W=-1/2q^2/8\pi\varepsilon_0d=-q^2/16\pi\varepsilon_0d.$$

La velocidad se halla del principio de conservación de la energía. Cuando la carga se encuentra a una distancia infinitamente grande de la lámina, su velocidad es nula y la energía de interacción W también es nula. De esto modo, tenemos

$$\frac{mv^2}{2}+\left(-\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 d}\right)=\frac{mv_0^2}{2}+\left(-\frac{q^2}{\infty}\right),$$

$$v=\sqrt{\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 md}}.$$

448. El trabajo para el movimiento de la carga $-q$ es proporcional a la diferencia de potencial entre el punto O y el punto A que se encuentra en el eje del anillo a una distancia muy grande del eje (fig. 160). El potencial en el infinito es nulo. El potencial del punto A, si la distancia $OA \gg R$, podremos considerar igual a cero. El potencial en el punto O se halla por la suma de los potenciales creados por pequeñas secciones parciales del anillo:

$$\varphi_0=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum\frac{\Delta q}{R}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Utilizando el principio de conservación de la energía $mv^2/2 = q^2/4\pi\varepsilon_0 R$, hallamos que $v = \sqrt{q^2/2\pi\varepsilon_0 mR}$.

449. La energía total de la carga es $W = mv^2/2 - qQ/4\pi\varepsilon_0 R$. Si $W \geqslant 0$, la carga se alejará hacia el infinito. Si $W = 0$, la velocidad de la carga, a una distancia infinitamente grande del centro del anillo, será nula y si $W > 0$ ella será diferente de cero. Si $W < 0$, entonces la carga realizará un movimiento periódico a lo largo del eje del anillo. La mayor distancia r, a la que podrá desplazarse la carga del centro del anillo, puede hallarse basándose en el principio de conservación de la energía

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R}=-\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+r^2}},$$

$$r=R\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{2\pi\varepsilon_0 mv^2R}{qQ}-1\right)^2}-1}.$$

450. La energía de la esfera cargada es $W = Q^2/8\pi\varepsilon_0 R = 2\pi\varepsilon_0 R\varphi^2$, donde R es el radio de la esfera y φ, su potencial. Durante la descarga esta energía se desprenderá en forma de calor. Calculando, hallamos que $W = 0{,}55$ J.

451. Supongamos que primeramente las cargas de las esferas eran q_1 y q_2. Entonces, el trabajo es $A_1 = q_1q_2/4\pi\varepsilon_0 l$, donde l es la distancia entre las esferas. Las cargas de las esferas, después de ser unidas, se hacen iguales a $q = (q_1 + q_2)/2$ y el trabajo es $A_2 = (q_1 + q_2)^2/16\pi\varepsilon_0 l$. No es difícil verificar que $A_2 > A_1$. Además, en el conductor que une las cargas, se desprende una cantidad de calor Q. No obstante, la reserva total de energía

de las esferas, según el principio de conservación de la energía, deberá ser igual en ambos casos. Como el trabajo A_1 y, respectivamente, A_2 representa la energía potencial de la segunda esfera en el campo de la primera (en el primero y segundo casos), entonces tenemos que

$A_1 + W_1 = A_2 + Q + W_2$, donde $W_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1^2}{2r} + \frac{q_2^2}{2r}\right)$ es la energía propia de las esferas hasta el momento de la unión; $W_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q^2}{2r} + \frac{q^2}{2r}\right)$, la energía propia de las esferas después de la redistribución de las cargas (véase el problema 442). La energía que se desprende en forma de calor es

$$Q = W_1 - W_2 + A_1 - A_2 = \frac{(q_1 - q_2)^2}{16\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{l}\right).$$

452. Supongamos que el radio de la envoltura aumente en δ, donde δ es un valor infinitamente pequeño. Entonces, la fuerza de extensión realizará un trabajo $A = 4\pi R^2 f\delta$, donde f es la fuerza que actúa por unidad de área. Este trabajo se realiza gracias a la disminución de la energía electrostática. En el comienzo la energía electrostática es $Q^2/8\pi\varepsilon_0 R$; después de la extensión ella es: $Q^2/8\pi\varepsilon_0 (R + \delta)$. La variación de la energía será

$$\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} - \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 (R+\delta)} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\,\frac{\delta}{R(R+\delta)}$$

y es igual al trabajo A, o sea, $4\pi R^2 f\delta = Q^2\delta/8\pi\varepsilon_0 R\,(R + \delta)$. Teniendo en cuenta que el valor δ es infinitamente pequeño,

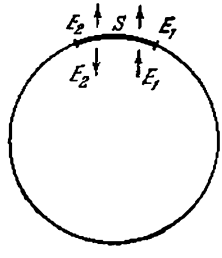


Fig. 427

obtenemos para la fuerza la expresión siguiente: $f = Q^2/32\pi^2\varepsilon_0 R^4 = \sigma^2/2\varepsilon_0$, donde $\sigma = Q/4\pi R^2$ designa la densidad de electricidad, es decir, la carga existente en unidad de área.

Podemos también hallar directamente la fuerza incógnita. Examinemos en la esfera una pequeña área S (fig. 427). Determinemos la intensidad E_1 del campo eléctrico en el área que

estamos analizando, creada por todas las cargas salvo las cargas que se encuentran en la propia área. Para determinarla, analicemos el caso cuando la esfera tiene carga positiva. Designemos por E_2 la intensidad del campo eléctrico creado por las cargas que se encuentran en el área examinada. Como dentro de la esfera la intensidad resultante es nula, entonces $E_1 = E_2$. La intensidad resultante en la esfera es $E_1 + E_2 = Q/4\pi\varepsilon_0 R^2$. Por lo tanto, $2E_1 = Q/4\pi\varepsilon_0 R^2 = \sigma/\varepsilon_0$, de donde $E_1 = \sigma/2\varepsilon_0$. Para hallar la fuerza con que todas las cargas que se encuentran fuera de los límites del área, actúan sobre las cargas que se encuentran en el área, es necesario multiplicar la intensidad E_1 por el valor de la carga eléctrica del área σS: $F = E_1\sigma S = \sigma^2 S/2\varepsilon_0$. La fuerza que actúa sobre la unidad de área será igual a $f = \sigma^2/2\varepsilon_0$.

453. $Q < 8\pi R\sqrt{\varepsilon_0 R\sigma}$.

454. Supongamos que la diferencia de potencial en los terminales de la batería sea U y la carga de la batería sea Q. Determinar la capacidad de la batería significa determinar la capacidad

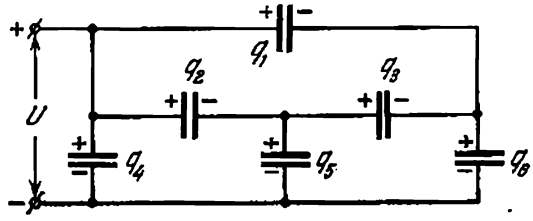


Fig. 428

de un condensador que tenga una tensión U para la misma carga Q en las placas como tiene lugar en la batería. Por consiguiente, $C_0 = Q/U$, siendo $Q = q_1 + q_2 + q_4 = q_4 + q_5 + q_6$ (fig. 428), y $U = U_4 = q_4/C$. El trabajo de las fuerzas del campo electrostático en el paso por el circuito cerrado es nulo; de ahí recibimos que

$$q_1/C - q_2/C - q_3/C = 0, \quad q_2/C - q_4/C + q_5/C = 0,$$
$$q_3/C - q_5/C + q_7/C = 0.$$

Además, el conductor que une el segundo, tercero y quinto condensadores es eléctricamente neutro. Por lo tanto, $q_3 + q_5 - q_2 = 0$. Resolviendo estas ecuaciones, obtenemos que $q_1 = q_2 = q_5 = q_6 = q_4/2$, $q_3 = 0$ y finalmente $C_0 = 2C$.

455. Supongamos que la batería de los condensadores esté cargada. Entonces, los puntos *1*, *2* y *3* tendrán el mismo potencial y podemos unirlos entre sí. Del mismo modo, podremos unir los puntos *4*, *5*, *6* (fig. 162). Como resultado, recibimos un circuito

equivalente al que se muestra en la fig. 429. La capacidad de los sectores del circuito es $3C$, $6C$, $3C$. La capacidad total se halla de la fórmula: $1/C_0 = 2/3C + 1/6C$, de donde $C_0 = 1{,}2C$.

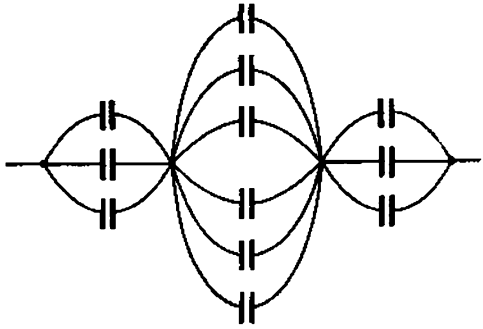


Fig. 429

456. Cuando tiene lugar la descarga en los espacios disruptivos, surge automáticamente la conexión en serie de los condensadores que estaban unidos en paralelo. Entonces la tensión entre las armaduras correspondientes de los condensadores aumenta, puesto que la capacidad del sistema disminuye. En efecto, debido a la gran resistencia de los conductores AB y CD, puede prescindirse de las corrientes que pasan por éstos durante la descarga y analizarlas como aisladores a través de los cuales los condensadores no se descargan.

El circuito equivalente, después de la descarga del primer espacio disruptivo, se representa en la fig. 430. Gracias a la

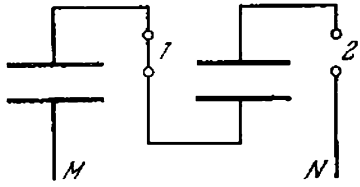


Fig. 430

descarga del primer espacio, la diferencia de potencial en el segundo será igual a la suma de las tensiones en el primero y segundo condensadores, es decir, se duplicará. Como consecuencia de esto, comienza la descarga del segundo espacio. En el momento de descarga del enésimo espacio, la tensión en éste tendrá un valor $V = nV_0$. Las resistencias de los conductores AB y CD deberán ser grandes para que en el momento de la conexión en serie de las placas de los condensadores,

durante la descarga de los espacios, los condensadores no se descarguen a través de estos conductores.

457. Sí, se descargará. Cada una de las placas posee una determinada capacidad, por lo general no muy grande, respecto a la tierra (en las cercanías de los bordes de las placas, las líneas de fuerza cambian la dirección y alcanzan la tierra). El circuito equivalente se da en la fig. 431. La capacidad de las

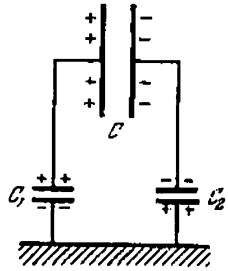


Fig. 431

placas del condensador respecto a la tierra, se representa en forma de las pequeñas capacidades C_1 y C_2. Al cerrar la placa izquierda se neutraliza la parte de la carga que se encuentra en ésta. Lo mismo sucede al cerrar la placa derecha. El condensador se descargará tanto más lento cuanto mayor sea su capacidad en comparación con la capacidad de la placa respecto a la tierra.

458. La energía total de dos condensadores hasta el momento de unión es

$$W_0 = \frac{1}{2}(C_1U_1^2 + C_2U_2^2).$$

después de la unión es

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{(C_1+C_2)} = \frac{1}{2}\frac{(C_1U_1+C_2U_2)^2}{C_1+C_2}.$$

Se ve fácilmente que $W_0 > W$. La diferencia de energías es

$$W_0 - W = \frac{C_1C_2}{2(C_1+C_2)}(U_1^2+U_2^2-2U_1U_2) > 0$$

si $U_1 = U_2$, $W_0 - W = 0$ y si $C_1 = C_2$ y $U_2 = 0$, $W_0 = 2W$. La energía electrostática disminuyó debido a que, durante la conexión de estos condensadores mediante los conductores, las cargas pasaban de un condensador al otro. En los conductores que unen los condensadores se desprendió el calor. La

cantidad de calor desprendido no depende de la resistencia de los hilos de conexión. Siendo pequeña la resistencia de los hilos, en ellos pasan grandes corrientes e inversamente.

459. Analicemos para mayor simplicidad un dieléctrico en forma de paralelepípedo homogéneo fuertemente estirado (fig. 432). Descomponemos el campo E_0 donde se encuentra el dieléctrico, en componentes dirigidas a lo largo de la barra y perpendicularmente a ésta. Estas componentes provocan el surgimiento de cargas unidas en las superficies AB, CD, BC y AD. El campo

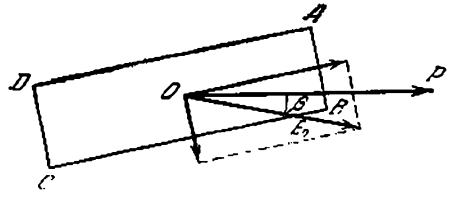


Fig. 432

de estas cargas unidas entre las superficies AD, BC y AB, DC, debilita las componentes del campo E_0 dentro del dieléctrico, teniendo en cuenta que la componente perpendicular a la barra se debilita más, porque las cargas unidas en las superficies AD y BC están distribuidas la una cerca de la otra y su campo es semejante al campo homogéneo de un condensador plano, al mismo tiempo que las cargas situadas en las superficies de pequeña área, se encuentran lejos la una de la otra. Por eso, el campo resultante dentro del dieléctrico no tendrá la misma dirección que el campo E_0. Por consiguiente, los dipolos creados estarán orientados no a lo largo de E_0, sino a lo largo de cierta dirección OP que forma un ángulo β con E_0. (Esto se refiere tanto a las moléculas comunes como a las dipolares.) Lo que se refiere a las propiedades eléctricas, el dieléctrico polarizado puede considerarse como un gran dipolo que forma un ángulo β con el campo E_0. En este campo él girará hasta el momento cuando pare a lo largo del campo. El campo de las cargas unidas es una fuerza interior y no puede provocar la rotación del dieléctrico.

460. Gracias a la polarización, las cargas se repelerán. Dentro de la esfera con el centro O' existen cargas negativas y con el centro O, cargas positivas. La densidad cúbica de las cargas es $\rho = Nq$. La distancia entre los centros O' y O es l. La intensidad en cualquier punto que se encuentra en la región de superposición entre las dos esferas, puede hallarse a través de una simple construcción geométrica representada en la fig. 433. De esta construcción se deduce que la intensidad es $E = \rho l/3\varepsilon_0$. Ella es constante y dirigida en sentido opuesto al vector p. Este campo homogéneo está, en realidad, creado por las cargas

negativas y positivas que se encuentran fuera de la región de superposición. Como $l \approx 10^{-8}$ cm ($l \gg R$), entonces podemos considerar que este campo se crea por las cargas superficiales, cuya densidad es

$$\sigma = Nql \cos\theta = Np \cos\theta.$$

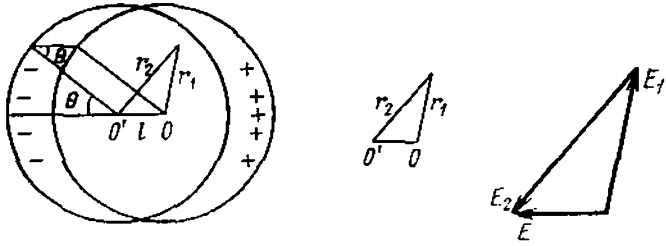


Fig. 433

461. No es difícil verificar que el dieléctrico estará polarizado de modo homogéneo y que el momento dipolar p de cualquier molécula estará dirigido a lo largo del campo exterior. El campo resultante dentro del dieléctrico tiene una intensidad $E' = E - Np/3\varepsilon_0$. Como $p = \alpha\varepsilon_0 E'$, donde α es el coeficiente de polarización de la molécula, entonces $p = \alpha\varepsilon_0 E/(1 + N\alpha/3)$, $E' = E/(1 + \alpha N/3)$. Si consideramos $\varepsilon = 1 + N\alpha$, recibimos finalmente para E' una expresión de la forma siguiente:

$$E' = \frac{3}{2+\varepsilon} E.$$

El campo fuera de la esfera, creado por el dieléctrico polarizado, es equivalente al campo de dos cargas puntuales ($-Q$) y ($+Q$) ($Q = 4/3\pi R^3 Nq$), situadas en los puntos O' y O. Como la distancia $O'O = l \ll R$ ($l \approx 10^{-8}$ cm), entonces para el cálculo de la intensidad resultante en los puntos A, B, C y D, puede utilizarse la respuesta del problema **420**:

$$E_A = E_C = E + \frac{2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\,\frac{4}{3}\,\pi R^3 Nql = \frac{3}{\varepsilon+2}\,E,$$

$$E_B = E_D = E - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\,\frac{4}{3}\,\pi R^3 Nql = \frac{3}{\varepsilon+2}\,E.$$

462. La densidad superficial de cargas cambia en la esfera según la ley $\sigma = 3E\varepsilon_0 \cos\theta$, donde θ es el ángulo entre el radio vector y el vector ($-$E).

463. $$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} + 3\varepsilon_0 E \cos\theta,$$

$$\sigma_0 = Np = 3\varepsilon_0 E,$$

$$E_A = E_C = E + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} + \frac{2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\,\frac{4}{3}\,\pi R^3 Np = 3E + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2},$$

$$E_B = E_D = E + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} - \frac{3\varepsilon_0 E}{3\varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

464. $$\mathbf{E} = -N\mathbf{p}/2\varepsilon_0.$$

465. $$\mathbf{E}' = \frac{2}{\varepsilon+1}\,\mathbf{E},$$

$$E_A - E_C = E + \frac{R^2 Nq}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+\lambda}\right) =$$

$$= E + R^2\,\frac{Nq\lambda}{2\varepsilon_0}\,\frac{1}{R(R+\lambda)} = E + \frac{Np}{2\varepsilon_0},$$

$$Np = (\varepsilon - 1)\,\varepsilon_0 E' = 2\,\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\,\varepsilon_0 E,$$

$$E_A = E_C = E + \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\,E = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon+1}\,E,$$

$$E_B = E_D = E - \frac{2\pi R^2 Nq\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = E - \frac{Np}{2\varepsilon_0} =$$

$$= E - (\varepsilon - 1)\,\frac{E}{\varepsilon+1} = \frac{2}{\varepsilon+1}\,E.$$

466. $$\sigma = 2\varepsilon_0 E\cos\theta + \varkappa/2\pi R,$$

$$E_A = E_C = \varkappa/2\pi\varepsilon_0 R + 2E, \qquad E_B = E_D = \varkappa/2\pi\varepsilon_0 R.$$

467. El campo en el dieléctrico se crea mediante la carga q y la carga de polarización q'. La intensidad del campo en cualquier punto A que se encuentra fuera de la esfera a una distancia r de su centro, es

$$E = \left(\frac{q}{r^2} - \frac{q'}{r^2}\right)\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.$$

La intensidad E está unida a la intensidad E_0 del campo creado en el vacío por la carga q mediante la relación:

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon} = \frac{q}{\varepsilon r^2}\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r^2} - \frac{q'}{r^2}\right) = \frac{q}{\varepsilon r^2}\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0};$$

de donde resulta que $q' = \dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\,q$.

468. Designemos por q el valor de las cargas de polarización. Aplicando el principio de superposición, obtenemos, si $r > r_2$:

$$E = \left[\left(\frac{Q}{r^2}\right) + \left(\frac{-q}{r^2}\right) + \frac{q}{r^2}\right]\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

$$\varphi = \left(\frac{Q}{r} - \frac{q}{r} + \frac{q}{r}\right)\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Si $r_1 < r < r_2$, entonces

$$E = \left(\frac{Q}{r^2} - \frac{q}{r^2}\right)\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}, \qquad (1)$$

$$\varphi = \left(\frac{Q}{r} - \frac{q}{r} + \frac{q}{r^2}\right)\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.$$

De la ecuación (1) deducimos que $q = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} Q$. Por consiguiente, en la región $r_1 < r < r_2$, tendremos

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{\varepsilon r} + \frac{Q(\varepsilon - 1)}{\varepsilon r_2}\right].$$

Si $r < r_1$, entonces

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

$$\varphi = \left(\frac{Q}{r} - \frac{q}{r_1} + \frac{q}{r_2}\right)\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{r} + \frac{Q(\varepsilon - 1)}{\varepsilon}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)\right].$$

469. La intensidad del campo en el espacio entre las esferas es

$$E = \frac{Q}{\varepsilon r^2 4\pi\varepsilon_0} = \left(\frac{Q}{r^2} - \frac{q}{r^2}\right)\frac{1}{4\pi\varepsilon_0},$$

de donde $q = Q(\varepsilon - 1)/\varepsilon$. Por consiguiente, la densidad será

$$\sigma_1 = -\frac{Q(\varepsilon - 1)}{4\pi r_1^2 \varepsilon}, \qquad \sigma_2 = \frac{Q(\varepsilon - 1)}{4\pi r_2^2 \varepsilon}.$$

No existe campo fuera de la esfera: $E = 0$; $\varphi = 0$. El potencial φ en la región $r_1 < r < r_2$ es igual a

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r} - \frac{q}{r}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r}.$$

De la última expresión hallamos fácilmente la diferencia de potencial de las esferas:

$$\Delta\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\varepsilon}\frac{(r_2 - r_1)}{r_1 r_2}.$$

Por consiguiente, la capacidad que es el coeficiente de proporcionalidad entre la carga y la diferencia de potencial de las armaduras del conductor es

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}.$$

470. a) La capacidad del conductor será igual a la capacidad de los condensadores conectados en paralelo, uno de los cuales está lleno de dieléctrico y el otro no, es decir,

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S l_1}{dl} + \frac{S(l - l_1)\varepsilon_0}{dl} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}\left\{1 + (\varepsilon - 1)\frac{l_1}{l}\right\}.$$

b) El campo eléctrico entre las armaduras del condensador no cambiará y por lo tanto no cambiará la capacidad si la superficie superior del dieléctrico estará cubierta con una capa infinitamente fina de un conductor. Por eso la capacidad incógnita será igual a la capacidad de dos condensadores conectados en serie:

$$C = \frac{C_0 C_1}{C_0 + C_1}, \quad \text{donde } C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d - d_1} \text{ y } C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d_1}$$

Por consiguiente

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d_1 + \varepsilon(d - d_1)}$$

471. La densidad de las cargas de polarización σ es

$$\sigma = 2\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}\frac{q}{S}.$$

472. Designemos por E la intensidad total del campo que hallamos en el dieléctrico. La distancia λ en que se repelen las cargas en cada molécula, se determina de la relación $k\lambda = qE$. Por consiguiente,

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{q\lambda n}{\varepsilon_0} = \frac{q^2 n}{\varepsilon_0 k} E,$$

$$E = E_0 - E_1 = E_0 - \frac{q^2 n}{\varepsilon_0 k} E.$$

La constante dieléctrica ε se halla de la relación $E = E_0/\varepsilon$, de donde $\varepsilon = 1 + \frac{q^2}{\varepsilon_0 k} n$.

Las cargas $+q$ y $-q$, al alejarse en la molécula a una distancia λ, realizan un trabajo $k\lambda^2/2$. La energía acumulada en el dieléctrico es $W_1 = (k\lambda^2/2) N$, donde $N = Sln = Vn$ es el número de moléculas en un volumen V del dieléctrico que se encuentra entre las placas del condensador. De este modo,

tenemos $W_1 = n\,(k\lambda^2/2)\,V$. Como $\lambda = qE/k$, entonces $W_1 = n\,(q^2E^2/2k)\,V$. Expresando nq^2/k por ε, $(\varepsilon - 1 = q^2n/\varepsilon_0 k)$, obtenemos para W_1 el valor

$$W_1 = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon - 1}{2} E^2 V.$$

La energía total del condensador es

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{2} E^2 V.$$

La energía total W puede expresarse como la suma de la energía electrostática $W_0 = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} V$ y de la energía acumulada en el dieléctrico, $W_1 = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon - 1}{2} E^2 V$.

474. La fuerza que actúa por unidad de área del dieléctrico es

$$p = -\frac{\varepsilon^2 - 1}{8\varepsilon_0 \varepsilon^2 S^2} (q_1 - q_2)^2.$$

475. Supongamos, para simplificar, que dos placas metálicas paralelas, portadoras de cargas $+Q$ y $-Q$, estén introducidas en un dieléctrico líquido. La intensidad del campo eléctrico entre las placas es $E = Q/\varepsilon_0 \varepsilon S$. La intensidad del campo creado por cada placa será igual a $E_1 = E_2 = Q/2\varepsilon\varepsilon_0 S$.
Determinemos la fuerza con que actúa la primera placa sobre la segunda. Para esto hace falta multiplicar la intensidad del campo creado por la primera placa, por el valor de la carga que se encuentra en la segunda placa. De esto modo, $F = Q^2/2\varepsilon_0 \varepsilon S$.
Supongamos que la primera placa está sujetada y la segunda puede moverse muy lentamente (podemos prescindir de la variación de la energía mecánica del dieléctrico). El trabajo que puede realizarse por el campo eléctrico durante el movimiento de las placas hasta producirse el contacto, es igual al producto de la fuerza F (la fuerza F es constante) por el valor del desplazamiento d, o sea, $A = Fd = Q^2d/2\varepsilon_0 \varepsilon S$. Este trabajo se realiza debido a la disminución de la energía eléctrica del condensador. De esta manera la energía electrostática será

$$W = Q^2d/2\varepsilon_0 \varepsilon S = Q^2/2C \quad \text{ó} \quad W = QU/2,$$

donde U es la diferencia de potencial. La fórmula recibida es válida para cualquier dieléctrico.

476. La energía del condensador en el caso cuando el dieléctrico se desplaza a una distancia x dentro del condensador será

$$W_1 = \frac{Q^2}{2C} = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2d} \frac{1}{1 + (\varepsilon - 1)\frac{x}{l}}.$$

puesto que $C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}\left\{1 + (\varepsilon - 1)\frac{x}{l}\right\}$ y $Q = \frac{\varepsilon_0 S}{d} U$ (véase el problema 470). Si x aumenta en δ, entonces la energía disminuirá y será igual a

$$W_2 = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2d} \frac{1}{1 + (\varepsilon - 1)\frac{x + \delta}{l}}.$$

La diferencia de energías

$$W_1 - W_2 = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2d} \frac{(\varepsilon - 1)\frac{\delta}{l}}{\left\{1 + (\varepsilon - 1)\frac{x + \delta}{l}\right\}\left\{1 + (\varepsilon - 1)\frac{x}{l}\right\}}$$

será igual al trabajo de la fuerza incógnita F en el trayecto δ. En este trayecto el valor de la fuerza variará, pero, si tomamos δ suficientemente pequeño, entonces podemos escribir que

$$W_1 - W_2 = F\delta,$$

de donde deducimos que

$$F = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2dl} \frac{\varepsilon - 1}{\left\{1 + (\varepsilon - 1)\frac{x}{l}\right\}^2},$$

si prescindimos de δ en el denominador. Es conveniente recordar que si para calcular la energía nosotros consideramos que el campo dentro del condensador es homogéneo y prescindimos de los efectos de los extremos para la explicación física de la fuerza que actúa sobre el dieléctrico, es preciso tener en cuenta obligatoriamente la heterogeneidad del campo en los extremos.

477. La energía del condensador en el caso cuando el dieléctrico se hundió a una distancia x dentro del condensador, será

$$W_1 = \frac{1}{2} U^2 C = \frac{1}{2} U^2 \frac{\varepsilon_0 S}{d}\left\{1 + (\varepsilon - 1)\frac{x}{l}\right\}.$$

Si x aumenta en δ, la energía del condensador aumentará en

$$W_2 - W_1 = \frac{\varepsilon_0 U^2 S}{2d}(\varepsilon - 1)\frac{\delta}{l}.$$

La carga en las armaduras del condensador durante el movimiento del dieléctrico a una distancia δ, aumentará en

$$Q_2 - Q_1 = \frac{\varepsilon_0 U S}{d}(\varepsilon - 1)\frac{\delta}{l}.$$

El trabajo realizado por la batería durante el movimiento de esta cantidad de electricidad será igual a

$$A = (Q_2 - Q_1) U = \frac{\varepsilon_0 U^2 S}{d}(\varepsilon - 1)\frac{\delta}{l}.$$

Una parte de este trabajo se utiliza para aumentar la energía electrostática del condensador y otra parte, para el movimiento del dieléctrico hacia dentro. Designemos por F, como en el problema anterior, la fuerza con que el dieléctrico se desplaza hacia el interior del condensador. Basándose en el principio de conservación de la energía, podemos escribir que $A = W_2 - W_1 + F\delta$, es decir,

$$\frac{\varepsilon_0 U^2 S}{d}(\varepsilon - 1)\frac{\delta}{l} = \frac{\varepsilon_0 U^2 S}{2d}(\varepsilon - 1)\frac{\delta}{l} + F\delta,$$

de donde

$$F = \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{U^2 S}{dl}(\varepsilon - 1).$$

Como vemos en este caso la fuerza es constante y no depende de x.

478. El líquido entre las armaduras del condensador (fig. 434) sube bajo la acción de la fuerza

$$F = \frac{\varepsilon_0 U^2 S}{2dl}(\varepsilon - 1).$$

Cuando el líquido alcanza la altura máxima H, su energía cinética será nula, y la energía potencial aumentará en un

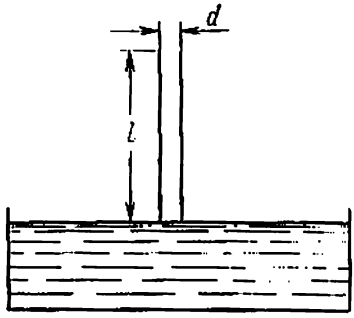


Fig. 434

valor FH. De la relación

$$FH = Sd\frac{H}{l}\rho g\frac{H}{2}$$

determinamos H:

$$H = \varepsilon_0 U^2(\varepsilon - 1)/d^2\rho g.$$

En esta posición la fuerza de gravedad es mayor que la fuerza F y, como consecuencia de esto, el líquido comenzará a descender.

Para la altura de la columna del líquido igual a

$$h = H/2 = \varepsilon_0 U^2 (\varepsilon - 1)/2d^2\rho g$$

la energía cinética es máxima y la fuerza F es igual a la fuerza de gravedad. El líquido entre las placas del condensador continúa descendiendo y alcanza el nivel del líquido en el recipiente. El nivel del líquido en el recipiente, debido a sus grandes dimensiones, prácticamente no cambia. De este modo, la altura de la columna cambia periódicamente entre los límites desde 0 hasta H.

Como consecuencia de fricción, la amplitud de las oscilaciones del líquido disminuirá y el nivel de la columna finalmente se establece a una altura

$$h = \varepsilon_0 U^2 (\varepsilon - 1)/2d^2\rho g.$$

Midiendo la altura de elevación h, podemos hallar la constante dieléctrica del líquido ε.

479. Una carga libre $+Q$ crea en el dieléctrico un campo eléctrico homogéneo, cuya intensidad es $E_0 = Q/2\varepsilon_0 S$. Como consecuencia de esto, la capa del dieléctrico de grosor d se polariza. En dos planos que limitan esta capa desde arriba y desde abajo surgen cargas de polarización. La densidad de las cargas polarizadas σ_1 es

$$\sigma_1 = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \varepsilon_0 E_0 = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \frac{Q}{2S}.$$

Las cargas Q y la carga negativa $\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \frac{Q}{2}$ actúan sobre la carga polarizada positiva que se encuentra en la superficie del líquido con una fuerza F dirigida hacia arriba:

$$F = \frac{Q^2}{8S\varepsilon_0} \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon^2}.$$

Como consecuencia, el nivel del líquido sobre la lámina se eleva a una altura h:

$$h = \frac{Q^2}{4\varepsilon_0 \rho g S^2} \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon^2}.$$

§ 20. CORRIENTE ELECTRICA CONTINUA

480. Primeramente demostremos que la intensidad del campo eléctrico en todos los puntos que se encuentran en el plano de la sección OO' está dirigida perpendicularmente a este plano. Para demostrarlo tomemos un punto arbitrario en el plano de la sección y dos pequeñas áreas que están situadas de modo arbitrario, pero simétricamente en el cilindro con relación a la sección OO'. Vemos con toda claridad que la intensidad resultante del campo creada por las cargas en estas áreas estará

dirigida a lo largo del eje del cilindro (fig. 435). Como para cada sección elemental encontramos otra sección elemental situada simétricamente respecto al plano de la sección, entonces deducimos que la intensidad creada por todas las secciones estará dirigida paralelamente al eje del cilindro.

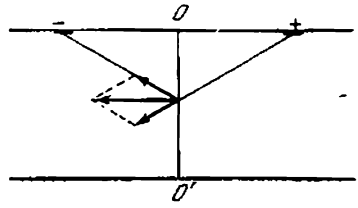


Fig. 435

Demostremos, pues, que la intensidad será la misma en todos los puntos que se aparten del eje del cilindro a igual distancia. Sean A y B estos dos puntos (fig. 436). La intensidad del campo

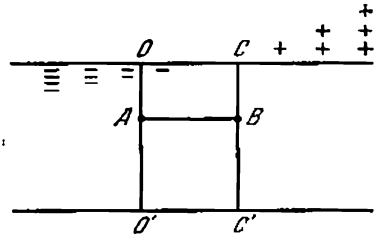


Fig. 436

dentro del cilindro no cambiará, si además de la carga ya existente en cada área unitaria de la superficie del cilindro, a ésta se transmite una carga negativa adicional para que la densidad de las cargas en el punto C sea nula. Esto es evidente si partimos del hecho de que el campo, dentro de un cilindro infinito y cargado uniformemente es nulo. En este caso la distribución de la densidad de las cargas en la superficie del cilindro (fig. 436) tendrá la misma forma que en la fig. 167. Por consiguiente, la intensidad en los puntos A y B es la misma. Nos falta mostrar que la intensidad del campo en los puntos situados a diferentes distancias del eje del cilindro es única. Para demostrarlo examinemos el circuito $BKLD$ (fig. 437). Como sabemos el trabajo del campo electrostático en un circuito cerrado es nulo. El trabajo en los segmentos KL y DB es nulo, puesto que la intensidad del campo es perpendicular

al trayecto; el trabajo en el segmento BK es igual a $-E_B l$ y en el segmento LD, a $E_D l$ (conforme a la demostración anterior $E_B = E_K$, $E_D = E_L$) y por lo tanto, $-E_B l + E_D l = 0$, o sea, $E_B = E_D$.

De este modo ha sido demostrado que la intensidad del campo eléctrico dentro del cilindro será la misma en todos los puntos y esta intensidad estará dirigida a lo largo del eje del cilindro.

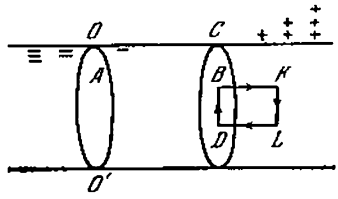


Fig. 437

Subrayamos que semejante distribución de carga en la superficie de un conductor aparece al pasar por éste una corriente continua.

481. Al pasar por un conductor una corriente continua, el campo eléctrico dentro del conductor es constante y está dirigido a lo largo de éste. El trabajo del campo eléctrico realizado en el movimiento de la carga a lo largo del circuito cerrado *abcd* (fig. 438) es nulo. Los segmentos *ad* y *bc* consideramos tan pequeños que podemos prescindir de su trabajo. Esto significa que el trabajo a lo largo de *ab* es igual al trabajo a lo largo de *dc*. Por eso la componente tangencial de la intensidad del campo en las cercanías de la superficie del conductor deberá ser igual a la intensidad del campo dentro de éste.

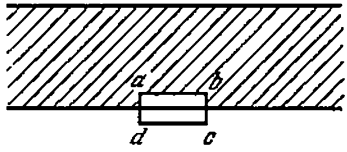


Fig. 438

482. La distribución de las líneas de fuerza se muestra en la fig. 439. El aumento de la inclinación de las líneas cerca de la curvatura se explica por el hecho de que la componente tangencial de la intensidad del campo cerca de la superficie del conductor de sección constante, es constante, y la componente normal ami-

nora a medida que nos aproximamos a la curvatura, porque la diferencia de potencial entre los sectores correspondientes que se encuentran en los lados opuestos del arco, disminuye.

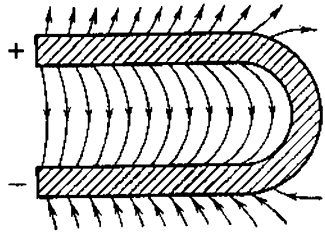


Fig. 439

483. Al conectar en serie, la resistencia del circuito será

$$R = R_{01} + R_{02} + \alpha_1 R_{01} t + \alpha_2 R_{02} t.$$

Por otro lado, podemos escribir que $R = R_0 (1 + \alpha' t)$, donde $R_0 = R_{01} + R_{02}$ y α' es el coeficiente de temperatura que buscamos; de ahí recibimos que

$$\alpha' = \frac{R_{01}\alpha_1 + R_{02}\alpha_2}{R_{01} + R_{02}}.$$

Al conectar en paralelo, obtenemos

$$R = \frac{R_{01} R_{02} (1 + \alpha_1 t)(1 + \alpha_2 t)}{R_{01}(1 + \alpha_1 t) + R_{02}(1 + \alpha_2 t)} = R_0 (1 + \alpha'' t),$$

donde $R_0 = R_{01} R_{02}/(R_{01} + R_{02})$. Prescindiendo de los términos proporcionales a los productos de los coeficientes de temperatura, por ser muy pequeños, hallamos que

$$\alpha'' = \frac{R_{02}\alpha_1 + R_{01}\alpha_2}{R_{01} + R_{02}}.$$

484. Los puntos A y C tienen el mismo potencial ya que el conductor que los une posee una resistencia insignificante que podemos menospreciar. Son iguales también los potenciales de los puntos B y D. Por eso los extremos de las resistencias A, C y por lo tanto B, D podemos considerar conectados entre sí. De este

modo, las resistencias AB, CB y CD están conectadas en paralelo. Un circuito equivalente está representado en la fig. 440. La resistencia total será $R/3$.

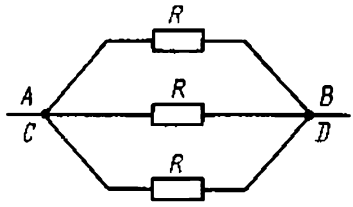


Fig. 440

485. Por la ley de Joule—Lentz, la cantidad de calor para una determinada U será mayor cuanto menor es la resistencia. La resistencia mínima de un pedazo del alambre que puede conectarse en la red con tensión U es $r = U/I_0$. La longitud de este pedazo es $l = (L/R)\, r = LU/I_0R$. Si cortamos el alambre en pedazos y los conectamos en paralelo, entonces a cada uno de los sectores será aplicada la máxima tensión posible en el circuito U y por cada uno de los sectores pasará la cantidad de corriente máxima I_0. Por lo tanto, en cada uno de los sectores se desprenderá la potencia calorífica máxima igual a $q_0 = U^2/r = I_0^2 r = I_0U$ y en todos los sectores, la potencia $q = nq_0$, donde n es el número máximo, entero, de pedazos de longitud l en que podemos cortar el alambre.
El resto del alambre de longitud menor que l deberá tirarse fuera, puesto que si hacemos una conexión en paralelo, a través de éste pasará una corriente mayor que I_0 y este pedazo se quemará; si lo conectamos en serie con cualquiera de los demás pedazos, obtendremos un pedazo con resistencia mayor que r y en éste se desprenderá una cantidad de calor menor que q_0.

486. A causa de la simetría, los puntos D y C tienen el mismo potencial. No pasa corriente por el conductor DC, por eso podemos tirarlo del circuito sin cambiar la resistencia general del circuito, que, después de esto, se calcula fácilmente: $r = R/2$.

487. Debido a la simetría se hace evidente que la corriente en el conductor *1—7* es igual a la corriente en el conductor *7—4*; la corriente en el conductor *2—7* es igual a la que pasa por el conductor *7—3*; la corriente en el conductor *6—7* es igual a la que tiene en el conductor *7—5* (fig. 170). Por eso, la distribución de las corrientes y por consiguiente, la resistencia del hexágono no cambiará, si desconectamos los conductores *2—7*, *7—3*, *6—7* y *7—5* del centro (fig. 441). La resistencia de este circuito que es equivalente a la del circuito inicial, se calcula muy fácilmente. La resistencia de la parte superior del circuito es $8/3R$. La parte inferior tiene la misma resistencia.

La resistencia total R_x se halla de la relación

$$1/R_x = 1/2R + 6/8R,$$

de donde resulta que $R_x = 4/5R$.

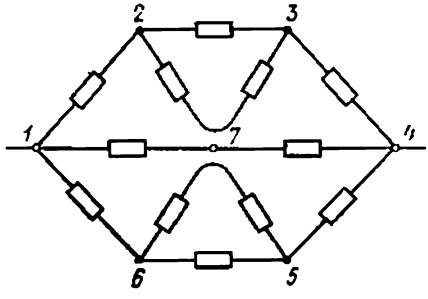


Fig. 441

488. Esta claro, que gracias a la simetría, los potenciales de los vértices del cubo *2*, *3* y *6* son iguales. Son iguales también los potenciales de los vértices *4*, *5* y *7* (fig. 171). Por eso los vértices *2*, *3*, *6* y *4*, *5*, *7* podemos unir mediante conductores adicionales de resistencia nula. La resistencia del cubo por esta

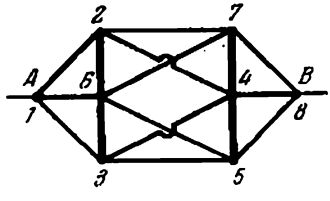


Fig. 442

causa no cambiará. De este modo los conductores adicionales se conectan el uno con el otro por seis conductores: *2—7*, *2—4*, *3—5*, *3—4*, *6—7* y *6—5*. La resistencia del circuito (fig. 442) es igual a la resistencia incógnita del cubo:

$$R_x = \frac{R}{3} + \frac{R}{6} + \frac{R}{3} = \frac{5}{6} R.$$

489. La resistencia entre los puntos *A* y *B* es

$$R_{AB} = \frac{1}{2/(r_a + r_b) + 1/r_c} = \frac{(r_a + r_b) r_c}{r_a + r_b + 2r_c},$$

donde $r_a = \rho a/S$, $r_b = \rho b/S$, $r_c = \rho \sqrt{a^2 + b^2}/S$. La resistencia entre los puntos C y D se hallará al examinar las corrientes que pasan por las ramificaciones del circuito (fig. 443).

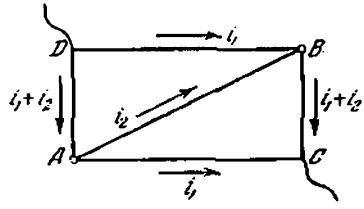


Fig. 443

De los conceptos de simetría se hace evidente que las corrientes en los conductores DB y AC y también en los conductores AD y BC son iguales, respectivamente, la una a la otra, siendo la corriente en el conductor AD $i_1 + i_2$, porque la suma de las corrientes en el nudo A es nula. En el sector DAC tenemos

$$(i_1 + i_2)\, r_a + i_1 r_b = U_{DC},$$

y en el sector $DABC$

$$2\,(i_1 + i_2)\, r_a + i_2 r_c = U_{DC}.$$

de donde

$$i_1 = \frac{r_a + r_c}{2r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c}\, U_{DC},$$

$$i_2 = \frac{r_b - r_a}{2r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c}\, U_{DC}.$$

La resistencia que tratamos de hallar será

$$R_{CD} = \frac{U_{CD}}{I} = \frac{U_{CD}}{2i_1 + i_2} = \frac{2r_a r_b + r_c\,(r_a + r_b)}{r_a + r_b + 2r_c}.$$

490. Si no pasa corriente por el galvanómetro, entonces los potenciales de los puntos C y D son iguales y la corriente I_1 que pasa por la resistencia R_x es igual a la corriente que pasa por la resistencia R_0, y la corriente I_2 a lo largo de la ramificación AB (el hilo de resistencia), es igual en todas las secciones. Por la ley de Ohm, recibimos

$$I_1 R_x = I_2 l_1 \rho/S, \quad I_1 R_0 = I_2 l_2 \rho/S,$$

donde ρ es la resistencia específica y S, la sección transversal de la ramificación AB, de donde concluimos que $R_x/R_0 = l_1/l_2$.

491. Entre los puntos C y D es necesario conectar una resistencia r de modo que la resistencia de la última célula (fig. 444) sea igual a r. En este caso, la última célula puede sustituirse por la resistencia r, luego se repite este proceso con la penúltima

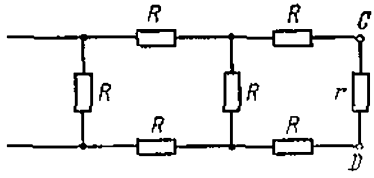


Fig. 444

célula, etc. Entonces, la resistencia total del circuito no dependerá del número de células y será igual a r. Para r podemos escribir la ecuación: $(2R + r)\,R/(3R + r) = r$, de donde resulta que $r = R\,(\sqrt{3} - 1) \approx 0{,}73\,R$.

492. La última célula es un reductor de tensión que disminuye el potencial de enésimo punto en comparación con el punto $(n - 1)$ n k veces. Por lo tanto, $U_n = \frac{U_{n-1}}{R_1 + R_3} R_3 = \frac{U_{n-1}}{k}$ ó $R_1/R_3 = k - 1$ (fig. 445).
La relación $U_i = U_{i-1}/k$ deberá cumplirse para cualquier célula. Por eso, la resistencia de toda la última célula, las dos

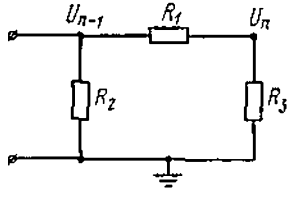


Fig. 445

últimas, las tres últimas, etc. también deberá ser igual a R_3 (véase el problema 491), de donde resulta que

$$\frac{1}{R_3} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1 + R_3},$$

$$R_2 = \frac{R_3\,(R_1 + R_3)}{R_1} = R_3\,\frac{k}{k - 1},$$

y finalmente

$$R_1 : R_2 : R_3 = (k - 1)^2 : k : (k - 1)$$

493. No se puede utilizar sólo los aparatos, cuyo principio de funcionamiento se basa en la desviación de un conductor con corriente en un campo magnético. El ángulo en que deberá inclinarse el indicador de este aparato es proporcional a la intensidad de la corriente que pasa por el aparato. La determinación de la diferencia del potencial por medio de este tipo de aparato, como por medio de cualquier medidor de corriente, se basa en la ley de Ohm: la corriente que pasa por el voltímetro es proporcional a la diferencia de potencial aplicada. Para verificar la ley de Ohm hace falta un voltímetro electrostático junto con un amperímetro común.

494. Designemos por q_1 y q_2 las cargas en el primer y en el segundo condensadores en el momento de tiempo t. q_1 y q_2 están unidas por las relaciones

$$q_1 + |q_2| = Q, \quad q_1/C_1 = q_2/C_2.$$

Puesto que

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_0 + vt}, \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_0 - vt},$$

entonces resulta que

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{d_0 - vt}{d_0 + vt},$$

de donde deducimos que

$$q_1 = Q\frac{d_0 - vt}{2d_0}, \quad q_2 = Q\frac{d_0 + vt}{2d_0}.$$

La disminución de la carga en el primer condensador es igual al aumento de la carga en el segundo condensador. La intensidad de la corriente es $I = -\Delta q_1/\Delta t = \Delta q_2/\Delta t = Qv/2d_0$. La corriente pasará en dirección de la placa cargada positivamente del primer condensador a la placa cargada positivamente del segundo condensador.

495. Las fuerzas de atracción que actúan entre las placas de los condensadores son iguales a

$$F_1 = \frac{q_1}{2\varepsilon_0 S} q_1 = \frac{Q^2 (d_0 - vt)^2}{8\varepsilon_0 S d_0^2}$$

para el primer condensador y

$$F_2 = \frac{Q^2 (d_0 + vt)^2}{8\varepsilon_0 S d_0^2}$$

para el segundo condensador (véase el problema 494). Como las placas del primer condensador se mueven, las fuerzas del campo electrostático realizan un trabajo negativo A_1. Estas fuerzas realizan un trabajo positivo A_2 en el segundo condensador. El trabajo ΔA realizado por el campo durante el mo-

vimiento de cada una de las placas a pequeña distancia Δx, es igual a

$$\Delta A = \Delta A_1 + \Delta A_2 = (F_2 - F_1)\,\Delta x = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}\,\frac{x}{d_0}\,\Delta x.$$

donde $x = vt$. De este modo, el trabajo en un pequeño sector es proporcional al movimiento x, como esto tiene lugar durante la extensión de un muelle. Por lo tanto, el trabajo total es $A = Q^2a^2/4\varepsilon_0 S d_0$.

El trabajo A puede calcularse también de otro modo. Si la resistencia de los hilos de conexión es nula, la cantidad de calor desprendido es también nula. Por eso la variación de la energía electrostática de dos conductores será igual al trabajo del campo electrostático.

En el momento de tiempo t, las energías del primero y segundo condensadores tendrán, por lo tanto, los valores siguientes:

$$W_1 = \frac{q_1^2}{2C_1} = \frac{Q^2}{8\varepsilon_0 S d_0^2}\,(d_0 - vt)^2\,(d_0 + vt),$$

$$W_2 = \frac{q_2^2}{2C_2} = \frac{Q^2}{8\varepsilon_0 S d_0^2}\,(d_0 + vt)^2\,(d_0 - vt).$$

La energía total será

$$W = W_1 + W_2 = \frac{Q_2}{8\varepsilon_0 S d_0}\,(d_0^2 - a^2).$$

De este modo la energía en un intervalo de tiempo t disminuye en un valor $Q^2a^2/4\varepsilon_0 S d_0$. Esta variación será igual al trabajo A del campo electrostático.

496. En la fricción que existe entre la ropa y el asiento de la silla tiene lugar la electrización. El cuerpo del experimentador y el asiento forman un condensador especial. Cuando el experimentador se levanta, la capacidad de este condensador disminuye bruscamente y como consecuencia de esto, se eleva también bruscamente la diferencia de potencial entre el asiento (es decir, «la tierra») y el cuerpo del experimentador. Es evidente que para esto hace falta que el cuerpo esté muy bien aislado de la tierra (zapatos con suela de goma).

En el momento cuando el físico toca la mesa, la diferencia de potencial entre la mano y la tierra se equilibra. Se genera una corriente eléctrica, cuya parte sumamente insignificante pasa a través del galvanómetro. Para el salto de la imagen es necesario que la resistencia entre uno de los extremos de la bobina del galvanómetro y la tierra sea menor que la resistencia entre el otro extremo y la tierra.

El circuito de la corriente se muestra esquemáticamente en la fig. 446. O es el arrollamiento del galvanómetro; K, la llave de conexión; R muestra condicionalmente una resistencia muy

grande pero finita entre uno de los extremos del devanado y la tierra. El salto en el galvanómetro se observa a pesar de la

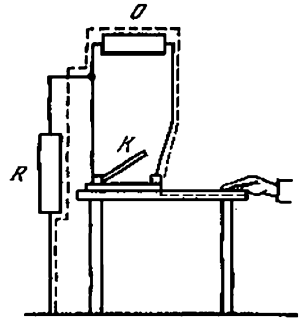


Fig. 446.

enorme resistencia del circuito debido a la gran diferencia de potencial que aparece al disminuir la capacidad.

497. Está claro que existe una determinada asimetría entre los conductores a los cuales están conectados los extremos del devanado del galvanómetro. Esto puede tener lugar si la resistencia del aislamiento entre uno de los extremos de la bobina y la tierra es menor que entre la tierra y el otro extremo. Además de esto, debe tenerse en cuenta que la resistencia entre los conductores que parten de la bobina del galvanómetro, pese al perfecto aislamiento, es diferente de un valor infinito.
El circuito que explica el paso de la corriente se muestra en la fig. 447. O es el devanado del galvanómetro: C_1 y C_2 son

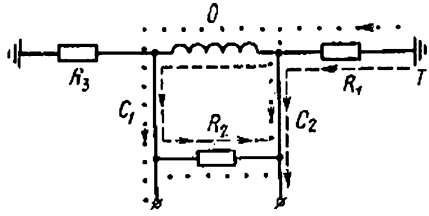


Fig. 447

los conductores que salen de los extremos del devanado; T es la tierra; R_1, R_2 y R_3 representan esquemáticamente unas resistencias muy grandes, pero finitas, que surgen debido al aislamiento no ideal; $R_3 \gg R_1 + R_2$. La línea punteada muestra el circuito de la corriente cuando un cuerpo cargado

negativamente fue acercado al conductor C_2. Si el cuerpo se acerca al conductor C_1, el circuito se representa por puntos. Se ve que en ambos casos, la corriente pasa por el devanado del galvanómetro en la misma dirección.
Este problema demuestra la presencia de conductibilidad en todos los cuerpos. Al trabajar con aparatos sensibles esta circunstancia se hace sustancial.

498. En la fig. 448 el punto A muestra el potencial de electrodo positivo (de cobre) y el punto D muestra el potencial del elec-

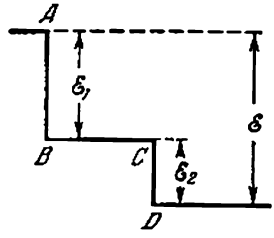


Fig. 448

trodo negativo (de zinc). En la solución de $ZnSO_4$ el electrodo de zinc se electriza negativamente como resultado de la emisión de iones positivos de Zn y el de cobre en la solución de $CuSO_4$ se electriza positivamente debido a que éste recibe los iones positivos de Cu. El potencial del electrólito se representa por la línea BC. $AB = \mathscr{E}_1$ y $CD = \mathscr{E}_2$ muestran los saltos del potencial en los límites electrodo—electrólito.
La f.e.m. es igual a la diferencia de potencial en los extremos de la pila abierta: $\mathscr{E} = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2$.

499. Las distribuciones correspondientes del potencial se muestran en la fig. 449, *a*, *b*, *c* y *d*.

a) $I = \dfrac{\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2}{r_1 + r_2}$,

$$V_{BA} = V_B - V_A = \mathscr{E}_1 - Ir_1 = -(\mathscr{E}_2 - Ir_2) = \frac{\mathscr{E}_1 r_2 - \mathscr{E}_2 r_1}{r_1 + r_2} > 0.$$

b) $I = \mathscr{E}_1/r_1$, $V_{BA} = 0$. Los potenciales de los conductores que unen las pilas son iguales, pero la corriente no es nula.

c) $I = \dfrac{\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2}{r_1 + r_2}$, $V_{BA} = \mathscr{E}_1 - Ir_1 = \mathscr{E}_2 + Ir_2 = \dfrac{\mathscr{E}_1 r_2 + \mathscr{E}_2 r_1}{r_1 + r_2}$.

d) $I = 0$, $V_{BA} = \mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_2$. La diferencia de potencial entre los conductores existe, pero la corriente no pasa.

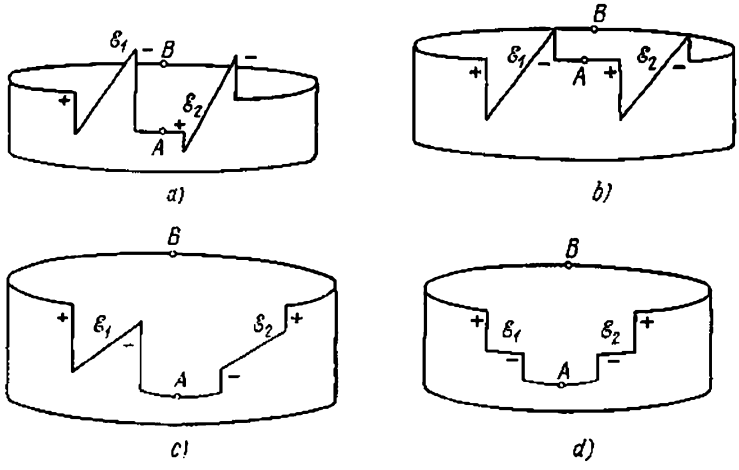


Fig. 449

500. Para cada mol de las substancias reactivas en la pila se libera una energía $W = 445 \cdot 10^3 - 235 \cdot 10^3 = 21 \cdot 10^4$ J. Gracias a esta energía, la corriente eléctrica realiza un trabajo $A = Q\mathscr{E}$, donde $\mathscr{E}$ es la f.e.m. de la pila y Q, la cantidad de electricidad transportada. Como el cobre y el zinc son divalentes, las cargas de los iones son iguales, en valor, al doble de la carga del electrón. Un mol de substancia contiene $6{,}02 \cdot 10^{23}$ átomos y por consiguiente $Q = 2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 6{,}02 \times 10^{23}$ C, de donde: $\mathscr{E} = W/Q \approx 1{,}05$ V.

501. La relación de las intensidades de las corrientes que pasan por las pilas es $I_1/I_2 = r_2/r_1$, porque sus f.e.m. son iguales. Por la ley de Faraday las masas del zinc disuelto son proporcionales a las corrientes:

$$m_1/m_2 = I_1/I_2 = r_2/r_1 \approx 1{,}625.$$

502. Cada átomo de zinc pasando a la solución en forma de ion Zn^{++}, transmite al circuito exterior dos electrones portadores de la carga $q = 2e = -3{,}2 \cdot 10^{-19}$ C. Al mismo tiempo, los iones de corte Cu^{++} se depositan en la lámina de cobre en forma de átomos neutros debido a que la concentración de la solución de $CuSO_4$ disminuye. Para mantener la concentración constante es preciso disolver continuamente cristales de $CuSO_4 \times 5H_2O$ en cantidad que compense la salida de los iones Cu^{++} y SO_4^{--} de la solución. Por las condiciones del problema tenemos que una carga $Q = 2880$ C pasó por la pila. Esto corres-

ponde al paso a la solución de $n = Q/q = 9 \cdot 10^{21}$ átomos de zinc, que constituye cerca de 0,98 g de zinc. Por consiguiente, de la solución se desprendió la misma cantidad de átomos de cobre (cerca de 0,95 g) y para restablecer la concentración de la solución de $CuSO_4$ es necesario disolver 3,73 g de cristales de sulfato de cobre.

503. Al disolver el zinc, los iones positivos Zn^{++} pasan a la solución y los electrones que se liberan a través del alambre pasan a la capa de grafito y neutralizan los iones positivos de cobre en la solución de $CuSO_4$. Por eso el grafito se cubre con una capa de cobre. El fenómeno puede utilizarse en la galvanoplastia.

504. La variación de la f.e.m. de la batería depende de la relación entre las dimensiones de los electrodos y del recipiente. Si dos electrodos medios tienen dimensiones casi iguales a la sección del recipiente, la f.e.m. de la batería cambiará muy poco. Si los electrodos son pequeños, la f.e.m. disminuirá aproximadamente en dos veces.

505. Con cada una de las mitades de la barra de carbón, la barra de zinc forma una pila cerrada. De la resistencia exterior de la pila sirve la resistencia de la mitad de la barra de carbón, la resistencia de la barra de zinc y el contacto zinc—carbón (véase el circuito equivalente en la fig. 450).

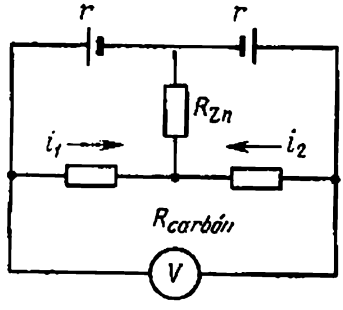


Fig. 450

Cuando la barra de zinc está en posición vertical, las corrientes i_1 y i_2 en ambas mitades de la barra de carbón son iguales y la indicación del voltímetro será nula. Si la barra está inclinada, entonces la resistencia interna de una de las pilas disminuirá y la de la otra aumentará. Las corrientes i_1 y i_2 no serán iguales entre sí y entre los extremos de la barra de carbón surgirá una diferencia de potencial que será indicada por el voltímetro.

506. Si $r \ll R$, el campo dentro de la esfera prácticamente no existe y tampoco existe la corriente en su superficie interna. Por lo tanto, la masa del cobre desprendido es

$$m = \frac{A}{n} \frac{4\pi R^2 jt}{F} \approx 1{,}86 \text{ g},$$

donde A/n es el equivalente electroquímico del cobre y F, el número de Faraday.

507. El problema es el siguiente: durante la electrólisis tiene lugar la polarización de los electrodos y cada baño adquiere una f.e.m. dirigida en sentido opuesto a la corriente que sale del condensador. Como consecuencia de esto, el condensador no puede descargarse completamente. Cuanto más grande es el baño, mayor será la f.e.m. resultante de la polarización y por lo tanto, mayor será la carga que queda en el condensador. La energía del gas oxídrico será siempre menor de la energía del condensador cargado.

508. En la electrólisis del agua los electrodos se polarizan y surge f.e.m. de polarización $\mathscr{E}_p$, dirigida en sentido opuesto a la f.e.m. de la batería. Por eso la electrólisis tiene lugar solamente en el caso cuando la f.e.m. de la batería es mayor que $\mathscr{E}_p$. Al pasar la carga Q por el electrólito, la batería realiza un trabajo contrario a la f.e.m. de la polarización: $A = \mathscr{E}_p Q$. Gracias a este trabajo se efectúa la descomposición del agua con formación del gas oxídrico. Basándose en el principio de conservación de la energía, la energía química del gas oxídrico W desprendido durante el paso de la carga Q es igual a $\mathscr{E}_p Q$.
De acuerdo con la ley de Faraday, el desprendimiento de un gramo de hidrógeno en el cátodo, está acompañado del paso de una cantidad de electricidad

$$Q = m\frac{n}{A}F = 96\,500 \text{ C}.$$

Por consiguiente $\mathscr{E}_p = W/Q \approx 1{,}5$ V. La f.e.m. de la batería deberá ser mayor que 1,5 V.

509. Una determinada concentración de iones es el resultado del equilibrio dinámico: la cantidad de iones que aparecen durante la disociación electrolítica, es igual a la disminución del número de iones resultantes del proceso inverso: de recombinación (al chocarse los iones de signos opuestos pueden formar una molécula neutra). En las cercanías de los electrodos la concentración de los iones disminuye y el equilibrio se perturba. El número de iones que surgen debido a la disociación es mayor que el número de iones recombinados. Precisamente este proceso forma los iones para el electrólito. El proceso tiene lugar cerca de los electrodos. Dentro del electrólito el equilibrio dinámico no cambia.

510. Durante 1 segundo alcanzan el cátodo y se depositan en él n_+v_+S iones positivos (S es el área del cátodo). Al mismo tiempo se alejan n_-v_-S iones negativos. Durante el proceso de la salida de los iones negativos, el equilibrio dinámico entre las moléculas neutras del electrólito y los iones en que ellas se disocian, se perturba (véase el problema 509). Surgen de nuevo n_-v_-S iones negativos y la misma cantidad de iones positivos. Los iones positivos se depositan también en el cátodo

y como resultado de esto, la cantidad de iones positivos que se depositan en el cátodo por segundo será igual a la corriente total.

511. El mayor coeficiente de rendimiento posible de una batería térmica teóricamente es igual a

$$\eta = \frac{\mathscr{E} q}{Q} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

donde Q es la cantidad de calor absorbida en unidad de tiempo por los terminales calientes; q, la carga que pasa por el circuito en unidad de tiempo; T_1 y T_2, las temperaturas absolutas de los terminales. Por la ley de Faraday la masa depositada durante un segundo en el cátodo de cobre es igual a $m = \frac{A}{n}\frac{q}{F}$. Sustituyendo el valor de q de la primera ecuación, obtenemos que

$$m = \frac{AQ}{nF\mathscr{E}} \frac{T_1 - T_2}{T_1} \approx 1{,}7 \cdot 10^{-4}\ \text{g}.$$

512. La diferencia de potencial entre las esferas deberá ser igual a $\mathscr{E}$. Por lo tanto, $q_1/r_1 - q_2/r_2 = \mathscr{E}$, donde q_1 y q_2 son las cargas de las esferas. Según el principio de conservación de la carga $q_1 + q_2 = 0$, de donde $q_1 = -q_2 = \mathscr{E} r_1 r_2/(r_1 + r_2)$. Por la ley de Coulomb tenemos

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathscr{E}^2 r_1^2 r_2^2}{R^2 (r_1 + r_2)^2} \approx 44 \cdot 10^{-9}\ \text{N}.$$

513. Como resultado del movimiento de las placas la magnitud de la carga en el condensador aumenta en un valor

$$\Delta Q = Q_2 - Q_1 = \mathscr{E}\varepsilon_0 S\,(1/d_2 - 1/d_1).$$

En este caso la batería realizará un trabajo

$$A = \mathscr{E}\Delta Q = \mathscr{E}^2 \varepsilon_0 S\,(1/d_2 - 1/d_1).$$

La energía electrostática del condensador aumentará en

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{\mathscr{E} Q_2}{2} - \frac{\mathscr{E} Q_1}{2} = \frac{\mathscr{E}^2 \varepsilon_0 S}{2}\left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1}\right).$$

En la aproximación de las placas se realizó un trabajo mecánico A_1. Basándose en el principio de conservación de la energía tenemos $A = A_1 + \Delta W$ y por consiguiente

$$A_1 = A - \Delta W = \frac{\mathscr{E}^2 \varepsilon_0 S}{2}\left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1}\right).$$

Gracias al trabajo de la batería tuvo lugar el aumento de la energía electrostática del condensador y se realizó el trabajo mecánico A_1.

514. El trabajo de las fuerzas del campo electrostático durante el movimiento de una carga en un circuito cerrado es nulo. Por eso

$$\mathscr{E}_1 - U_1 + \mathscr{E}_2 - U_2 = 0.$$

Las cargas en los conductores son iguales, porque la suma de las cargas que se encuentran en los conductores tanto superior como inferior, es nula. Por consiguiente, $q = C_1U_1 = C_2U_2$, de donde resulta que

$$U_1 = \frac{C_2}{C_1+C_2}(\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2) = 17{,}5\cdot10^3 \text{ V},$$

$$U_2 = \frac{C_1}{C_1+C_2}(\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2) = 7{,}5\cdot10^3 \text{ V}.$$

515. No variarán. Durante la puesta de las placas a la tierra de un modo alternado, pasan los mismos procesos que tienen lugar cuando la batería no existe. La única diferencia reside en que la diferencia de potencial entre las placas siempre se mantiene constante.

516. Si la corriente pasa en dirección indicada en la fig. 451 (el acumulador se descarga), entonces $V = \mathscr{E} - IR$. Si la co-

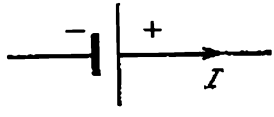


Fig. 451

rriente tiene sentido contrario (el acumulador se carga), entonces $V = \mathscr{E} + IR$ (véase la respuesta del problema 499, *c*).

517. La resistencia interior de una pila galvánica no es grande y la de una máquina electrostática es enorme. Esta es la resistencia de los aisladores (decenas y centenas de millones de ohmios).

518. Para dos pilas tenemos

$$I = \frac{\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2}{r_1+r_2+R},$$

donde $\mathscr{E}$ es f.e.m.; r, la resistencia interior de las pilas y R, la resistencia exterior.
Para una pila (por ejemplo, para la primera) tenemos

$$I_1 = \frac{\mathscr{E}_1}{r_1+R}.$$

Por la condición del problema recibimos que $I < I_1$, o sea,

$$\frac{\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2}{r_1+r_2+R} < \frac{1}{r_1+R},$$

de donde es preciso que

$$\frac{\mathscr{E}_2}{r_2} < \frac{\mathscr{E}_1}{R+r_1}.$$

519. Basándose en la ley de Ohm, podemos escribir que

$$I_1\left(2r\frac{l}{L}+\rho+R\right)=\mathscr{E},$$

$$I_2\left(2r\frac{l}{L}+\rho+\frac{2r\left(1-\frac{l}{L}\right)R}{2r\left(1-\frac{l}{L}\right)+R}\right)=\mathscr{E},$$

$$I_3\rho=\mathscr{E},$$

donde l es la distancia desde la batería hasta el lugar de deterioro y ρ, la resistencia interior de la batería. Del sistema de ecuaciones dado resulta que

$$R=\frac{\mathscr{E}}{I_1}-\frac{\mathscr{E}}{I_2}\pm\sqrt{\left(\frac{\mathscr{E}}{I_1}-\frac{\mathscr{E}}{I_2}\right)\left(\frac{\mathscr{E}}{I_3}-\frac{\mathscr{E}}{I_2}+2r\right)}=4\pm3\Omega.$$

El valor de $R = 1\Omega$ debe menospreciarse, porque para este valor obtenemos que el lugar de deterioro está alejado de la batería a 5,9 km. En efecto, siendo $R = 1\Omega$, tenemos

$$l=\frac{L\mathscr{E}-I_1L\rho-I_1LR}{2rI_1}=5{,}9\text{ km}.$$

La resistencia incógnita es $R = 7\Omega$.

520. En el sector $A\mathscr{E}_2B$ tenemos

$$V_A-V_B=\mathscr{E}_2-I_1r_2,$$

donde $I_1 = (\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2)/(r_1+r_2+R)$; r_1 y r_2 son las resistencias interiores de las pilas. Por la condición del problema sabemos que el potencial del punto A es menor que el potencial del punto B. Por eso $U_1 = V_B - V_A > 0$. Para otro circuito tenemos

$$U_2=V'_B-V'_A=(\mathscr{E}_2+I_2r_2),$$

donde $I_2 = (\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_2)/(r_1+r_2+R)$. Resolviendo el sistema de ecuaciones dado, hallamos que

$$U_2=\frac{2\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2+U_1(\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2)}{\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2}=+1{,}86\text{ V}.$$

521. En el caso dado el potencial del punto A, estando la llave cerrada, es mayor que el potencial del punto B, ya que estando la llave abierta $V_B > V_A$. Por eso $\mathscr{E}_2 - I_1r_2 = U_1$. Las demás

ecuaciones tienen la misma forma que las ecuaciones del problema 520. Por consiguiente

$$U_2 = \frac{2\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2 - U_1(\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2)}{\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2} \approx +1{,}57 \text{ V}.$$

522. Supongamos (arbitrariamente) que las corrientes tengan las direcciones indicadas en la fig. 452, entonces, basándose en

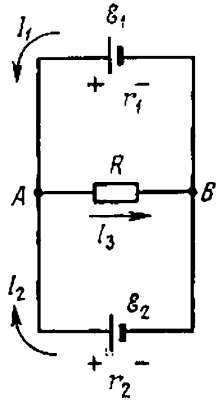


Fig. 452

la ley de Ohm, podemos escribir las igualdades:

$$U_{AB} = \mathscr{E}_1 - I_1 r_1, \quad U_{AB} = \mathscr{E}_1 - I_2 r_2,$$
$$U_{AB} = I_3 R.$$

Como en ningún punto del circuito tiene lugar la acumulación de cargas, recibimos que

$$I_1 + I_2 = I_3.$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, hallamos las corrientes I_1, I_2 y I_3:

$$I_1 = 5/4 \text{ A}, \quad I_2 = 1/4 \text{ A}, \quad I_3 = 3/2 \text{ A}.$$

Los resultados positivos obtenidos por nosotros confirman la certeza de las direcciones de las corrientes escogidas inicialmente.

523. Si $I_2 = 0$, entonces $I_1 = I_3$, $U_{AB} = \mathscr{E}_2$ y como antes $U_{AB} = \mathscr{E}_1 - I_1 r_1$; de ahí resulta que $R = \mathscr{E}_2 r_1/(\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2) = 1\,\Omega$. Si la corriente I_2 se dirige en sentido opuesto a $\mathscr{E}_2$, entonces el sistema de ecuaciones tendrá la siguiente forma:

$$U_{AB} = \mathscr{E}_1 - I_1 r_1, \quad U_{AB} = \mathscr{E}_2 + I_2 r_2,$$
$$U_{AB} = I_3 R_3, \quad I_1 = I_1 + I_3,$$

de donde

$$I_2 = \frac{\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_2 r_1/R}{r_1 + r_2 + r_1 r_2/R}.$$

Esta condición se satisface si $I_2 > 0$; por lo tanto deberá verificarse la desigualdad

$$\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_2 \frac{r_1}{R} > 0 \quad \text{ó} \quad R > \frac{\mathscr{E}_2 r_1}{\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2} = 1\Omega.$$

524. Hay dos posibilidades de conectar los acumuladores. Se puede, dentro de aislados grupos, conectar los acumuladores en serie y los propios grupos, en paralelo o inversamente, dentro del grupo unirlos en paralelo y los propios grupos en serie. Designando por N el número total de acumuladores y por n el número de acumuladores dentro de un grupo aislado, en el primer caso tendremos

$$I_1 = \frac{n\mathscr{E}_0}{R + rn^2/N} = \frac{\mathscr{E}_0}{R/n + rn/N},$$

como f.e.m. de un grupo es igual a $n\mathscr{E}_0$, la resistencia del grupo es rn y el número de grupos conectados en paralelo es igual a N/n. I_1 alcanzará el valor máximo, si $R/n + rn/N$ es mínimo. El mínimo de una expresión de forma $ax + b/x$ puede calcularse del siguiente modo. La dependencia

$$y = ax + b/x, \tag{1}$$

que está representada gráficamente en la fig. 453, tiene un mínimo en el punto x_0 en que coinciden las raíces de la ecua-

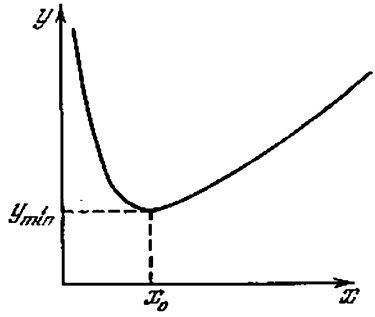


Fig. 453

ción del segundo grado (1). Por eso $x_0 = \sqrt{b/a}$. Por lo tanto, $n = \sqrt{RN/r} = 4$ y

$$I_{1\,\text{máx}} = \frac{\mathscr{E}_0}{2}\sqrt{\frac{N}{Rr}} = 20\ \text{A}.$$

En el segundo caso, recibimos

$$I_2 = \frac{(N/n)\mathscr{E}_0}{R + rN/n^2} = \frac{N\mathscr{E}_0}{nR + rN/n}.$$

La corriente tendrá un valor máximo siendo $n = \sqrt{rN/R} = 6$. Por lo tanto

$$I_{2\,\text{máx}} = \frac{\mathscr{E}_0}{2}\sqrt{\frac{N}{Rr}} = I_{1\,\text{máx}}.$$

De este modo, es imposible recibir una corriente que supere 20 A.

525. El modo de modificación se ve con claridad en la fig. 454.

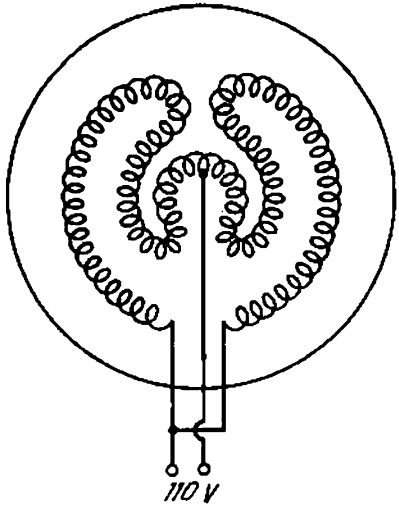


Fig. 454

526. La potencia consumida por el aparato calentador en el primer momento es mucho mayor que la potencia nominal, puesto que la resistencia de la espiral fría es pequeña. Consecuentemente será grande la caída de la tensión en los conductores que van de la línea principal al apartamento. Mientras que se calienta la espiral, la potencia consumida aminora, aproximándose a la nominal.

527. Como en todos los casos la tetera se conecta a la misma red eléctrica, es más conveniente utilizar la fórmula para la cantidad de calor desprendido en forma de $Q = \frac{U^2}{R}t$; de ahí resulta que $R = \frac{U^2}{Q}t$. Como U y Q son iguales para todos los casos, la

última igualdad puede escribirse del siguiente modo: $R = \alpha t$, donde $\alpha = U^2/Q$.
Designando las resistencias de los devanados por R_1 y R_2, recibimos $R_1 = \alpha t_1$ y $R_2 = \alpha t_2$. Al conectar los devanados en paralelo, recibimos

$$R_a = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{\alpha^2 t_1 t_2}{\alpha (t_1 + t_2)} = \alpha t_a.$$

Al conectar en serie, obtenemos

$$R_b = R_1 + R_2 = \alpha (t_1 + t_2) = \alpha t_b,$$

de donde $t_a = t_1 t_2/(t_1 + t_2)$, $t_b = t_1 + t_2$.

528. 1) $t_a \approx 57$ min; 2) $t_b = 3$ min 30 s (véase la solución del problema 527).

529. Al calcular la pérdida del calor en los conductores de la línea de alta tensión, utilizamos la fórmula $Q = \frac{U^2}{R} t$, donde U es la diferencia de potencial en los extremos de la línea (la caída de la tensión en los conductores) y no la tensión en el devanado secundario del transformador de elevación. Esta diferencia de potencial no es grande (como tiene lugar en la tensión del devanado del transformador) y disminuye con la reducción de la corriente que pasa por la línea.

530. La potencia desprendida en la resistencia exterior R es igual a $W = IU$. En el caso dado, $U = \mathscr{E} - Ir$ y por lo tanto $I = (\mathscr{E} - U)/r$. De este modo, $W = (\mathscr{E}U - U^2)/r$, de donde resulta

$$U = \frac{\mathscr{E}}{2} \pm \sqrt{\frac{\mathscr{E}^2}{4} - Wr}$$

y $U_1 = 9$ V ó $U_2 = 1$ V.
Los diferentes valores del resultado están relacionados con el hecho de que una misma potencia puede desprenderse en diferentes resistencias exteriores R, si a cada resistencia corresponde una determinada corriente:

para $U_1 = 9$ V, $I_1 = 1$ A

$$R_1 = W/I_1^2 = 9\Omega;$$

para $U_2 = 1$ V, $I_2 = 9$ A

$$R_2 = W/I_2^2 = 1/9\Omega.$$

531. Al conectar en paralelo, tenemos

$$N = N_1 + N_2.$$

Al conectar en serie, tenemos

$$N' = \frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2} = \frac{N_1 (N - N_1)}{N}.$$

En el numerador de la última expresión aparece el producto de dos valores, cuya suma es constante (igual a N). Este producto será máximo, cuando los valores que analizamos son iguales; de ahí resulta que $N_1 = N - N_2$, o sea, $N_1 = N_2 = N/2$.

532. La potencia máxima útil (véase el problema 530) es igual a $W = (\mathscr{E}U - U^2)/r$. Designemos $\mathscr{E}U - U^2 = x$. Es necesario hallar para qué valor de U tendremos un máximo para x.

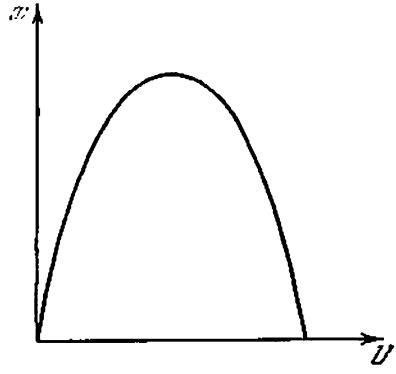


Fig. 455

La dependencia gráfica de x en función de U se muestra en la fig. 455. La curva tiene la forma de una parábola, si a cada x corresponden dos valores de U. Para un determinado valor de x tendremos una ecuación cuadrática respecto a U. x tendrá un valor máximo cuando ambas raíces de la ecuación son iguales. Por consiguiente, para un valor máximo de x el discriminante de la ecuación deberá ser nulo: $x_{\text{máx}} = \mathscr{E}^2/4$; de ahí resulta que

$$U = \mathscr{E}/2, \quad W_{\text{máx}} = \mathscr{E}^2/4r = 25 \text{ W}.$$

En este caso, recibimos

$$I = \mathscr{E}/2r,$$

$$R = W_{\text{máx}}/I^2 = \mathscr{E}^2 4r^2/4r\mathscr{E}^2 = r,$$

o sea, la resistencia exterior es igual a la interior.

533. Según la definición, el coeficiente de rendimiento η es la relación entre la potencia útil y la potencia total desprendida por el acumulador, o sea, $\eta = IU/I\mathscr{E} = U/\mathscr{E}$, donde $U = \mathscr{E}R/(R + r)$ es la diferencia de potencial en la resistencia exterior R. Por consiguiente, $\eta = R/(r + R)$. En el problema 530 $\eta_1 = 90\%$; $\eta_2 = 10\%$. En el problema 532 $\eta = 50\%$.

$\eta \to 1$, cuando $R \to \infty$, entonces la potencia útil desprendida será $W = \mathscr{E}^2 R/(R + r)^2$ (lo mismo que la total) y tenderá hacia cero (fig. 456).

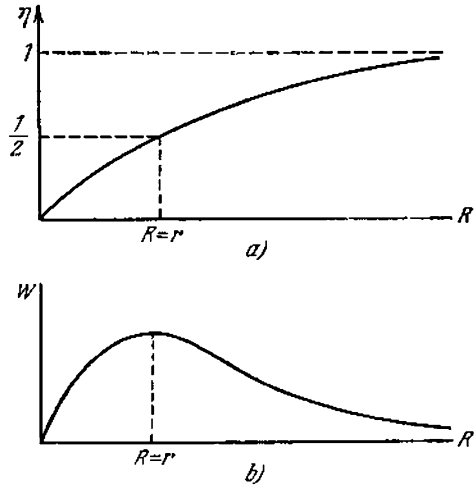


Fig. 456

534. Por la ley de Ohm, tenemos $U = \mathscr{E} + Ir$, de este modo $I = (U - \mathscr{E})/r$. La potencia útil gastada para cargar el acumulador, es

$$W_1 = \mathscr{E} I = (U\mathscr{E} - \mathscr{E}^2)/r.$$

La cantidad de calor desprendido por unidad de tiempo, será

$$W_2 = I^2 r = (U - \mathscr{E})^2/r.$$

La potencia total consumida es

$$W = IU = W_1 + W_2.$$

535. La potencia útil es

$$W_1 = \mathscr{E}(U - \mathscr{E})/r$$

(véase el problema 534). La cantidad de calor desprendido por unidad de tiempo es

$$W_2 = (U - \mathscr{E})^2/r.$$

Generalmente, durante la carga $U - \mathscr{E} \ll \mathscr{E}$ y por lo tanto, $W_1 \gg W_2$. Una pequeña parte de la potencia de la estación de carga se gasta en el desprendimiento del calor.

536. Durante un tiempo t por la sección transversal A del conductor pasarán todos los electrones que se encuentran en el volumen $S \cdot v \cdot t$ (fig. 457). De tal modo, la intensidad de la corriente es

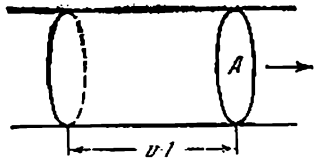


Fig. 457

$I = S \cdot v \cdot n \cdot e$ (e es la carga de un electrón); de ahí obtenemos $v = I/Sne \approx 10^{-3}$ mm/s.

537. Los electrones en el metal pueden considerarse libres. La redistribución de los electrones dentro del paralelepípedo terminará cuando el campo eléctrico que surge como consecuencia de la redistribución, esté en condiciones de transmitir a los electrones una aceleración a. De este modo, la intensidad incógnita del campo puede hallarse de la relación:
$ma = eE$ (m y e son la masa y la carga del electrón);
de donde resulta que $E = (m/e)\,a$.
Las superficies laterales del paralelepípedo perpendiculares al movimiento estarán cargadas: la superficie anterior estará cargada positivamente y la superficie posterior, negativamente. La densidad de las cargas es igual a $\sigma = \varepsilon_0 E = \varepsilon_0 (m/e)\,a$.

538. Los electrones libres giran junto con el cilindro. Por consiguiente, el electrón que se encuentra a una distancia r del eje tiene una aceleración $a = \omega^2 r$. Esta aceleración puede surgir solamente bajo la acción de un campo eléctrico dirigido a lo largo del radio a partir del centro del cilindro y que es igual a $E = m\omega^2 r/e$, donde e y m son la carga y la masa del electrón. La diferencia de potencial es $U = \frac{1}{2}\frac{m}{e}\omega^2 R^2$, porque la fuerza media que actúa sobre la carga unitaria durante su desplazamiento desde el eje hasta la superficie del cilindro, es $\frac{1}{2}\frac{m}{e}\omega^2 R$.

539. En el disco en rotación tiene lugar la redistribución de las cargas y surge un campo eléctrico, cuya intensidad es $E = m\omega^2 r/e$, donde r es la distancia hasta el centro del disco; e, la carga del electrón; m, su masa. El gráfico de dependencia $E = f(r)$ se representa en la fig. 458. La diferencia de potencial φ entre el centro y el borde del disco es numéricamente igual al área del triángulo sombreado en la fig. 458, o sea,

$\varphi = m\omega^2R^2/2e$. La cantidad de calor Q desprendido en la resistencia R_0 por unidad de tiempo es

$$Q = I\varphi = \frac{I}{e}\,\frac{m\omega^2R^2}{2}, \qquad (1)$$

donde I es la corriente que pasa por el circuito (puede determinarse por la ley de Ohm).
Los electrones que se mueven del centro a los bordes hacen frenar la rotación del disco. Supongamos ue a una distancia R

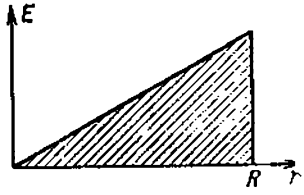


Fig. 458

existen N iones situados a iguales distancias el uno del otro. A cada choque con un ion el electrón adquiere una cantidad de movimiento p bajo la acción del impulso de la fuerza $F\tau$ que actúa sobre el electrón por parte del ion:

$$p = m\omega R/N = F\tau.$$

El momento de la cantidad de movimiento adquirido por el electrón a cada choque es igual a

$$m\omega\,\frac{R}{N}\,\frac{R}{N} = F\tau\,\frac{R}{N}.$$

Si la corriente en el circuito es I, entonces el momento de la cantidad de movimiento transmitida a los electrones por todos los N iones por unidad de tiempo es

$$\frac{I}{e}\sum_{n=1}^{N} m\omega\,\frac{R^2}{N^2}\,n = M.$$

La suma a la izquierda puede transformarse del siguiente modo:

$$\frac{I}{e}\,\frac{R^2}{2}\,m\omega\,\frac{N(N+1)}{N^2} = M.$$

Para $N \to \infty$, recibimos

$$\frac{I}{e}\,m\omega\,\frac{R^2}{2} = M.$$

El trabajo realizado por todos los N iones por unidad de tiempo, es

$$W = \frac{I}{e} m\omega^2 \frac{R^2}{2} = M\omega. \qquad (2)$$

Al comparar las ecuaciones (1) y (2), recibimos que $Q = W$.

§ 21. CORRIENTE ELECTRICA EN LOS GASES Y EL VACIO

540. En este caso los principios de conservación de la energía y del impulso pueden escribirse del siguiente modo

$$\mathscr{E}_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} + \mathscr{E}_0, \qquad (1)$$

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2,$$

donde v_1 es la velocidad de la primera partícula antes del choque; u_1 y u_2 son las velocidades de la primera y de la segunda partícula, respectivamente, después del choque. Resolviendo el sistema de ecuaciones (1), obtenemos que

$$u_1 = v_1 \frac{m_1 - m_2 \sqrt{1 - \frac{\mathscr{E}_0}{\mathscr{E}_1}\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)}}{m_1 + m_2},$$

$$u_2 = v_1 \frac{m_1 \left[\sqrt{1 - \frac{\mathscr{E}_0}{\mathscr{E}_1}\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)} + 1\right]}{m_1 + m_2}.$$

Se verifica con facilidad que después del choque u_1 no puede ser mayor que u_2; $u_{1\,\text{máx}} = u_2$ para satisfacer la siguiente correlación:

$$\mathscr{E} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathscr{E}_{1\,\text{mín}}.$$

Esta correlación determina la mayor parte de la energía que puede transformarse en la energía de ionización. En otras palabras, si para la ionización se necesita la energía $\mathscr{E}_0$, entonces es obligatorio que la energía mínima de la primera partícula sea mayor que $\mathscr{E}_0$.

Si la primera partícula es mucho más lijera que la segunda (por ejemplo, un electrón y un átomo), entonces

$$u_1 \approx -v_1 \sqrt{1 - \mathscr{E}_0/\mathscr{E}_1},$$

$$u_2 \approx \frac{m_1}{m_2} v_1 \left[\sqrt{1 - \mathscr{E}_0/\mathscr{E}_1} + 1\right].$$

Para esto $\mathscr{E}_{1\,\text{mín}} \approx \mathscr{E}_0$; si $\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_{1\,\text{mín}}$, entonces

$$u_1 \approx 0, \quad u_2 \approx \frac{m_1}{m_2} v_1 \ll v_1,$$

o sea, prácticamente toda la energía de la primera partícula se utiliza para la ionización y ambas partículas, después del choque, permanecerán casi en reposo.
En el caso, cuando $m_1 \approx m_2$ (por ejemplo, un ion y un átomo) $\mathscr{E}_{1\text{mín}} \approx 2\mathscr{E}_0$.

541. Antes de comenzar la descarga, la tensión en el contador era igual a f.e.m. de la fuente $\mathscr{E}$. En el momento de la descarga por el circuito pasa una corriente y la tensión entre el cuerpo y el hilo se hace igual al $U = \mathscr{E} - IR$. La resistencia R es muy grande y la caída de la tensión IR es tan sensible que la descarga cesa.

542. Por la ley de Ohm, la caída de la tensión que buscamos es $U = IR$, donde I es la intensidad de la corriente en el circuito. La corriente es igual en todas las secciones dentro del condensador. En la placa positiva esta corriente se condiciona solamente por iones negativos y en la placa negativa, solamente por los iones positivos. A través de una sección cualquiera dentro del condensador pasa una parte de los iones tanto positivos como negativos.
$I = enSd$, donde e es la carga del electrón y S, área de las placas. Para un condensador plano, tenemos $Sd = \frac{Cd^2}{\varepsilon_0}$. Por lo tanto,

$$U = \frac{enCd^2}{\varepsilon_0} R \approx 15{,}75 \cdot 10^{-12} \text{ V}.$$

543. Los electrones creados por un ionizador exterior se desaparecerán debido a la recombinación. En un volumen unitario, por unidad de tiempo, se recombina una cantidad de iones igual a $\Delta n_0' = \gamma n_0^2$. Además de esto, si entre los electrodos la corriente es I, entonces de un volumen unitario de gas, por unidad de tiempo, se neutraliza en los electrodos un número de iones igual a $\Delta n_0'' = I/qSl$. Por consiguiente para que el número de iones por unidad de volumen no cambie, el ionizador exterior debe crear, por unidad de tiempo, en cada volumen unitario un número de iones igual a

$$\Delta n_0 = \gamma n_0^2 + I/qSl.$$

544. La condición $I/qSl \ll \gamma n_0^2$ significa que puede prescindirse del número de iones que se desaparecen gracias a la presencia de la corriente en comparación con el número de iones que se desaparecen como resultado de la recombinación.
La condición de equilibrio (véase el problema 543) se escribe de la forma siguiente: $\Delta n_0 = \gamma n_0^2$. De esta condición deducimos la igualdad $n_0 = \sqrt{\Delta n_0/\gamma}$ que significa que el número de iones n_0 en el volumen unitario del gas es constante.
$n_0 u_+ S$ iones positivos alcanzarán el cátodo por unidad de tiempo. Al mismo tiempo abandonarán el cátodo $n_0 u_- S$ iones negativos. De este modo, el número total de iones positivos depositados en el cátodo por unidad de tiempo es: $n_0 (u_+ + u_-) S$ y la misma cantidad de iones negativos se depositan

por unidad de tiempo en el ánodo.
Por consiguiente, la densidad de corriente es $j = (u_+ + u_-) n_0 q$, y como $u_+ = b_+ E, u_- = b_- E$, entonces $j = n_0 (b_+ + b_-) qE$. Esta igualdad expresa la ley de Ohm $j = \sigma E$, puesto que $\sigma = n_0 (b_+ + b_-) q = \text{const}$.

545. La condición $\gamma n_0^2 \ll I/qSl$ significa que la densidad de corriente $j = I/S$ es tan grande que toda la disminución de iones se determina por su neutralización en los electrodos y la disminución provocada por la recombinación puede menospreciarse. La condición de equilibrio puede escribirse de la forma siguiente (véase el problema 543): $\Delta n_0 = I/qSl = j/ql$, de donde $j = j_s = \Delta n_0 ql$ y j_s no depende de la intensidad del campo E y por lo tanto, de la diferencia de potencial entre los electrodos. Esta densidad de la corriente es la máxima posible en las condiciones dadas (siendo Δn_0, q y l) y se denomina densidad de la corriente de saturación. j_s será tanto mayor cuanto mayor es l. Esta conclusión es válida para las condiciones cuando tiene lugar la ionización en todo el volumen existente entre los electrodos y por consiguiente en un sector tanto mayor cuanto mayor es l.

546. El gráfico de distribución de la tensión U se muestra en la fig. 459. Los electrones recorren el espacio oscuro catódico

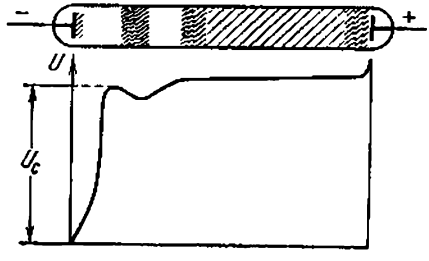


Fig. 459

mucho más rápidamente que los iones positivos. Como consecuencia de esto, en cualquier momento de tiempo el número de los iones positivos en el espacio oscuro catódico es mucho mayor que el de los electrones. La mayor concentración de iones positivos se encuentra en el comienzo de la luminiscencia. Su menor concentración está junto al cátodo donde la velocidad de su movimiento es la máxima. Junto al propio cátodo existe una capa de carga especial negativa formada por los electrones que comienzan su movimiento desde el cátodo con velocidades muy pequeñas.

547. 1) Si en el tubo donde comienza la descarga luminiscente hacemos desplazar paulatinamente el ánodo en dirección al cátodo, entonces las partes catódicas de la descarga permanecen casi invariables en su longitud y posición. Al desplazarse el ánodo,

sólo disminuye la longitud de la columna positiva hasta que esta columna no desaparezca completamente. Luego, durante la aproximación posterior del ánodo al cátodo disminuye el espacio oscuro de Faraday y en seguida la luminiscencia, hay que decir que la posición del límite brusco de esta luminiscencia por parte del cátodo permanece invariable. Y, finalmente, cuando la distancia desde este límite hasta el ánodo se hace muy pequeña la descarga luminiscente cesa.

2) Si el ánodo permanece inmóvil y se desplaza el cátodo en dirección al ánodo, todas las partes catódicas de la descarga, incluyendo el límite de la columna positiva, se desplazan junto con el cátodo, permaneciendo invariables en dimensión y posición recíproca. La columna positiva y el espacio oscuro de Faraday y luego la luminiscencia se desaparecen paulatinamente. Cuando el vértice de la luminiscencia alcanza el ánodo, la descarga cesa.

548. Al enfriar el carbón negativo, el arco se apaga, ya que la ignición del arco se mantiene por la fuerte emisión termoelectrónica desde el cátodo que cesa con el enfriamiento. El enfriamiento del carbón positivo no influirá en el funcionamiento del arco.

549. La carga acumulada por la botella de Leiden durante 30 segundos de funcionamiento de la máquina electrostática es $q = It$. Por lo tanto, la tensión que provoca el cebado de la descarga disruptiva es $U_{ceb} = q/C = It/C = 3 \cdot 10^4$ V. La corriente en la descarga es $I_{des} = q/\tau = It/\tau = 300$ A. Esta enorme corriente calienta fuertemente el aire y como resultado surge la onda sonora (estruendo).

550. Designemos por Q la carga transmitida a la botella de Leiden por la máquina electrostática por unidad de tiempo. Pasará una chispa entre las esferas cuando la tensión entre las esferas del descargador alcanza el valor de la tensión que provoca el cebado de la carga disruptiva U_{ceb}. El valor U_{ceb} depende de la distancia entre las esferas, de sus radios y de las propiedades del aire. Cuando paralelamente al descargador se conecta una botella de Leiden, entonces $U_{ceb} = Q\tau_0/C$. Para dos botellas conectadas en paralelo, tendremos que $U_{ceb} = Q\tau_1/2C$. Para dos botellas conectadas en serie, tendremos $U_{ceb} = 2Q\tau_2/C$. Por consiguiente, $\tau_1 = 2\tau_0$, $\tau_2 = \tau_0/2$.

551. Un electrón-voltio es igual a $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J.

552. No coincide. Las tangentes a la trayectoria muestran la dirección de la velocidad de la partícula y las tangentes a las líneas de fuerza muestran la dirección de la fuerza que actúa sobre la partícula y por lo tanto, la dirección de la aceleración. Solamente en el campo cuyas líneas de fuerza son rectas, la trayectoria de la partícula coincide con la línea de fuerza, si la velocidad inicial de esta partícula está dirigida por la línea de fuerza.

553. La energía total del electrón es igual a la suma de las energías cinética y potencial. Al aproximarse al anillo, la energía potencial del electrón en el campo del anillo disminuye y debido

a ello aumenta su energía cinética. Pasando a través del anillo, el electrón se aparta de éste. No obstante la energía potencial del electrón aumenta y la velocidad disminuye gradualmente hasta convertirse en cero.

554. Los electrones alcanzan el ánodo con energía de 80 a 74 electrón-voltios, puesto que a lo largo del caldeo directo existe una caída de tensión igual a 6 V. La energía de los electrones cerca del ánodo se determina por la diferencia de potencial recién recorrida y no depende del potencial de la rejilla. El potencial de la rejilla cambia la distribución de las velocidades de los electrones en los puntos intermedios del trayecto e influye en el número de electrones que alcanzan el ánodo.

555. Basándose en la ley de Ohm, tenemos $\mathscr{E} = I_a R_a + U_a$ (fig. 460). La intensidad de la corriente es $I_a = A U_a + B U_a^2$, de donde

$$I_a = \frac{\mathscr{E}}{R_a} = \frac{(AR_a + 1) - \sqrt{(AR_a + 1)^2 + 4\mathscr{E}BR_a}}{2BR_a^2} = 5 \text{ mA}.$$

La segunda raíz de la ecuación cuadrática carece de sentido físico, porque corresponde a $U_a < 0$.

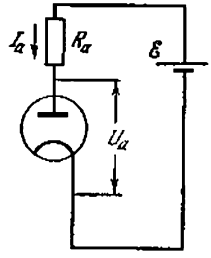


Fig. 460

556. El sistema de ecuaciones que determinan las corrientes i_1 y i_2 tiene la forma:

$$i = i_1 + i_2, \quad i_1 = A_1 U_a + B_1 U_a^2,$$
$$i_2 = A_2 U_a + B_2 U_a^2, \quad U_a = \mathscr{E} - iR,$$

de donde

$$U_a = \frac{-(A_1 + A_2)R - 1 + \sqrt{(A_1 R + A_2 R + 1)^2 + 4\mathscr{E}(B_1 + B_2)R}}{2(B_1 + B_2)R} =$$
$$= 60 \text{ V}.$$

Prescindimos del valor negativo U_a, ya que no corresponde al sentido del problema. Las corrientes incógnitas son

$$i_1 = \frac{1}{(B_1 + B_2) R} [B_1 \mathscr{E} + (A_1 B_2 - A_2 B_1) R U_a - B_1 U_a] = 22{,}2 \text{ mA},$$

$$i_2 = \frac{1}{(B_1 + B_2) R} [B_2 \mathscr{E} + (A_2 B_1 - A_1 B_2) R U_a - B_2 U_a] = 37{,}8 \text{ mA}.$$

557. Siendo el potencial de la rejilla $\mathscr{E}_2 = -6$ V, la corriente que pasa a través de la válvula es $I_2 = U_2/R$ y siendo el potencial de la rejilla $\mathscr{E}_1 = -3$ V es $I_1 = U_1/R$. Por lo tanto el aumento del potencial de la rejilla en $\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2 = 3$ V provoca un aumento de la corriente anódica de la válvula en

$$I_1 - I_2 = (U_1 - U_2)/R = 3{,}5 \text{ mA}.$$

Como la característica de la rejilla de la válvula en la región analizada se considera lineal, entonces el aumento del potencial de la rejilla respecto al cátodo aún en 3 V (desde -3 V hasta 0, estando cerrados en corto-circuito la rejilla y el cátodo), provocará el aumento de la corriente anódica aún más en 3,5 mA. Entonces, la caída de la tensión en la resistencia R aumentará aún en $U_1 - U_2 = 35$ V, o sea, alcanzará $U_0 = U_1 + (U_1 - U_2) = 130$ V y la diferencia de potencial entre el ánodo y el cátodo de la válvula será

$$\mathscr{E} - U_0 = 120 \text{ V}.$$

558. El primer diodo comienza a transmitir la corriente sólo cuando $U_a > 0$, o sea, cuando $V > \mathscr{E}_1$; el segundo, cuando $V > \mathscr{E}_2$

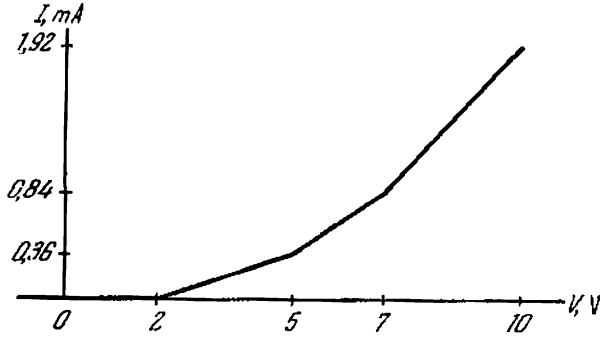


Fig. 461

y el tercero, cuando $V > \mathscr{E}_3$. Por eso el gráfico de dependencia de la corriente total con relación a la tensión tiene la forma de una línea quebrada (fig. 461):

$I = 0$ para $V \leqslant \mathscr{E}_1$,

$I = k(V - \mathscr{E}_1)$ para $\mathscr{E}_1 \leqslant V \leqslant \mathscr{E}_2$,

$I = k(V - \mathscr{E}_1) + k(V - \mathscr{E}_2)$ para $\mathscr{E}_2 \leqslant V \leqslant \mathscr{E}_3$,

$I = k(V - \mathscr{E}_1) + k(V - \mathscr{E}_2) + k(V - \mathscr{E}_3)$ para $\mathscr{E}_3 \leqslant V$.

A veces semejantes circuitos se utilizan en los aparatos de radio para obtener una dependencia funcional dada de la corriente respecto a la tensión.

559. En la fig. 462, A y B son las placas dirigibles; MN es la pantalla; OC, la trayectoria del electrón. El origen del sistema de las coordenadas se encuentra en el punto O.

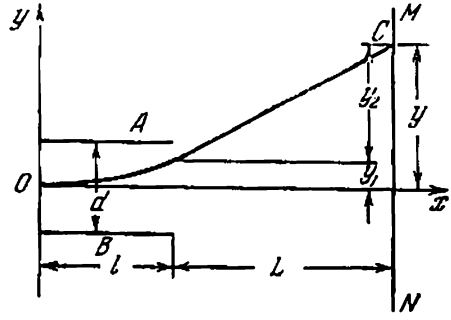


Fig. 462

El electrón, al moverse entre las placas en dirección del eje y se mueve uniformemente acelerado con aceleración $a = eU/md$, donde U es la diferencia de potencial entre A y B. La distancia l a lo largo del eje x, el electrón cubre durante el tiempo $t_1 = l/v_x$; v_x es la componente horizontal de la velocidad del electrón que se determina de la condición $mv_x^2/2 = eU_0$. En un intervalo de tiempo t_1, el electrón se desvía en dirección del eje y en un valor

$$y_1 = \frac{at_1^2}{2} = \frac{eUl^2}{2dmv_x^2}.$$

El movimiento del electrón fuera de las placas se realiza con velocidad constante y dura un tiempo $t_2 = L/v_x$. La velocidad a lo largo del eje y es igual a $v_y = at_1$. La desviación en la región fuera de las placas es

$$y_2 = v_y t_2 = \frac{eUlL}{dmv_x^2}.$$

La desviación completa es

$$y = y_1 + y_2 = \frac{eUl}{dmv_x^2}\left(\frac{l}{2} + L\right) \approx \frac{eUlL}{dmv_x^2} = \frac{UlL}{2U_0 d}.$$

La sensibilidad es igual a

$$q = y/U = lL/2U_0 d.$$

§ 22. CAMPO MAGNETICO DE LA CORRIENTE. ACCION DEL CAMPO MAGNETICO SOBRE LA CORRIENTE Y LAS CARGAS EN MOVIMIENTO

560. En el sistema SI nosotros tenemos

$$[H] = I/L, \quad [I] = I, \quad [r] = L, \quad [j] = I/L,$$

donde I y L son los símbolos de las dimensiones de la corriente y de la longitud, de donde deducimos

en el caso (1) $H = C_1 I/r$; en el caso (2) $H = C_2 j$,

donde C_1 y C_2 son constantes cualesquiera. El cálculo teórico da las siguientes fórmulas exactas:

en el caso (1) $H = 1/2\pi r$; en el caso (2) $H = j/2$.

561. La corriente que pasa por el tubo puede analizarse como la suma de una infinidad de corrientes rectilíneas iguales que están distribuidas uniformemente por la superficie del tubo. La intensidad del campo magnético en cualquier punto del espacio puede representarse como la suma de las intensidades de los campos creados por estas corrientes.

En la fig. 463 se muestra la sección transversal del tubo a lo largo del cual pasa la corriente. Comparemos las intensidades

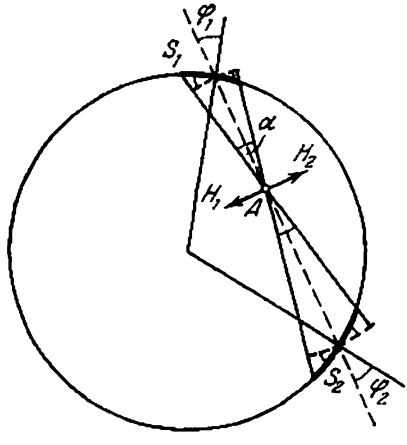


Fig. 463

de los campos magnéticos H_1 y H_2, creadas en el punto A por las corrientes lineales I_1 y I_2 que pasan a través de pequeños arcos S_1 y S_2. Las longitudes de los arcos son iguales a $S_1 = \alpha R_1/\cos\varphi_1$ y $S_2 = \alpha R_2/\cos\varphi_2$, donde R_1 y R_2 son las distancias hasta el punto A. Sin embargo, como vemos en el diseño, $\varphi_1 = \varphi_2$. Por consiguiente, $S_1/S_2 = R_1/R_2$. La corriente

está distribuida uniformemente por el tubo, por eso $I_1/I_2 = S_1/S_2$, de donde $I_1/R_1 = I_2/R_2$.
Las intensidades de los campos magnéticos creadas en el punto A por las corrientes I_1 y I_2 son proporcionales a estas corrientes e inversamente proporcionales a las distancias correspondientes. Tenemos, entonces,

$$H_1 = kI_1/R_1 = kI_2/R_2 = H_2,$$

si H_1 y H_2 están dirigidos en sentidos opuestos. Como para cada parte de la sección transversal del tubo puede escogerse otra parte correspondiente que compense completamente el campo magnético de la primera parte en el punto A, entonces el campo magnético resultante de la corriente que pasa por el tubo, en cualquier punto dentro del tubo, tendrá una intensidad nula.

562. El conductor con una cavidad es equivalente a un conductor compacto por el cual pasa una corriente de densidad j y en volumen que corresponde a la cavidad, además, pasa una corriente de la misma densidad en dirección inversa. La corriente resultante en el volumen indicado será nula, y esto corresponde a la presencia de una cavidad en el conductor compacto.
El campo creado por la corriente de densidad j, en un punto cualquier A de la cavidad, es igual a $B_1 = k \cdot 2\pi jR$ (fig. 464).

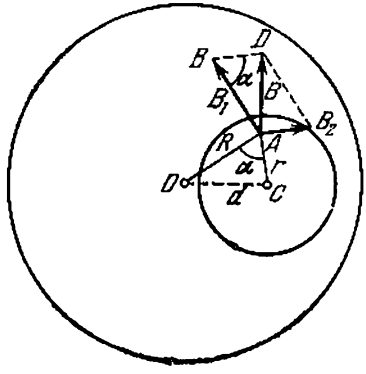


Fig. 464

Aquí R es la distancia desde el eje del conductor hasta el punto A. (Se supone que la corriente pasa en nuestra dirección).
En este mismo punto la corriente que pasa por el volumen que corresponde a la cavidad en sentido contrario crea un campo $B_2 = k \cdot 2\pi jr$. Como vemos de la fig. 464, la inducción total es

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 - 2B_1B_2 \cos \alpha}.$$

Está claro que

$$\cos \alpha = \frac{R^2 + r^2 - d^2}{2Rr},$$

de donde tenemos que la inducción $B = k \cdot 2\pi j d$ es igual para todos los puntos de la cavidad.

563. El $\Delta AOC \infty \Delta BAD$ (fig. 464), puesto que estos triángulos tienen un ángulo igual y los lados que lo forman son proporcionales. Esto significa que $\angle AOC = \angle BAD$. Pero $R \perp B_1$ y por lo tanto $B \perp d$. La inducción del campo magnético en cualquier punto de la cavidad es perpendicular a la línea que une el centro del conductor con el centro de la cavidad. La distribución correspondiente de las líneas está representada en la fig. 465.

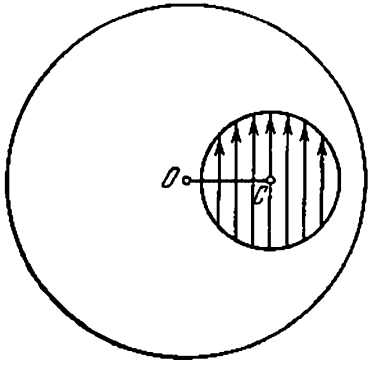


Fig. 465

564. Cualquier elemento del circuito circular Δl se encuentra a una misma distancia R del centro. Además, para cualquier elemento Δl, el radio vector R es perpendicular a Δl, o sea, $\alpha = \pi/2$, sen $\alpha = 1$. De este modo, la inducción del campo magnético ΔB, creado en el centro del círculo por el elemento Δl, es $\Delta B = kI\ \Delta l/R^2$.
La inducción ΔB está dirigida perpendicularmente al plano del círculo y como todos los elementos Δl crean en el centro inducciones igualmente dirigidas ΔB, entonces la inducción resultante del campo magnético se expresa por la suma

$$B = \sum \Delta B = \sum k \frac{I \Delta l}{R^2} = k \frac{I}{R^2} \sum \Delta l$$

Considerando que $\Sigma \Delta l = 2\pi R$, obtenemos que $B = k2\pi I/R$.

565. Determinemos la inducción del campo magnético en el punto A, situado a una distancia d del plano del circuito (fig. 466). La distancia de los elementos Δl del punto A designemos por r.

Examinemos las inducciones ΔB_1 y ΔB_2 creadas por dos elementos del circuito Δl_1 y Δl_2 que se encuentran en los extremos opuestos del diámetro. Como el ángulo α entre r y Δl es igual

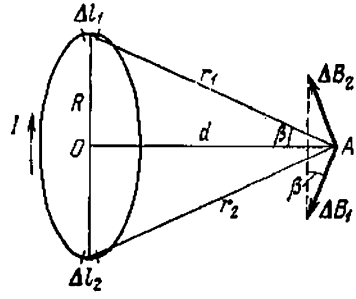


Fig. 466

a $\pi/2$ (como el ángulo entre la generatriz del cono y un elemento de la circunferencia de su base), entonces (véase el problema 564):

$$\Delta B_1 = kI\Delta l_1/r_1^2,$$
$$\Delta B_2 = kI\Delta l_2/r_2^2.$$

Eligiendo $\Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l$ y verificando que $r_1 = r_2$ recibimos que

$$\Delta B_1 = \Delta B_2 = kI\ \Delta l/r^2.$$

La suma geométrica ΔB de los vectores ΔB_1 y ΔB_2 estará dirigida a lo largo del eje de la corriente circular y numéricamente será igual a la suma de las proyecciones de ΔB_1 y ΔB_2 en el eje OA:

$$\Delta B = \Delta B_1 \operatorname{sen}\beta + \Delta B_2 \operatorname{sen}\beta = 2k\frac{I\Delta l}{r^2}\operatorname{sen}\beta.$$

Como $\operatorname{sen}\beta = R/r$, entonces

$$\Delta B = k\frac{2I\Delta l}{r^3}R.$$

Dividiendo todo el circuito circular en pares de elementos correspondientes Δl, obtenemos que la inducción resultante del campo magnético está dirigida a lo largo de la corriente circular y numéricamente es igual a la suma

$$B = \sum \Delta B = \sum k\frac{2I\Delta lR}{r^3} = k\frac{IR}{r^3}\,2\sum \Delta l.$$

Ya que $2\sum \Delta l = 2\pi R$, entonces

$$B = k\frac{IR}{r^3}\,2\pi R = k\frac{2\pi R^2 I}{(R^2+d^2)^{3/2}}.$$

566. El conductor BC no crea campo en el punto M. Según la regla formulada en la observación del problema 564, el campo magnético de cualquier elemento del conductor BC deberá ser perpendicular a la línea BM. Por eso la presencia de un campo diferente de cero en el punto M sería contrario a la simetría del problema, puesto que todas direcciones, perpendiculares a BM, son iguales. Como la intensidad del campo es proporcional a la intensidad de la corriente, entonces al conectar el conductor nosotros tenemos $H_1 = kI$. Los campos de los conductores AB y BD se suman. Por consiguiente, después de conectar el conductor BD, tendremos

$$H_2 = kI + kI/2,$$

de donde resulta

$$H_2/H_1 = 3/2.$$

567. En un punto arbitrario de la línea AB, cualquier elemento pequeño del conductor ACB por el cual pasa la corriente crea un campo magnético perpendicular al plano del diseño (véase el problema 566). El elemento del conductor ADB simétricamente a éste crea un campo igual, pero dirigido en sentido opuesto. El campo de dos elementos cualesquiera, situados simétricamente, debido a lo expuesto arriba, será nulo. Por consiguiente, el campo en un punto cualquier AB creado por todo el conductor, será nulo, ya que los sectores rectilíneos del conductor tampoco crean campos en AB.

568. 1) Las corrientes I y i pasan en el mismo sentido. La fuerza de atracción mutua entre el neumático y conductor cuando la distancia entre ellos es x, es igual a

$$F = \frac{\mu_0 I i}{2\pi x} l.$$

La resultante de las fuerzas de gravedad y elástica de los muelles está dirigida hacia abajo y es $f = 2k(h - x)$. En posición del equilibrio $F = f$, de donde obtenemos una ecuación del segundo grado respecto a x. La solución de la ecuación nos da

$$x_1 = \frac{h}{2} + \sqrt{\frac{h^2}{4} - \frac{\mu_0 I i l}{4\pi k}} \text{ (equilibrio estable);}$$

$$x_2 = \frac{h}{2} - \sqrt{\frac{h^2}{4} - \frac{\mu_0 I i l}{4\pi k}} \text{ (equilibrio inestable).}$$

Si $h^2/4 < \mu_0 I i l/4\pi k$, o sea, $k < \mu_0 I i l/\pi h^2$, el conductor se atraerá al neumático.

2) Las corrientes I y i pasan en sentidos opuestos. El conductor se repele y el equilibrio será estable a una distancia

$$x = \frac{h}{2} + \sqrt{\frac{h^2}{4} + \frac{\mu_0 I i l}{4\pi k}}.$$

569. Las fuerzas que actúan sobre los lados AB y DC son iguales en magnitud y tienen direcciones opuestas; su suma es nula. La fuerza F_1 con que la corriente I actúa sobre AD, es

$$F_1 = \frac{\mu_0 I I_1}{2\pi x} a.$$

La fuerza F_2 que actúa sobre BC, es

$$F_2 = \frac{\mu_0 I I_1}{2\pi (x+h)^2} a.$$

Las fuerzas F_1 y F_2 están dirigidas a lo largo de una recta en sentidos opuestos siendo $F_1 > F_2$. Por lo tanto, el circuito se atraerá al conductor con una fuerza

$$F = F_1 - F_2 = \frac{\mu_0 I I_1 a h}{2\pi x (x+h)}.$$

570. Designemos por l la longitud del lado del cuadrado. El momento de las fuerzas del campo magnético que desplaza el cuadrado de posición vertical, es

$$M = BIl^2 \cos \alpha.$$

Sobre el cuadro que está inclinado bajo un ángulo α de la posición vertical, actúa también el momento de las fuerzas de gravedad que tiende a volver el cuadro a la posición vertical. Este momento es

$$M' = 2\rho g S l^2 \operatorname{sen} \alpha.$$

La condición de equilibrio del cuadro es

$$M = M', \quad BIl^2 \cos \alpha = 2\rho g S l^2 \operatorname{sen} \alpha,$$

de donde hallamos la inducción del campo magnético: $B = \frac{2\rho g S}{I} \operatorname{tg} \alpha$.

571. El momento magnético M que actúa sobre la bobina corta por parte del campo del solenide, es $M = INSB$, donde $B = \mu_0 nI$. De la condición de equilibrio de la balanza $M = PL$ determinamos que

$$I = \sqrt{\frac{PL}{\mu_0 nNS}}.$$

572. Bajo la influencia del campo magnético, el anillo gira de modo que las líneas de fuerza del campo estarán perpendiculares al plano del anillo y formarán con la dirección de la corriente un sistema a derechas. Entonces la extensión del anillo será máxima. Utilizando el método aplicado en la solución del problema 415, obtenemos $F = BIR$.

573. Sobre un sector del anillo Δl actúa la fuerza $\Delta F = BI\,\Delta l$ (fig. 467). Descomponemos esta fuerza en las componentes ΔF_1 y Δf; ΔF_1 quedará en el plano del anillo y $\Delta f = \Delta F$ sen α será normal a su plano. La resultante de las fuerzas ΔF_1 que

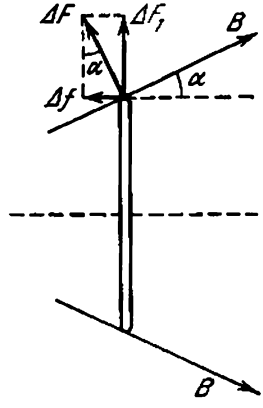


Fig. 467

actúan sobre los sectores aislados del anillo es nula. Estas fuerzas sólo estiran el anillo. La fuerza total f que actúa sobre el anillo es igual a la suma de las fuerzas Δf:

$$f = \sum_i BI \text{ sen } \alpha \cdot \Delta l_i = BI\, 2\pi R \text{ sen } \alpha.$$

574. Las fuerzas que actúan sobre los lados BC y AD son perpendiculares al desplazamiento de estos lados, por eso ellas no realizan

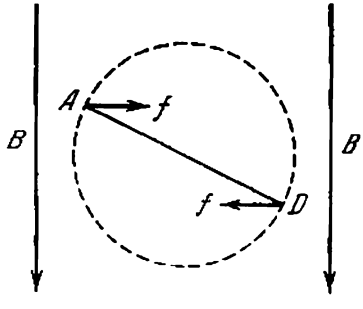


Fig. 468

trabajo. Las fuerzas que actúan sobre los lados AB y CD son constantes, forman un ángulo recto con la dirección del campo y son numéricamente iguales a $f = BI\,a$ (fig. 468). El trabajo

que buscamos será igual al doble del producto de la fuerza por el desplazamiento de los lados AB ó CD en dirección de la fuerza. Al girar el circuito en 180° este desplazamiento es igual a b. Por consiguiente, $A = 2BIab$.

575. Descomponemos la velocidad de electrón en las componentes: $v_{\parallel}$ paralelamente a B y $v_{\perp}$ perpendicular a B (fig. 469). $v_{\parallel}$ no varía en valor ni en dirección, puesto que la fuerza de Lorentz

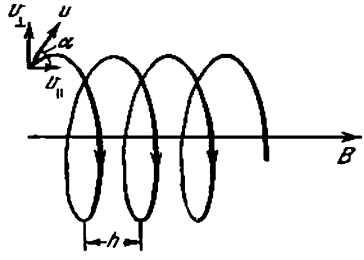


Fig. 469

no actúa sobre la partícula que tiene velocidad a lo largo del campo. $v_{\perp}$ varía en dirección ya que gracias a esta componente sobre el electrón actúa la fuerza de Lorentz, constante en valor y perpendicular a la velocidad $v_{\perp}$. Por eso la aceleración del electrón es también constante en valor y perpendicular a la velocidad $v_{\perp}$. Pero el movimiento con velocidad y aceleración constantes, perpendicular a esta velocidad, es nada más que un movimiento circular uniforme.

De este modo, al movimiento uniforme de traslación a lo largo de B se sobrepone el movimiento circular en el plano perpendicular a B. Como resultado surge el movimiento por la espiral con paso $h = v_{\parallel}\tau$, donde τ es el tiempo de una vuelta del electrón por la circunferencia, cuyo radio, que es fácil de hallar, es $R = mv \operatorname{sen} \alpha/Be$. Como $\tau = 2\pi R/v_{\perp} = 2\pi m/Be$, entonces $h = (2\pi m/Be)\, v \cos \alpha$.

576. Como consecuencia de la acción de la fuerza de Lorentz, los electrones se desplazarán hacia el extremo de la cinta. Por eso, uno de los extremos de la cinta estará cargado negativa y el otro positivamente; en el interior de la cinta aparecerá un campo eléctrico adicional, cuya intensidad E estará dirigida perpendicularmente a la corriente. El movimiento de los electrones permanecerá hasta el momento en que la fuerza de Lorentz no se hará igual a la fuerza que actúa sobre el electrón por parte del campo eléctrico: $eE = Bev$, de donde: $E = Bv$. La diferencia de potencial $\varphi_A - \varphi_B = Ea = Bva$, o, como resulta, $I = nevS$, $\varphi_A - \varphi_B = BaI/neS$.

577. La fuerza de Lorenzt actúa tanto sobre los electrones libres, como sobre los iones positivos que se encuentran en los nudos

de la rejilla cristalina, ya que tanto los electrones como los iones se mueven en un campo magnético. La fuerza f actúa sobre los iones libres según la regla de la mano izquierda, estará dirigida como muestra la fig. 470. Los electrones se mueven respecto a la rejilla, cargándose de este modo una superficie

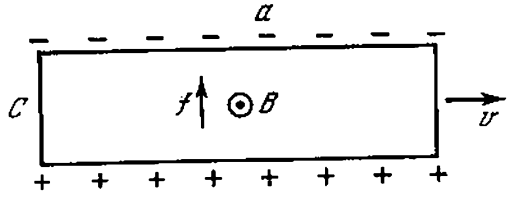


Fig. 470

lateral del paralelepípedo negativamente y la otra positivamente. En la barra surge un campo eléctrico y cuando la intensidad de este campo satisfará la igualdad $eE = Bev$, el movimiento de los electrones con relación a la rejilla cesa. La intensidad incógnita es $E = Bv$. La densidad de cargas σ determinamos de la relación $\sigma/\varepsilon_0 = E$. Por lo tanto, $\sigma = Bv\varepsilon_0$.

578. Para que no aparezca un campo electrostático, los electrones en el movimiento giratorio del cilindro no deberán desplazarse respecto a la rejilla cristalina. Este desplazamiento no tendrá lugar, si la fuerza de Lorentz que actúa sobre los electrones es igual a $m\omega^2 r$, es decir, $m\omega^2 r = B\,ev$. Como $v = \omega r$, entonces $B = m\omega/e$. El campo debe estar dirigido en sentido del movimiento de traslación del Ampére (o de saca-corchos), cuyo apoyo gira en la misma dirección que el cilindro.

579. $E = \frac{m\omega^2 r}{2} \mp \omega r B$, donde la carga del electrón es igual a $(-e)$ E es positivo si está dirigido desde el ojo del cilindro. Si la dirección de B y la dirección de rotación del cilindro forman un sistema a derechas (o el tornillo dextrógiro), entonces es necesario tomar el signo «menos», en caso contrario, el signo «más».

580. Puesto que los iones pasan a través de los campos perpendiculares entre sí sin desviación, entonces $Ee - Bev = 0$, de donde $v = E/B = 5000$ m/s. Posteriormente cada ion se moverá por una circunferencia del diámetro $2R = 2mv/B'e$, y donde m es la masa del ion. Por lo tanto, la distancia incógnita es $\Delta(2R) = \frac{2\Delta m}{e}\frac{v}{B'}$. Si $\Delta m = 2$ unidades de masa atómica $= 2 \cdot 1{,}66 \times 10^{-27}$ kg, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, $v = 5000$ m/s, $B' = 0{,}09$ N/(A·m), entonces

$$\Delta(2R) = \frac{2 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} \cdot \frac{5000}{0{,}09} = 1{,}15 \cdot 10^{-3}\ \text{m} = 1{,}15\ \text{mm}.$$

§ 23. INDUCCION ELECTROMAGNETICA. CORRIENTE ALTERNA

581. 1,07 mV; el mayor potencial existe en el ala occidental. Sobre todas las cargas elementales del avión actúa la fuerza de Lorentz. Esta fuerza provocará el movimiento de los electrones de conducción del oeste al este. El movimiento de los electrones cesa, cuando el trabajo de la fuerza de Lorentz se hará igual al trabajo de las fuerzas del campo eléctrico creado por los electrones desplazados, o sea, cuando se verificará la condición

$$U = -vBl \qquad (1)$$

(el signo «menos» significa que el potencial disminuye en dirección del movimiento de los electrones), donde l es la longitud de las asas; B, la inducción del campo magnético; v, la velocidad del movimiento del avión; U, la diferencia de potencial entre los extremos de las alas. Subrayamos que la igualdad (1) es equivalente a la relación $U = -\Delta\Phi/\Delta t$, puesto que $vl = \Delta S/\Delta t$ es el área que ocupan las alas del avión por unidad de tiempo, y si $B = \text{const}$

$$Bvl = B\Delta S/\Delta t = \Delta\Phi/\Delta t$$

es el valor del flujo de inducción magnética interceptado por las alas del avión en unidad de tiempo.

582. Los electrones de conducción del conductor AB se mueven con velocidad v encontrándose en un campo magnético y, por consiguiente, sobre ellos actúa la fuerza de Lorentz dirigida a lo largo del conductor desde el punto B hasta el punto A. En este caso la fuerza de Lorentz que actúa por unidad de carga es $F = Bv$, ya que $v \perp B$. La fuerza electromotriz $\mathscr{E}$, según la definición, es numéricamente igual al trabajo realizado sobre la carga unitaria positiva durante su movimiento por un circuito cerrado. Como la fuerza de Lorentz actúa solamente sobre la sección AB, $\mathscr{E} = Bvl$. En el circuito surge una corriente

$$I = \mathscr{E}/(r + R) = vBl/(R + r).$$

Nosotros nos convencemos muy fácilmente de que el trabajo mecánico realizado por las fuerzas exteriores se transforma completamente en calor de Joule. El campo eléctrico en el circuito tiene una naturaleza electrostática, o sea, las cargas superficiales son la fuente de este campo. Para hallar la diferencia de potencial $\varphi_A - \varphi_B$, apliquemos la ley de Ohm a la sección del circuito AB:

$$\mathscr{E} + \varphi_A - \varphi_B = Ir, \quad \varphi_A - \varphi_B = -vBlR/(R + r).$$

Por consiguiente, $\varphi_A < \varphi_B$. La intensidad E del campo electrostático en un conductor móvil es igual a

$$E = (\varphi_B - \varphi_A)/l = BvR/(R + r)$$

y está dirigida de B a A.

583. Supongamos que la velocidad de movimiento del conductor en un determinado momento de tiempo es v. Entonces la f.e.m. en este momento de tiempo será igual a $\mathscr{E} = Blv$, y la intensidad de la corriente, $I = Blv/R$. Como consecuencia de la acción del campo magnético sobre el conductor con la corriente aparece la fuerza f que obstaculiza la caída libre del conductor: $f = B^2l^2v/R$. Por consiguiente, en el momento de tiempo dado, la aceleración se halla de la relación

$$ma = mg - f = mg - B^2l^2v/R.$$

Vemos fácilmente que la aceleración a disminuye a medida que aumente la velocidad y, en el momento cuando se produce la igualdad de las fuerzas $f = mg$, la aceleración se hará nula. El conductor, a partir de este momento, se moverá con velocidad constante v_k igual a $v_k = mgR/B^2l^2$.

584. La f.e.m. inducida que aparece en el conductor es $\mathscr{E} = Blv$. La carga en las armaduras del condensador se halla de la relación: $Q = \mathscr{E}C = BlvC$. La corriente que pasa por el circuito es $I = \Delta Q/\Delta t = BlC\Delta v/\Delta t = BlCa$, donde a es la aceleración desconocida. Como consecuencia de la interacción de esta corriente con el campo magnético surge la fuerza F_1 que actúa sobre el conductor móvil. Basándose en la regla de Lentz, esta fuerza estará dirigida en sentido opuesto a la fuerza F. El valor $F_1 = BIl = B^2l^2Ca$. La aceleración incógnita puede hallarse de la relación: $ma = F - F_1$, de donde $a = F/(m + B^2l^2C)$ es un valor constante. El trabajo de la fuerza F en el trayecto S se utilizará para aumentar la energía cinética del conductor y la energía electrostática del condensador.

585. Durante la variación del flujo magnético que penetra en el cuadro en un pequeño valor $\Delta\Phi$ dentro de un intervalo pequeño de tiempo Δt, en éste se induce una f.e.m. $\mathscr{E} = -\Delta\Phi/\Delta t$ y pasa una corriente que puede considerarse constante gracias al pequeño Δt. Por lo tanto, la carga que pasa por el aparato durante el tiempo Δt es

$$\Delta q = \mathscr{E}\Delta t/R = -\Delta\Phi/R,$$

donde R es la resistencia del cuadro; la carga depende sólo de la variación del flujo durante el tiempo Δt. La carga total que pasa por el aparato es igual a la suma de las cargas elementales Δq:

$$Q = \sum \Delta q = -\sum (\Delta\Phi/R) = -(\sum \Delta\Phi)/R.$$

La variación del flujo magnético en ambos casos tiene el mismo signo (el flujo disminuye), pero en el primer caso el flujo varía de un determinado valor positivo a otro menor que el valor positivo. En el segundo caso la variación del flujo tiene lugar desde el mismo valor inicial hasta cero y luego hasta un cierto valor negativo. De este modo, en el segundo caso, la variación total del flujo es mayor que en el primero y por consiguiente, en el segundo caso la carga que pasa por el aparato es mayor.

586. Basándose en la ley de inducción electromagnética (de Faraday) y en la ley de Ohm, tenemos

$$\Delta Q = I\,\Delta t = \Delta\Phi/R \text{ ó } Q = (\Phi - \Phi_0)/R.$$

Puesto que el flujo magnético inicial es $\Phi_0 = BSn$ y el final es $\Phi = 0$, la cantidad de electricidad que pasa será $Q = BSn/R$.

587. Como la f.e.m. inducida es $\mathscr{E} = -\Delta\Phi/\Delta t$, entonces

$$I_{\text{ind}} = -\frac{1}{R}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}, \qquad (1)$$

donde Φ es el flujo magnético que penetra en el circuito $ABCD$. Si prescindimos de la inductancia de este circuito, resulta

$$\Delta\Phi = -\frac{\mu_0 I ab\Delta x}{2\pi x(x+b)},$$

donde Δx es la distancia en que se desplaza el circuito durante el tiempo Δt. Haciendo en esta igualdad $\Delta x = v\,\Delta t$ y sustituyendo la expresión encontrada en (1), obtenemos

$$I_{\text{ind}} = \frac{\mu_0 ab}{2\pi x(x+b)}\frac{Iv}{R}.$$

La corriente I_{ind} estará dirigida en sentido horario.

588. Según la ley de Faraday tenemos $\mathscr{E}_i = \Delta\Phi/\Delta t = kS$. La f.e.m. inducida es numéricamente igual al trabajo realizado por el campo eléctrico para desplazar la carga unitaria positiva a lo largo de una espira, o sea, $\mathscr{E}_i = 2\pi r\cdot E$, de donde $E = \mathscr{E}_i/2\pi r$. De este modo recibimos finalmente que

$$E = k\pi r^2/2\pi r = kr/2.$$

Es necesario subrayar que el campo eléctrico dado no se crea por las cargas eléctricas, pero sí por el campo magnético que cambia con el tiempo. Recordamos que el trabajo realizado por un campo electrostático para desplazar una carga eléctrica por un circuito cerrado, es siempre nulo. Nosotros entendemos por el campo electrostático un campo eléctrico creado por cargas electrostáticas.

589. Dividamos el anillo en $n = (b - a)/\delta$ anillos pequeños de δ de ancho cada uno. Analicemos un anillo pequeño de altura h, de radio interno x y radio externo $(x + \delta)$. Si δ es pequeño en comparación con x, entonces la resistencia de tal anillo puede expresarse por la fórmula

$$R = \rho 2\pi x/\delta h.$$

El valor de la f.e.m. inducida que actúa dentro de este anillo (a condición de que $\delta \ll x$) es $\mathscr{E} = \Delta\Phi/\Delta t = \pi x^2 k$. La corriente que pasa por tal anillo es

$$\Delta I = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{\pi x^2 k\delta h}{\rho\cdot 2\pi x} = \frac{k\delta h x}{2\rho},$$

Para determinar la intensidad de la corriente que pasa por todo el anillo es necesario determinar cuál es la suma del siguiente tipo

$$I = \frac{kh\delta}{2\rho}\{a + (a+\delta) + (a+2\delta) + \ldots + [a+(n-1)\delta]\}.$$

La expresión entre paréntesis es una progresión aritmética. Debido a ello tenemos

$$I = \frac{kh}{2\rho}(b-a)\frac{2a+b-a-\delta}{2}.$$

Este resultado será tanto más exacto, cuanto menor es el valor δ. Suponiendo que δ tienda a cero, recibimos

$$I = \frac{kh}{4\rho}(b^2 - a^2).$$

590. En la fig. 471 se indica la dirección del campo magnético y la f.e.m. inducida $\mathscr{E}$ (para $k > 0$). La mitad derecha del anillo tiene resistencia R_2 y la izquierda, la resistencia R_1. La f.e.m.

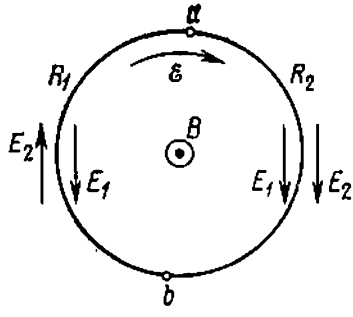


Fig. 471

inducida fue determinada en el problema 588: $\mathscr{E} = k\pi r^2$. De acuerdo con la ley de Ohm, la intensidad de la corriente es

$$I = \mathscr{E}/(R_1 + R_2) = k\pi r^2/(R_1 + R_2).$$

Como sabemos el campo eléctrico se crea por las cargas eléctricas (campo electrostático), así como por el campo magnético que cambia con el tiempo (campo rotacional). Designemos por φ_a y φ_b los potenciales del campo electrostático en los puntos a y b, respectivamente. Basándose en la ley de Ohm para la mitad derecha del anillo podemos escribir

$$\varphi_a - \varphi_b + 1/2\mathscr{E} = IR_2,$$

y para la mitad izquierda,

$$\varphi_a - \varphi_b + 1/2\mathscr{E} = IR_1;$$

de donde hallamos que

$$\varphi_a - \varphi_b = k\pi r^2 \frac{R_2 - R_1}{2(R_2 + R_1)}. \qquad (1)$$

De este modo, si $R_2 > R_1$, entonces $\varphi_a > \varphi_b$. De (1) hallamos fácilmente la intensidad del campo electrostático E_1:

$$E_1 = \frac{\varphi_a - \varphi_b}{\pi r} = kr \frac{R_2 - R_1}{2(R_2 + R_1)}.$$

La intensidad del campo eléctrico E_2 creado por la variación del campo magnético con el tiempo, fue calculada en el problema 588. Esta es igual a $E_2 = kr/2$. (En la figura se indica la dirección de las intensidades en la mitad derecha y en la mitad izquierda para el caso cuando $R_2 > R_1$.)

591. En el circuito $ABCD$ actúa la f.e.m. inducida $\mathscr{E}_1 = ka^2$ y en el circuito $BEFC$ actúa $\mathscr{E}_2 = ka^2/2$. Un circuito equivalente elemental con pilas que sustituyen las f.e.m. inducidas, para

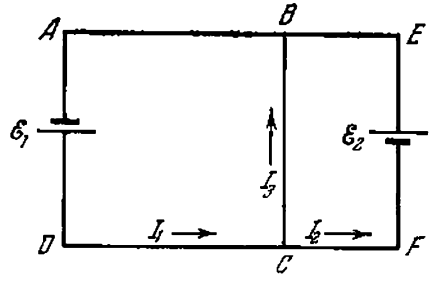


Fig. 472

nuestro circuito tiene la forma representada en la fig. 472. Basándose en la ley de Ohm, podemos escribir

$$I_3 ar = \mathscr{E}_1 - I_1 3ar = I_2 2ar - \mathscr{E}_2.$$

Como consecuencia de conservación de la carga y la constancia del potencial tenemos $I_1 = I_2 + I_3$. Del sistema de las ecuaciones dado pueden hallarse con facilidad todas las tres corrientes:

$$I_1 = \frac{6\mathscr{E}_1 + 2\mathscr{E}_2}{22ar}, \quad I_2 = \frac{2\mathscr{E}_1 + 8\mathscr{E}_2}{22ar},$$

$$I_3 = \frac{2\mathscr{E}_1 - 3\mathscr{E}_2}{11ar},$$

Tomando en consideración las expresiones para $\mathscr{E}_1$ y $\mathscr{E}_2$, tendremos

$$I_1=\frac{7}{22}\frac{ka}{r}, \quad I_2=\frac{3}{11}\frac{ka}{r},$$
$$I_3=\frac{1}{22}\frac{ka}{r}.$$

592. La diferencia de potencial entre cualesquiera puntos del anillo deberá ser nula. Pues, en el caso contrario llegaremos a la contradicción aplicando la ley de Ohm a una sección corta y a una sección larga del anillo. Esto es también evidente del punto de vista de la simetría. La ausencia de la diferencia de potencial significa que el campo electrostático dentro del anillo es nulo. La corriente aparece debido a la presencia de la f.e.m. de inducción distribuida uniformemente a lo largo del anillo: $I = e_i/r = \mathscr{E}_i/R$, donde e_i y $\mathscr{E}_i$ son las f.e.m. inducidas en las secciones corta y larga del anillo; r y R son las resistencias de las secciones respectivamente. A pesar de la ausencia de diferencia de potencial entre los puntos A y B, el electrómetro indicará una diferencia de potencial entre la barra y la armadura. El problema reside en el hecho de que en los conductores AC y BD la corriente es nula. Por consiguiente, en cada punto de estos conductores, el campo eléctrico extraño de origen inducida se equilibra por la intensidad del campo electrostático que surge debido a la redistribución de las cargas en los conductores bajo la influencia de la f.e.m. inducida. El trabajo de las fuerzas electrostáticas durante el movimiento por el circuito cerrado $ACDBA$ es nulo. En la sección AB no existe campo electrostático. Durante el movimiento de una carga por los conductores AC y BD el trabajo de las fuerzas electrostáticas es igual a la f.e.m. inducida en estos conductores y tiene signo contrario. Por lo tanto, para que el trabajo de las fuerzas electrostáticas, a lo largo de un circuito cerrado, sea nulo es necesario que la diferencia de potencial entre los puntos C y D sea igual a f.e.m. inducida en los conductores AC y DB y coincida con ésta en signo. Como la f.e.m. inducida en el circuito cerrado $ACDBA$ es nula (el campo magnético no penetra en este circuito), entonces en la sección AB la f.e.m. inducida es igual en la magnitud y contraria en el signo a la f.e.m. en los conductores AC y BD, si prescindimos del trabajo de las fuerzas ajenas de inducción en la sección entre la barra y la armadura del electrómetro en comparación con el trabajo en los conductores AC y BD. Por eso el electrómetro indicará una diferencia de potencial aproximadamente igual a la f.e.m. en la sección AB.

593. Este problema se distingue del 592 en que la diferencia de potencial $U_A - U_B$ no es nula. Escribamos la ley de Ohm para todas las tres secciones del conductor designando las corrientes en las secciones ADB, AKB y ACB por I_1, I_2, I_3 y las f.e.m. inducidas por $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$, $\mathscr{E}_3$, respectivamente:

$$I_1=\frac{\mathscr{E}_1+U_A-U_B}{R_1}, \quad I_2=\frac{\mathscr{E}_2+U_B-U_A}{R_2},$$
$$I_3=\frac{\mathscr{E}_3+U_A-U_B}{R_3}.$$

En virtud de la conservación de la carga y de la condición de estabilidad podemos escribir que $I_2 = I_1 + I_3$. Sumando las dos primeras ecuaciones, recibimos

$$I_1R_1 + I_2R_2 = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 = \mathscr{E}.$$

Al restar la primera ecuación de la tercera, obtenemos

$$I_3R_3 - I_1R_1 = \mathscr{E}_3 - \mathscr{E}_1.$$

Pero la f.e.m. inducida en el circuito $ACBDA$ es nula, porque el campo magnético no penetra en él. Por lo tanto,

$$\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_3, \; I_3R_3 - I_1R_1 = 0.$$

El sistema de ecuaciones da el siguiente valor para la corriente incógnita

$$I_3 = \frac{\mathscr{E}R_1}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}.$$

594. Siendo la resistencia R_3 diferente de cero, podemos hallar de las ecuaciones del problema 593:

$$I_1 = \frac{\mathscr{E}R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}, \quad I_2 = \frac{\mathscr{E}(R_1 + R_3)}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}.$$

$$I_3 = \frac{\mathscr{E}R_1}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}.$$

Si $R_3 = 0$, entonces $I_1 = 0$, $I_2 = \mathscr{E}/R_2 = I_3$. En el caso general tendremos

$$U_A - U_B = -\frac{\mathscr{E}R_1^2R_3}{(R_1 + R_2)(R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3)}.$$

Cuando $R_3 = 0$,

$$U_A - U_B = -\frac{\mathscr{E}R_1}{R_1 + R_2},$$

siendo $U_A - U_B = -\mathscr{E}_1$ (ya que en la sección ADB $I_1 = 0$), de donde $\mathscr{E}_1$ es la f.e.m. inducida en la sección ADB.

595. En los conductores que forman el circuito, como consecuencia de la variación del campo magnético con el tiempo, aparece un campo eléctrico (rotacional, o sea, no electrostático). El trabajo de este campo eléctrico, gastado para desplazar una carga positiva a lo largo de todo el circuito, es numéricamente igual a la f.e.m. inducida que designamos por $\mathscr{E}_1$. Esta puede determinarse basándose en la ley de Faraday y considerando la variación del flujo magnético relacionado con la variación de la inducción magnética con el tiempo. De esta manera recibimos

$$\mathscr{E}_1 = k(S_0 + lvt).$$

Además, durante el movimiento del conductor en un campo magnético surge una f.e.m. como resultado de la acción de la fuerza de Lorentz sobre las cargas del conductor. Esta f.e.m. $\mathscr{E}_2$ es

$$\mathscr{E}_2 = vBl = vl(B_0 + t).\ k$$

La f.e.m. resultante $\mathscr{E}$ que actúa dentro del circuito es igual a

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 = k(S_0 + lvt) + vl(B_0 + kt).$$

$\mathscr{E}$ puede obtenerse de la ley de Faraday, teniendo en cuenta simultáneamente ambas causas que provocan su surgimiento. Es necesario escribir que $\mathscr{E} = \Delta\Phi/\Delta t$, donde $\Phi = (B_0 + kt) \times \times (S + vlt)$. Como

$$\Delta\Phi = [B_0 + k(t + \Delta t)][S_0 + vl(t + \Delta t)] - (B_0 + kt)(S_0 + vlt) = \\ = B_0 vl\Delta t + kS_0\Delta t + 2kvlt\Delta t + kvl(\Delta t)^2$$

Entonces

$$\Delta\Phi/\Delta t = B_0 vl + kS_0 + 2kvlt + \Delta t\, kvl.$$

Cuando Δt tiende a cero, resulta

$$\Delta\Phi/\Delta t = B_0 vl + kS_0 + 2kvlt.$$

De tal modo

$$\mathscr{E} = k(S_0 + lvt) + vl(B_0 + kt) = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2.$$

Valiéndose de la ley de Ohm, hallamos la intensidad de corriente

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{kS_0 + 2klvt + vlB_0}{R}.$$

La corriente en el circuito está dirigida de a a b.

596. En ambos casos el equilibrio se establecerá si el momento de las fuerzas que actúan por parte del campo magnético sobre la corriente inducida en el anillo, es nulo, o la corriente inducida no existe. Esto tendrá lugar si el plano del anillo está situado a lo largo de las líneas de fuerza del campo (la corriente inducida es nula), o si el plano del anillo es rigurosamente perpendicular a las líneas de fuerza (el momento de las fuerzas es nulo). De acuerdo con la regla de Lentz, en el campo magnético creciente, la primera posición del anillo será estable y la segunda inestable. En el campo magnético decreciente pasa lo contrario, el equilibrio será estable si hay un ángulo recto entre el plano del anillo y las líneas de fuerza, y será inestable cuando el plano del anillo es paralelo a las líneas de fuerza.

597. Según la condición tenemos que la intensidad del campo magnético es directamente proporcional al tiempo: $H = (N/l)\, kt$, entonces la f.e.m. autoinducida es

$$\mathscr{E}_i = \mu_0 (N^2/l)\, kS\ (S = \pi r^2)$$

y está dirigida en contra de la corriente. La tensión en los extremos del solenoide deberá ser igual a

$$U = \mu_0 (N^2/l)\, kS + kRt.$$

En este caso, $I = (U - \mathscr{E}_i)/R = kt$.

598. Si $R = 0$, la f.e.m. autoinducida $\mathscr{E}_i$ permanece constante, puesto que la tensión en los terminales del solenoide es $U = \mathscr{E}_i = \mathscr{E}$. De la solución del problema 597 deducimos que, siendo $\mathscr{E}_i$ constante, la corriente cambia proporcionalmente al tiempo $I = kt$, cuando $k = Ul/\mu_0 SN^2$. Por consiguiente, $I = \frac{\mathscr{E}l}{\mu_0 SN^2}\, t$.

Si la resistencia es finita y no es nula, la corriente aumentará de acuerdo con esta misma ley hasta el momento cuando la caída de tensión IR en la resistencia R será suficientemente pequeña en comparación con $\mathscr{E}_i$.

599. El trabajo de la batería en un tiempo τ será igual a $A = \mathscr{E}Q$, donde Q es la cantidad de electricidad que pasa durante el tiempo τ por el solenoide. La corriente en el solenoide crece directamente proporcional al tiempo: $I = \frac{\mathscr{E}lt}{\mu_0 SN^2}$ (véase la solu-

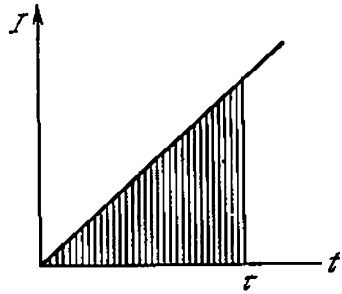


Fig. 473

ción del problema 598). Por eso Q será igual al producto de la intensidad media de la corriente $(I_i + I_f)/2$ $(I_i = 0)$ por el tiempo τ, o será numéricamente igual al área del triángulo sombreado (véase la fig. 473):

$$Q = \frac{\mathscr{E}l\tau^2}{2\mu_0 SN^2}.$$

de donde el trabajo será igual a

$$A = \frac{\mathscr{E}^2 l\tau^2}{2\mu_0 SN^2}.$$

Este trabajo se utilizará para aumentar la energía del campo magnético. Nosotros podemos escribir que $A = W$, donde W es la energía del campo magnético. Tomando en consideración que $H = (N/l)\, I$ y colocando la expresión para la corriente, esta energía puede representarse en la siguiente forma:

$$W = \frac{\mu_0 H^2}{2} Sl.$$

600. Como la resistencia del anillo es nula, su f.e.m. resultante deberá siempre ser nula. Esto puede tener lugar solamente en el caso cuando la variación del flujo magnético total que penetra en el anillo sea igual a cero. Por lo tanto, la variación del flujo magnético externo Φ_0 es igual en magnitud y tiene signo contrario a la variación del flujo magnético creado por la corriente inducida $\Delta\Phi_0 = L\,\Delta I$. Tomando en consideración que el flujo Φ_0 crece desde 0 hasta $\pi r^2 B_0$ y la corriente inducida varía en este caso desde 0 hasta I, recibimos $\pi r^2 B_0 = LI$, de donde resulta que $I = \pi r^2 B_0/L$.

601. El flujo magnético a través del anillo no puede variar (véase el problema 600). Por consiguiente $\Phi = \pi r^2 B$. En el comienzo este flujo se creaba por el campo magnético externo y después de ser desconectado éste, el flujo se creaba por la corriente inducida en el anillo.

602. Si prescindimos de la resistencia óhmica del anillo, el flujo total de la inducción magnética a través del anillo no variará (véase el problema 600). Esto significa que el campo de las corrientes inducidas en el anillo estará siempre dirigido en sentido contrario al campo del electroimán. Por lo tanto, el anillo se repelerá.

603. Si por el devanado del solenoide pasa una corriente I, entonces, por definición del coeficiente de autoinducción L, el flujo de inducción magnética Φ a través del solenoide es

$$\Phi = LI. \qquad (1)$$

El flujo de inducción magnética es

$$\Phi = BSN,$$

donde B es la inducción del campo magnético del solenoide; S, la sección de cada espira; N, el número total de espiras del solenoide. Como sabemos, la inducción del campo magnético de un solenoide largo ($d \ll l_0$) es

$$B = \mu_0 n I,$$

donde n es el número de espiras por unidad de longitud del solenoide. En las condiciones de nuestro problema, tenemos

$$N = \frac{l}{\pi d}, \qquad n = \frac{l}{\pi d} \cdot \frac{1}{l_0}.$$

Por consiguiente, el flujo de la inducción magnética es

$$\Phi = \mu_0 \frac{l}{\pi d l_0} \frac{l}{\pi d} \frac{\pi d^2}{4} I = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{l^2}{l_0} I. \qquad (2)$$

Comparando (1) y (2), encontramos que

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{l^2}{l_0}.$$

604. Por la definición el flujo magnético a través del solenoide es $\Phi = BSN$, donde B es la inducción del campo magnético del solenoide; S, la sección de cada espira; N, el número de espiras del solenoide. Como sabemos (véase el problema 603), la inducción B del solenoide por el cual pasa la corriente I es $B = \mu_0 (N/l) I$, donde l es la longitud del solenoide y, entonces, $\Phi = \mu_0 (N^2/l) SI$. En las condiciones del problema dado $I = \text{const}$, entonces la variación del flujo magnético $\Delta\Phi$ pasa solamente debido a la variación de la longitud del solenoide (de su geometría). En otras palabras, el flujo a través del solenoide ($\Phi = LI$). cambiará debido a la variación del coeficiente de autoinducción L:

$$\Delta\Phi/\Delta t = \Delta (LI)/\Delta t = I\ \Delta L/\Delta t.$$

Podemos mantener la corriente constante durante la extensión del solenoide, si cambiamos la diferencia de potencial en sus extremos en un valor, que en cualquier momento es igual y opuesto a la f.e.m. autoinducida $\mathscr{E} = -\Delta\Phi/\Delta t$. Calculamos $\Delta\Phi/\Delta t$. Para eso es suficiente hallar $\Delta L/\Delta t$:

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = \mu_0 N^2 S \frac{1}{t}\left[\frac{1}{l_0 + vt} - \frac{1}{l_0 + v(t + \Delta t)}\right].$$

Cuando Δt tiende a cero, tendremos

$$\Delta L/\Delta t = \mu_0 N^2 S v/(l_0 + vt)^2.$$

El solenoide se extenderá el doble durante el tiempo t_1 que se puede determinar con facilidad de la igualdad $l_0 + vt_1 = 2l_0$, de donde $t_1 = l_0/v$ y en el momento t_1, tenemos

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = I\frac{\Delta L}{\Delta t} = I\frac{\mu_0 N^2 (\pi d^2/4)\, v}{4l_0^2} \approx 0{,}004\ \text{V}.$$

Es necesario cambiar en este valor la diferencia de potencial en los extremos del solenoide.

605. $$U = B_0 \pi r^2 N\omega \operatorname{sen} \omega t.$$

606. $$U_{AB} = B_0 \pi r^2 N\omega \operatorname{sen} \omega t, \qquad I = U_{AB}/R = (B_0 \pi r^2 N\omega/R) \operatorname{sen} \omega t.$$

607. $$I = B_0 \pi r^2 N\omega \operatorname{sen} (\omega t - \varphi), \qquad \text{donde } \operatorname{tg} \varphi = 1/\omega CR;$$

$$U_{AB} = [B_0 \pi r^2 N\omega \cos (\omega t - \varphi)]/\omega C = [B_0 \pi r^2 N \cos (\omega t - \varphi)]/C;$$

$$U_{BC} = B_0 \pi r^2 N\omega R \operatorname{sen} (\omega t - \varphi).$$

608. 1) Como los extremos A y B están desconectados la corriente no pasa por la sección AC. Por lo tanto, la disminución de la tensión en la sección AC es nula. Por eso la tensión es $U_2 = U_1$.

2) En el caso cuando entre los puntos B y C está aplicada una diferencia de potencial variable, la corriente que pasa por la sección BC crea un flujo magnético variable que crea en la sección AC una f.e.m. inducida. Ya que $L\omega \gg R$, la amplitud de la f.e.m. inducida también será igual a U_1. Por eso, la amplitud de la tensión U_2, entre los puntos A y B, será $2U_1$ (autotransformador de elevación de la tensión).

609. El método más inconveniente es el tercero, porque las corrientes de Foucault circulan en los planos de las espiras del devanado no encontrando en este caso la capa aisladora. El primer método permite librarse de la mayor parte de las corrientes rotacionales, pero no de todas, puesto que en una capa de devanado del autotransformador existen muchas espiras en torno del núcleo y una espira a lo largo de éste. El mejor es el segundo método que se utiliza en la práctica.

610. Si $R = 0$, entonces la corriente I se atrasa en fase con relación a la tensión U en un valor $\pi/2$. Los gráficos $U = U_0$ sen ωt, $I = I_0$ sen $(\omega t - \pi/2)$ y la potencia instantánea $W = IU$ se muestran en la fig. 474. El signo de W cambia cada 1/4 del período. Al valor positivo de W corresponde la energía recibida por la bobina de la fuente. Cuando el valor de W es negativo, la energía fluye inversamente: de la bobina a la fuente. La bobina en un término medio del período, no utiliza potencia; la potencia media es nula.

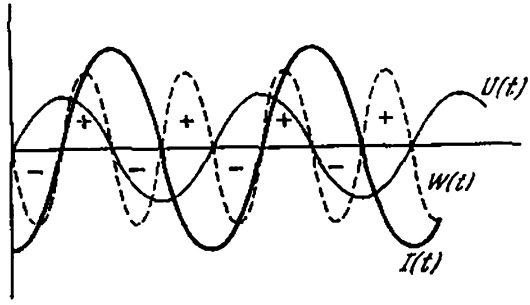


Fig. 474

611. El valor de la corriente continua que desprende en un conductor la misma cantidad del calor que la alterna durante el mismo intervalo de tiempo, se denomina valor efectivo de la corriente alterna. Calculemos la cantidad de calor desprendido en un período
por otro lado, $Q = I_0^2RT/8 + I_0^2RT/8 = I_0^2RT/4$,

$$Q = I_{ef}^2RT, \text{ de donde } I_{ef} = I_0/2.$$

612. Cuando la corriente eléctrica alterna pasa por un conductor, la cantidad de calor desprendido es $W = I_{ef}^2RT$. La expresión para la cantidad de calor desprendido tiene la forma $W = (U_{ef}^2/R)\,t$, que está válida solamente cuando se verifica la ley de Ohm en su forma común: $I = U/R$. En el devanado del transformador la inductancia es muy grande, por eso la ley de Ohm en su forma común y por lo tanto la expresión $W = (U_{ef}^2/R)\,t$ no se verifican. La cantidad de calor desprendido

es pequeña, puesto que es pequeña la intensidad de la corriente y es pequeña también la resistencia óhmica del devanado.

613. Si $L\omega \gg R$, entonces el desfasaje entre la corriente y la tensión es muy grande y la potencial utilizada por la red no puede ser grande. La conexión de los condensadores disminuye este desfasaje, porque la corriente que atraviesa el condensador adelanta la tensión, compensando con ello el retardo de fase en la corriente en los aparatos con gran inductancia. Como resultado, la potencia utilizada por la red aumenta.

614. $W = (U^2 - U_1^2 - U_2^2)/2R$.

615. Designemos por el índice *1* el solenoide con el número de espiras N_1 y por el índice 2, el solenoide con el número de espiras N_2. La inducción del campo magnético del solenoide 1 es

$$B_1 = \mu_0 (N_1/l) I.$$

Este campo crea a través del solenoide *2* un flujo magnético igual a

$$\Phi_{12} = B_1 S N_2 = \mu_0 (N_1 N_2/l) SI,$$

de donde para el coeficiente de inducción mutua L_{12}, obtenemos la expresión

$$L_{12} = \mu_0 (N_1 N_2/l) S. \qquad (1)$$

De modo análogo obtenemos la expresión para el flujo de inducción magnética Φ_{21} creado por el solenoide *2* que penetra en el solenoide *1*:

$$\Phi_{21} = \mu_0 (N_2 N_1/l) SI,$$

de donde, para el coeficiente de inducción mutua L_{21}, obtenemos la expresión

$$L_{21} = \mu_0 (N_2 N_1/l) S. \qquad (2)$$

De (1) y (2) hallamos que $L_{12} = L_{21}$.

616. La velocidad de variación del flujo magnético es constante y por consiguiente la f.e.m. inducida en la bobina también es constante. Si la bobina se conecta en un circuito cerrado, por ella pasará corriente continua. Igualmente como otra cualquiera corriente continua, ella no se establece de una vez. El tiempo de su establecimiento se determina por el coeficiente de autoinducción de la bobina y por su resistencia.

617. El flujo total de la inducción magnética Φ que atraviesa un anillo superconductor, como muestra la solución del problema 600, no podrá variar. Por lo tanto cuando los anillos se acercan el aumento del flujo a cuenta de la inducción mutua se compensa por su disminución como resultado de la reducción de la corriente que pasa por el anillo. Si la distancia entre los anillos es grande, su inducción mutua puede prescindirse y, entonces, $\Phi = LI_0$, donde L es la inductancia del anillo. Cuando los conductores se acercan mucho el uno al otro, entonces el flujo

magnético a través de cada anillo será $\Phi = 2LI$, dondo I es la corriente incógnita. Por lo tanto, $I = I_0/2$, o sea, las corrientes en los anillos disminuyen en dos veces.

618. Supongamos que en el momento inicial la corriente I_{01} en el primer anillo sea mayor que la corriente I_{02} en el segundo anillo. Cuando los anillos se acercan, las corrientes que pasan en ellos se disminuirán (véase el problema 617). En un momento de tiempo determinado, la corriente I_2 se hará nula y por consiguiente, se hará nula la fuerza de interacción de los anillos. No obstante, los anillos seguirán acercándose el uno al otro por inercia. En el segundo anillo se aparecerá una corriente en sentido contrario a la corriente inicial, y la corriente en el primer anillo comenzará a crecer. Entonces, los flujos de la inducción magnética a través de cada anillo permanecerán invariables. Entre los anillos surgirá una fuerza de repulsión y debido a ello, su movimiento comenzará a frenarse.
Los anillos no podrán acercarse muy cerca el uno al otro, porque para esto deben verificarse simultáneamente las igualdades

$$LI_{01} = LI_1 - LI_2, \qquad LI_{02} = LI_1 - LI_2,$$

que es posible solamente si $I_{01} = I_{02}$. Los anillos paran para un instante, a una distancia cualquiera el uno del otro, y después comenzarán a separarse. En este caso, en el segundo anillo va a disminuirse la corriente I_2 hasta el momento en que ésta no se haga igual a cero. Si $I_2 = 0$, la corriente I_1 adquirirá el mismo valor que tenía durante la aproximación de los anillos en el momento del cese de la corriente I. Luego comenzará la atracción de los anillos, etc. El proceso se repitirá periódicamente.

619. La tensión en los terminales de la bobina primaria U_1, si prescindimos de su resistencia óhmica, puede representarse como la suma algebraica de las f.e.m. de autoinducción de este arrollamiento y de la f.e.m. inducida que provoca en éste una corriente que pasa por la bobina secundaria:

$$U_1 = L_1\, \Delta I_1/\Delta t - M\, \Delta I_2/\Delta t.$$

El signo «menos» surge como consecuencia de que las corrientes I_1 y I_2 tienen fases opuestas. Si las corrientes varían por la ley $I_1 = I_{01}$ sen ωt y $I_2 = I_{02}$ sen ωt, entonces

$$\Delta I_1/\Delta t = \omega I_{01} \cos \omega t,$$
$$\Delta I_2/\Delta t = \omega I_{02} \cos \omega t.$$

Como la tensión U_1 está desfasada con relación a la corriente I_1 en un valor $\pi/2$, entonces podemos escribir que $U_1 = U_{10} \cos \omega t$. Dividiendo la expresión para U_1 por $L_1\omega \cos \omega t$, tendremos

$$\frac{U_{01}}{L_1\omega} = I_{01} - \frac{M}{L_1} I_{02}.$$

$U_{01}/L_1\omega$ es el valor de la corriente en vacío, si no tomamos en consideración la resistencia óhmica del arrollamiento.
Prescindiendo del valor de la corriente en vacío, determinamos que $I_{01}/I_{02} = M/L_1$. Aprovechando la expresión para los coe-

ficientes de autoinducción e inducción mutua, obtenemos que $I_1/I_2 = I_{01}/I_{02} = N_2/N_1$.

620. La inducción del campo resultante dentro de los solenoides es igual a

$$B = B_1 \pm B_2 = \frac{\mu_0}{l}(N_1 I_1 + N_2 I_2),$$

donde la elección del signo «más» o «menos» depende del hecho de que las corrientes en los solenoides tienen el mismo sentido o sentido opuesto. La energía W del campo resultante en todo el volumen dentro de los solenoides es

$$W = \frac{B^2}{2\mu_0} Sl = \frac{\mu_0 S}{2l}[(N_1 I_1)^2 \pm 2(N_1 I_1)(N_2 I_2) + (N_2 I_2)^2].$$

Utilizando las expresiones para las inductancias L_1 y L_2 de los solenoides: $L_1 = \mu_0 (N_1^2/l) S$, $L_2 = \mu_0 (N_2^2/l) S$ y la expresión para el coeficiente de inducción mutua: $L_{12} = \mu_0 (N_1 N_2/l) S$, la energía magnética de los solenoides puede escribirse en la siguiente forma

$$W = 1/2 L_1 I_1^2 + 1/2 L_2 I_2^2 \pm L_{12} I_1 I_2$$

El primer término de esta fórmula da la energía propia de al corriente I_1, el segundo término determina la energía propia de la corriente I_2. La presencia del tercer sumando demuestra que la energía de las dos corrientes en los circuitos que tienen una conexión magnética, se diferencia de la suma de las energías propias de las corrientes en el valor $W_{12} = \pm L_{12} I_1 I_2$ que se denomina energía mutua de dos corrientes.

621. Las semiondas positivas de la corriente cargan el condensador hasta una amplitud de tensión igual a la amplitud de la red urbana que es $127\sqrt{2}$ V = 180 V. Cuando el diodo está cerrado

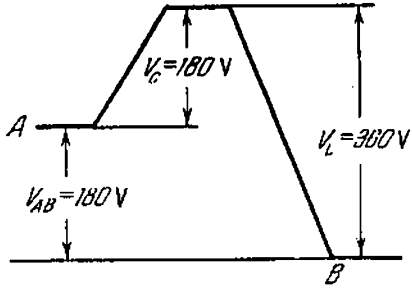


Fig. 475

(no pasa corriente), a él se aplica la tensión de la red (con amplitud de 180 V) más la tensión del condensador cargado. La variación del potencial a lo largo del circuito en este momento de tiempo está representada en la fig. 475. Si el rectificador trabaja

sin carga, el condensador debe calcularse para una tensión disruptiva no menor que 180 V y el diodo, para una tensión no menor que 360 V.

§ 24. MAQUINAS ELECTRICAS

622. Si la frecuencia de la corriente alterna permanece la anterior, esto significa que el número de rotaciones del motor y el generador sigue el mismo. Por eso tampoco cambia la f.e.m. del generador. Para una resistencia externa grande en el circuito pasará corriente pequeña, o sea, se desprenderá una potencia menor. Por consiguiente, la potencia del motor que hace accionar el generador deberá disminuirse.

623. Al conectar el condensador C en el circuito de corriente alterna, tendrá lugar la recarga periódica del condensador. La carga que pasa por los conductores a las armaduras del condensador, será tanto mayor cuanto mayor es la capacidad del condensador C. Como en la mitad del período esta carga deberá sustituirse por la carga de signo opuesto, entonces la corriente que pasa por el circuito deberá ser proporcional a la frecuencia. Así, para la misma amplitud de tensión alterna en el condensador, la corriente en el circuito con el condensador es proporcional a la frecuencia y a la capacidad del condensador ($I \sim \omega c$). Podemos decir que el condensador tiene una «capacitancia» inversamente proporcional a la frecuencia y a la capacidad. Durante la conexión en paralelo tendremos

$$I = k\omega_1 C_{\text{paral}} = k\omega_1 (C_1 + C_2).$$

Durante la conexión en serie tendremos

$$I = k\omega_2 C_{\text{ser}} = k\omega_2 \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2},$$

de donde

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{(C_1 + C_2)^2}{C_1 C_2} = \frac{C_1}{C_2} + 2 + \frac{C_2}{C_1}.$$

624. El trabajo realizado por el campo para desplazar los conductores con corriente (arrollamientos del inducido) no es igual al trabajo total del campo. Además del trabajo para desplazar los conductores, el campo magnético realiza un trabajo para frenar los electrones en el conductor, lo que conduce a la aparición en el arrollamiento del inducido de una f.e.m. de inducción. La primera parte del trabajo es positiva y la segunda, negativa. El trabajo total del campo magnético es nulo. La fuerza electromotriz de la fuente que genera una corriente en el inducido del motor, realiza un trabajo positivo que compensa el trabajo negativo del campo magnético para frenar los electrones. El motor realiza un trabajo, en realidad, a cuenta de la energía de la fuente que alimenta el motor.

625. La potencia consumida por el motor es $W = IU$; $U = \mathscr{E}_i + IR$, donde $\mathscr{E}_i$ es la f.e.m. de inducción que aparece en el inducido. Por consiguiente,

$$W = I\mathscr{E}_i + I^2R,$$

donde I^2R es la cantidad de calor de Joule desprendido en los devanados, y $I\mathscr{E}_i$, la potencia dirigida en contra de la f.e.m. inducida. Esta potencia es igual a la potencia mecánica W_1 desarrollada por el motor. Esta potencia es $W_1 = (U\mathscr{E}_i - \mathscr{E}_i^2)/R$, puesto que $I = (U - \mathscr{E}_i)/R$. Esta expresión tiene un máximo cuando $\mathscr{E}_i = U/2$. Por consiguiente, el valor máximo es $W_1 = U^2/4R = 180$ V. El motor no puede desarrollar una potensia de 200 W.

626. Según la solución del problema 625 $W_1 = U^2/4R$. Si el inducido del motor es inmóvil, la corriente que pasa por el es $I = U/R$. La cantidad de calor desprendido en el devanado por unidad de tiempo es $W = I^2R = U^2/R$. Por lo tanto, $W = 4W_1$.

627. La intensidad de la corriente que pasa por el devanado del motor se determina por la f.e.m. de la red $\mathscr{E}$, por su resistencia r y la f.e.m. inducida $\mathscr{E}_i$ que surge en el inducido del motor: $I = (\mathscr{E} - \mathscr{E}_i)/r$. La diferencia de potencial U en los terminales del motor es igual, en cualquier momento de tiempo, a $\mathscr{E}_i$, puesto que la resistencia del devanado es nula. Por consiguiente, la potencia $W = IU = (\mathscr{E}\mathscr{E}_i - \mathscr{E}_i^2)/r$ se halla por f.e.m. de la red, por su resistencia y $\mathscr{E}_i$.

628. Para un motor de conexión en serie la potencia máxima desarrollada (véase el problema 625) es

$$W_{\text{máx}} = \frac{U^2}{4(R_1 + R_2)}.$$

La potencia que consume el motor es

$$W = UI = U\,\frac{U - \mathscr{E}_i}{R_1 + R_2} = \frac{U^2}{2(R_1 + R_2)},$$

puesto que $\mathscr{E}_i = U/2$. Por lo tanto el coeficiente de rendimiento es $\eta = 1/2$. Para un motor de shunt tenemos $W_{\text{máx}} = U^2/4R_1$. La potencia que consume es

$$W = UI = U\left(\frac{U - \mathscr{E}_i}{R_1} + \frac{U}{R_2}\right) = \frac{U^2(2R_1 + R_2)}{2R_1R_2},$$

por lo tanto,

$$\eta = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1 + 2R_1/R_2},$$

es decir, es menor que el 50%.

629. Para una velocidad de rotación, el momento de las fuerzas externas M que actúan sobre el inducido es igual al momento de las

fuerzas que actúan sobre el inducido por parte del campo magnético. Como este momento es proporcional al producto de la intensidad de la corriente I en el inducido por la inducción del campo magnético B, entonces

$$M = \alpha IB \ (\alpha = \text{const}). \tag{1}$$

La f.e.m. en el devanado del inducido es proporcional a la inducción del campo magnético y al número de rotaciones por segundo

$$\mathscr{E}_i = \beta nB \ (\beta = \text{const}). \tag{2}$$

La tensión U en los terminales del motor es

$$U = IR + \mathscr{E}_i = IR + \beta nB, \tag{3}$$

donde R es la resistencia de los devanados.
Al poner el motor en marcha vacía, el momento de las fuerzas externas se determina solamente por el rozamiento que, siendo buenos cojinetes, es muy pequeño. Por eso I y B, de acuerdo con la ecuación (1), también son pequeños (B es proporcional a I y disminuye junto con la corriente). De la ecuación (3) resulta que a pequeños valores de I y B son posibles sólo grandes valores de n. Por eso el motor adquiere un número de rotaciónes muy grande.

630. Designemos por l la longitud y por d la anchura de la espira (fig. 476). La fuerza F que actúa sobre el conductor de longitud l es igual a $F = IBl$. En este caso la potencia será

$$W = 2IBlv = IBS\omega$$

La intensidad I de la corriente se halla de la expresión $I = (U - \mathscr{E}_i)/R$, donde $\mathscr{E}_i = BS\omega$.

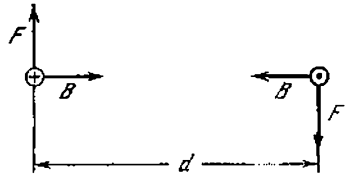


Fig. 476

Definitivamente W puede escribirse definitivamente en la siguiente forma

$$W = \frac{BSU}{R}\omega - \frac{B^2S^2}{R}\omega^2.$$

W alcanza el valor máximo $W_{\text{máx}} = U^2/4R$ si $\omega = U/2BS$. Para esto $\mathscr{E}_i = U/2$ y $I = U/2R$. La batería realiza por uni-

dad de tiempo un trabajo $U^2/2R$. De esta cantidad la mitad se transforma en potencia mecánica y la otra mitad se desprende en forma de calor. En la fig. 477 se muestra gráficamente la dependencia de W con relación a ω.

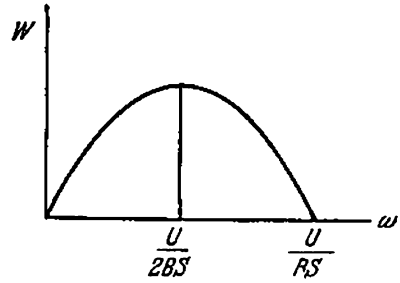


Fig. 477

631. $M = \frac{BSU}{R} - \frac{B^2S^2}{R}\omega$. El momento será nulo, cuando $\omega = U/BS$ (véase la fig. 478). Con todo eso $I = 0$, puesto que $\mathscr{E}_i = U$.

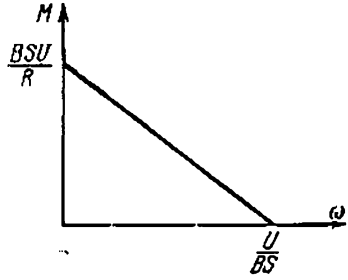


Fig. 478

632. La forma de dependencia de W con relación a B está representada en la fig. 479. La potencia alcanza el valor máximo, cuando $B = U/2S\omega$. Para esto $\mathscr{E}_i = U/2$ y $W_{\text{máx}} = U^2/4R$.

633. El momento giratorio M alcanza su valor máximo $M_{\text{máx}} = U^2/4R\omega$ cuando $B = U/2S\omega$.

634. La potencia de un motor de shunt, como la de un motor de conexión en serie, es $W = (U\mathscr{E}_i - \mathscr{E}_i^2)/R$, donde R es la resistencia del inducido (véase el problema 625). A la potencia

$W = 160$ vatios corresponden dos valores $\mathscr{E}_i$: $\mathscr{E}_1 = 80$ V y $\mathscr{E}_2 = 40$ V. Uno u otro valor se determina mediante las características propias de la construcción del motor.
Por la ley de Faraday $\mathscr{E}_i$ es directamente proporcional al número de rotaciones n del inducido por segundo y a la inducción

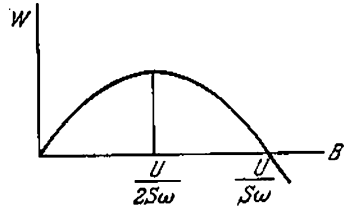


Fig. 479

del campo magnético creado por el estator. Para el motor de shunt esta inducción no depende de la carga. Por eso podemos escribir que $\mathscr{E}_i = an$, donde a es una magnitud constante determinada por la construcción del motor y por la tensión aplicada. Por los dados del problema obtendremos que $a_1 = 8$ y $a_2 = 4$. $\mathscr{E}_i$ no puede superar 120 V. Por lo tanto el número máximo de rotaciones n es igual a $n_1 = 15$ rps o a $n_2 = 30$ rps.

635. Si la tensión en el estator se mantiene constante, entonces, a una velocidad dada de rotación del inducido, la f.e.m. de inducción en éste no dependerá en absoluto del hecho de que el inducido del motor gira gracias a la acción sobre este del campo magnético del estator o de que el inducido se pone en rotación mediante una transmisión mecánica.
La potencia desarrollada por el motor es $W = M\omega$. En nuestro caso $W = 160$ vatios. La f.e.m. de inducción $\mathscr{E}_i$ se halla de la ecuación $W = (U\mathscr{E}_i - \mathscr{E}_i^2)/R$ (véase el problema 625); de donde

$$\mathscr{E}_i = \frac{U}{2} \pm \sqrt{\frac{U^2}{4} - WR}$$

y posee dos valores: $\mathscr{E}_1 = 80$ V y $\mathscr{E}_2 = 40$ V. La f.e.m. del generador también tendrá estos dos valores.
El resultado doble está relacionado con el hecho de que la misma potencia se obtiene siendo el mismo valor del producto $I\mathscr{E}_i$; y al valor de este producto corresponden dos pares de valores posibles de I y $\mathscr{E}_i$. Uno u otro valor de $\mathscr{E}_i$ y por consiguiente, de la corriente, se determina por las características constructivas del motor: número de espiras, su configuración, etc.

636. La potencia mecánica desarrollada por el motor es

$$M \cdot 2\pi n = \frac{U\mathscr{E}_i - \mathscr{E}_i^2}{R}$$

(véase la solución del problema 625). La f.e.m. de inducción en el inducido es $\mathscr{E}_i = kBn$, donde k es el coeficiente de proporcionalidad determinado por la relación entre el número de espiras del devanado del inducido y su área, y B, la inducción del campo magnético del estator directamente proporcional a la corriente. Excluyendo $\mathscr{E}_i$ de estas ecuaciones hallamos que

$$n = \frac{U}{kB} - \frac{2\pi MR}{k^2B^2}.$$

La razón de n en función de B está representada en la fig. 480. Si $B \leqslant B_0 = 2\pi MR/kU$, entonces $n \leqslant 0$. Desde el punto de vista de física esto significa que el inducido del motor no gi-

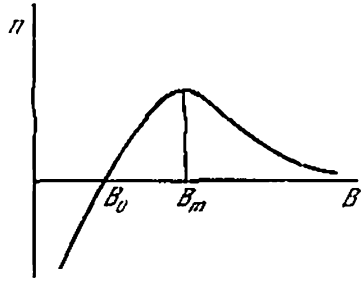


Fig. 480

rará si $B = B_m = 4\pi MR/kU$ el número de rotaciones es el máximo. Por consiguiente, si $B_m > B > B_0$, entonces durante el aumento de la corriente en los devanados del estator, el número de rotaciones aumenta y si $B > B_m$, el número de rotaciones disminuye.

Si el motor funciona sin carga ($M = 0$), el número de rotaciones es $n = \frac{U}{kB}$, es decir, disminuye obligatoriamente con el crecimiento de B.

637. Los campos magnéticos B_1, B_2 y B_3 pueden escribirse de la siguiente forma:

$$B_1 = B_0 \operatorname{sen} \omega t, \quad B_2 = B_0 \operatorname{sen} \left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right),$$

$$B_3 = B_0 \operatorname{sen} \left(\omega t + \frac{4}{3}\pi\right).$$

Escojamos los ejes de las coordenadas x y y como se muestra en la fig. 220 y hallemos la suma de las proyecciones de las

intensidades de los campos en estos ejes:

$$B_x = B_0 \operatorname{sen} \omega t + B_0 \operatorname{sen} \left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right) \cos \frac{2}{3}\pi +$$

$$+ B_0 \operatorname{sen} \left(\omega t + \frac{4}{3}\pi\right) \cos \frac{4}{3}\pi,$$

$$B_y = B_0 \operatorname{sen} \left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right) \operatorname{sen} \frac{2}{3}\pi +$$

$$+ B_0 \operatorname{sen} \left(\omega t + \frac{4}{3}\pi\right) \operatorname{sen} \frac{4}{3}\pi.$$

Haciendo algunas transformaciones, tendremos

$$B_x = \frac{3}{2} B_0 \operatorname{sen} \omega t, \qquad B_y = \frac{3}{2} B_0 \cos \omega t.$$

Estos valores de las proyecciones se verificarán solamente en el caso cuando el vector que representa el campo magnético gira con velocidad angular constante ω en sentido horario.

638. El flujo del vector de la inducción magnética a través del cuadro es igual a

$$\Phi = Bab \cos (\omega - \Omega) t.$$

De acuerdo con la ley de la inducción electromagnética, la f.e.m. inducida en el cuadro es

$$\mathscr{E} = -\Delta\Phi/\Delta t = Bab (\omega - \Omega) \operatorname{sen} (\omega - \Omega) t.$$

Por consiguiente, la corriente en el cuadro varía con el tiempo según la ley

$$I = \frac{Bab (\omega - \Omega) \operatorname{sen} (\omega - \Omega) t}{R},$$

de donde el valor de la amplitud de la corriente I_0 es

$$I_0 = \frac{Bab (\omega - \Omega)}{R}.$$

La dependencia de I_0 en función de Ω es lineal.

639. El momento de las fuerzas M aplicadas al cuadro es

$$M = IBab \operatorname{sen} (\omega - \Omega) t.$$

De acuerdo con la solución del problema 638

$$I = \frac{Bab (\omega - \Omega) \operatorname{sen} (\omega - \Omega) t}{R}.$$

Por lo tanto

$$M = \frac{B^2 a^2 b^2 (\omega - \Omega) \operatorname{sen}^2 (\omega - \Omega) t}{R}.$$

El valor de la amplitud del momento será

$$M_0 = \frac{B^2 a^2 b^2 (\omega - \Omega)}{R}.$$

La semejante dependencia tiene lugar en los motores asincrónicos.

Capítulo IV

Oscilaciones y ondas

§ 25. OSCILACIONES MECANICAS

640. El centro de gravedad de la tabla en posición inicial de equilibrio se encuentra a una altura y_C sobre el nivel horizontal donde se halla el eje del cilindro, siendo $y_C = R + h/2$. Al girar la tabla sin deslizamiento en un pequeño ángulo φ, su centro de gravedad ocupará una posición a altura $y_{C'}$, que se determina con facilidad

$$y_{C'} = \left(R + \frac{h}{2}\right) \cos\varphi + R\varphi \operatorname{sen}\varphi.$$

Subrayamos que, cuando los ángulos φ son pequeños, con precisión hasta el miembro de la infinitesimal de segundo orden tenemos $\operatorname{sen}\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1 - \varphi^2/2$. En efecto, si

$$\cos\varphi = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\varphi} \approx \sqrt{1 - \varphi^2},$$

entonces, designando $\cos\varphi = 1 - x$, obtendremos $1 - \varphi^2 \approx \approx 1 - 2x + x^2$, de donde, prescindiendo de x^2, determinamos que $x \approx \varphi^2/2$ y por lo tanto, $\cos\varphi \approx 1 - \varphi^2/2$. De este modo recibimos

$$y_{C'} = \left(R + \frac{h}{2}\right)\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) + R\varphi^2.$$

Las oscilaciones de la tabla en torno a la posición de equilibrio surgirán si existe la condición $y_{C'} - y_C > 0$, o sea, si

$$\left(R - \frac{h}{2}\right)\frac{\varphi^2}{2} > 0, \qquad \left(R - \frac{h}{2}\right) > 0.$$

Si $R - h/2 < 0$, la tabla caerá.

641. La ecuación de movimiento del peso de masa m tiene la forma

$$ma = -kx,$$

donde x es el alargamiento absoluto del muelle. De la ecuación se deduce que el período de oscilaciones τ puede depender so-

lamente de m y k. La dimensión del coeficiente de rigidez es $[k] = M/T^2$. Por lo tanto, $\tau = C\sqrt{m/k}$, donde C es un coeficiente adimensional. El cálculo exacto conduce a la expresión $\tau = 2\pi\sqrt{m/k}$.

642. El período de las *pequeñas* oscilaciones de un péndulo simple no depende de la amplitud (o sea, del ángulo máximo de desviación) y es igual a $T = 2\pi\sqrt{l/g}$. La independencia del período con relación a la magnitud del ángulo máximo de desviación, es consecuencia del hecho de que la fuerza dirigida a la posición de equilibrio en cada instante de tiempo es proporcional al ángulo α de desviación del péndulo. Si esta proporcionalidad con relación al ángulo de desviación α se conserva incluso para grandes amplitudes, el período de oscilaciones del péndulo imaginario, en cualquier caso sería igual a $T = 2\pi\sqrt{l/g}$. Sin embargo, a grandes ángulos de desviación, la fuerza que hace volver el péndulo es proporcional no al ángulo α, sino al seno de este ángulo. Como sen $\alpha < \alpha$ $(\alpha \neq 0)$, entonces para estas amplitudes la fuerza de recuperación y también la aceleración de un péndulo real, es menor que la de un péndulo que conserva la proporcionalidad entre la fuerza y el ángulo. Por eso el período T_1 de las oscilaciones de un péndulo real es mayor que el del péndulo imaginario, es decir, $T_1 > 2\pi\sqrt{l/g}$. Por consiguiente, con el aumento del ángulo máximo de desviación el período de oscilaciones de un péndulo simple crece.

643. Supongamos que $\tau = g^{\alpha} l^{\beta}$, donde τ es el período de oscilaciones de un péndulo simple y l, su longitud:

$$[\tau] = T, \quad [g^{\alpha}][l^{\beta}] = L^{\alpha} L^{\beta} / T^{2\alpha}.$$

De la última relación resulta que $\alpha + \beta = 0$, $2\alpha = -1$. De este modo, $\tau = f(\varphi)\sqrt{l/g}$, donde $f(\varphi)$ es la función del ángulo máximo φ $(f(\varphi_2) > f(\varphi_1)$, si $\varphi_2 > \varphi_1$, véase el problema **642**). El cálculo muestra que cuando $\varphi \to 0$, $f(\varphi)$ tiene un valor límite 2π. Entonces, el período de pequeñas oscilaciones del péndulo simple es $\tau = 2\pi\sqrt{l/g}$.

644. Designemos por l la longitud del muelle no deformado. Entonces las distancias desde la primera y la segunda vigas hasta el centro de masas se hallan de las relaciones

$$m_1 l_1 = m_2 l_2, \quad l_1 + l_2 = l.$$

Designemos por x y y los desplazamientos de la primera y la segunda vigas en el caso cuando el muelle está comprimido. Entonces, las distancias de las vigas hasta el centro de masas satisfacen la relación

$$m_1 (l_1 - x) = m_2 (l_2 - y) \text{ ó } m_1 x = m_2 y.$$

El muelle está comprimido en un valor

$$x + y = x\left(\frac{m_1 + m_2}{m_2}\right).$$

La fuerza con que el muelle actúa sobre la primera viga es

$$F = k_1 x, \quad \text{donde} \quad k_1 = k\frac{m_1 + m_2}{m_2}.$$

De este modo, el período de oscilaciones de la primera viga es (véase el problema 641)

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}.$$

El período de oscilaciones de la segunda viga será, evidentemente, el mismo.

645. El muelle, después de soltarlo, actúa sobre ambos pesos. El peso situado junto a la pared inicialmente está inmóvil y el segundo peso comienza a moverse. Cuando el muelle estará suelto por completo (o sea, se encontrará en estado no deformado), el segundo peso tendrá una velocidad

$$v = \sqrt{\frac{k}{m_2}}\, x \left(\frac{kx^2}{2} = \frac{m_2 v^2}{2}\right).$$

Por consiguiente, el sistema tendrá una cantidad de movimiento igual a

$$m_2 v = \sqrt{k m_2}\, x.$$

Esta cantidad de movimiento se conservará porque las fuerzas externas no actúan en dirección horizontal.
El centro de masas del sistema se moverá con velocidad

$$v_C = \frac{\sqrt{k m_2}\, x}{m_1 + m_2}.$$

Las cargas oscilarán con relación al centro de las masas con período de oscilaciones

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}$$

(véase el problema 644).

646. El período de oscilaciones del peso en el muelle es $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, donde k es el coeficiente de elasticidad del muelle igual a la relación entre la fuerza que provoca el alargamiento del muelle, y este alargamiento: $k = F/x$. Durante la unión en serie de dos muelles iguales extendidos por la fuerza F, tenemos $k_1 = F/x_1 = F/2x = k/2$, puesto que cada uno de los muelles aumenta su longitud en x. Durante la unión en paralelo de dos muelles iguales, la fuerza F_1 necesaria para aumentar la longitud de cada uno de dos muelles en x, deberá ser el doble mayor que F. Por lo tanto, $k_2 = F_1/x = 2F/x = 2k$. Durante la unión en serie tenemos $T_1 = 2\pi\sqrt{m/k_1} = 2\pi\sqrt{2m/k}$, y durante la unión en paralelo, $T_2 = 2\pi\sqrt{m/2k}$, de donde $T_1/T_2 = 2$. El período disminuirá el doble.

647. Primeramente inclinamos ambos péndulos con relación a la vertical hacia el mismo lado, en el mismo ángulo. Durante esta inclinación el muelle no se deformará. Verificamos con facilidad que al ser sueltos de esta posición, los péndulos oscilarán en fase con una frecuencia $\omega = \sqrt{g/l}$. Al inclinarse a los lados opuestos, en el mismo valor del ángulo, las oscilaciones de los péndulos tendrán lugar en antifase y el muelle se deformará. Para calcular la frecuencia de estas oscilaciones, encontramos la fuerza que hace volver los péndulos a la posición de equilibrio. Al inclinarse en un ángulo φ, la fuerza que actúa sobre el cuerpo m por parte del muelle, es igual a $2kl$ sen φ. La suma de las proyecciones de la fuerza de gravedad y de la fuerza de elasticidad en la tangente a la circunferencia denominada fuerza de «recuperación» P_1, será

$$P_1 = mg \operatorname{sen} \varphi + 2kl \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi$$

(fig. 481). Como para pequeños ángulos $\cos \varphi \approx 1$, entonces

$$P_1 = (mg + 2kl) \operatorname{sen} \varphi \text{ ó } P_1 = m\,(g + 2kl/m) \operatorname{sen} \varphi.$$

Para el péndulo simple la fuerza de «recuperación» es mg sen φ. En este caso, la frecuencia de las oscilaciones a pequeños ángulos φ se determina por la fórmula $\omega = \sqrt{g/l}$. En nuestro caso, en vez de g tenemos la magnitud $g + 2kl/m$. Por lo tanto,: $\omega = \sqrt{(g + 2kl/m)/l}$. El período de oscilaciones es $T_2 = 2\pi\sqrt{l/(g + 2kl/m)}$.

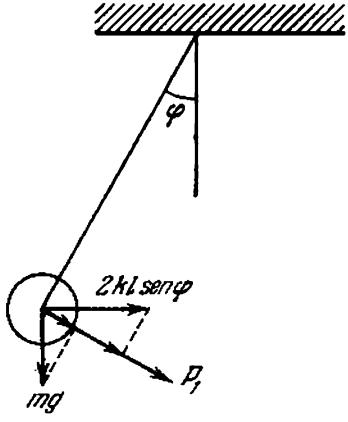


Fig. 481

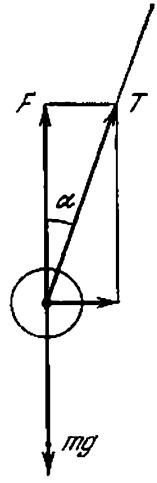


Fig. 482

648. La componente vertical de la fuerza de tensión T es $F = T \cos \alpha$ (fig. 482). Para un péndulo cónico $F = mg$, puesto

que el peso no tiene aceleración en el plano vertical. En el caso de un péndulo simple, inclinado al máximo con relación a la posición del equilibrio (en un ángulo α), la fuerza resultante está dirigida por la tangente a la trayectoria del peso. Por consiguiente $T = mg \cos \alpha$. Para inclinarse en un ángulo α, la tensión del hilo de un péndulo cónico será mayor.

649. En la superficie de la tierra, el período de oscilaciones del péndulo es $T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$. A una altura h sobre la tierra, el período de oscilaciones del péndulo es $T_1 = 2\pi\sqrt{l/g_1}$. El número de oscilaciones en un día (24 horas) será $N_1 = 24 \cdot 60 \cdot 60 \times \times 1/T_1 = k/T_1$. Por lo tanto, a una altura h sobre la tierra, el reloj se atrasará un día en

$$\Delta t_1 = N_1 (T_1 - T_0) = k (1 - T_0/T_1).$$

La relación de los períodos es $T_0/T_1 = \sqrt{g_1/g} = R/(R + h)$, como se deduce de la ley de gravitación universal; de ahí

$$\Delta t_1 = kh/(R + h) \approx kh/R \approx 2{,}7 \text{ s}.$$

Si metemos el reloj en un pozo, entonces la relación de las aceleraciones será $g_2/g = (R - h)/R$, ya que

$$g = \gamma \frac{4\pi}{3} R^3 \rho \frac{1}{R^2},$$

$$g_2 = \gamma \frac{4\pi}{3} (R - h)^3 \rho \frac{1}{(R - h)^2}.$$

De este modo, $T_0/T_2 = \sqrt{g_2/g} = \sqrt{(R - h)/R} \approx 1 - h/2R$. En este caso, el reloj se atrasará en $\Delta t_2 = k (1 - T_0/T_2) = = kh/2R \approx 1{,}35$ s.

650. Cada mitad de la barra con una esfera en el extremo tiene la forma de un péndulo simple de $d/2$ de longitud que realiza oscilaciones en el campo newtoniano de la esfera grande. El péndulo simple en el campo gravitacional de la Tierra tiene el período de pequeñas oscilaciones $T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$. Por la ley de atracción universal $mg = \gamma m M_{\text{tierra}}/R^2$; por consiguiente, $T_0 = 2\pi\sqrt{lR^2/\gamma M_{\text{tierra}}}$, donde γ es la constante de la gravitación universal; M_{tierra}, la masa de la Tierra; R, la distancia desde el péndulo hasta el centro de la Tierra. De este modo, en el campo gravitacional de la esfera grande, el período de pequeñas oscilaciones del péndulo simple de $l = d/2$ de longitud será $T = 2\pi\sqrt{dL^2/2\gamma M} \approx 5{,}4$ horas.

651. El período de oscilaciones de un péndulo simple es $T = 2\pi\sqrt{l/g'}$, donde g' es la aceleración de la caída libre en el sistema de las coordenadas correspondientes. En nuestro caso $g' = \sqrt{g^2 + a^2}$, donde g es la aceleración de la caída libre respecto a la Tierra. De este manera, $T = 2\pi\sqrt{l/\sqrt{g^2 + a^2}}$.

652. $T = 2\pi\sqrt{l/(g + a)}$.

653. Sustituir en la respuesta anterior $g + a$ por $|g - a|$.

654. Las oscilaciones del cubo en la taza son absolutamente análogas a las oscilaciones de un péndulo simple, sólo en lugar de la tensión del hilo, sobre el cubo actúa la fuerza de reacción de apoyo. Por lo tanto, el período de oscilaciones es $T = \sqrt{2\pi R/g}$.

655. Si $M \gg m$, la aceleración de la taza es $a = F/M - g$. Por consiguiente (véase el problema 654),

$$T = 2\pi\sqrt{R/(g + a)} = 2\pi\sqrt{RM/F}.$$

Si $F = 0$, es decir, durante la caída libre de la taza, $T = \infty$ y no hay oscilaciones. Si $F = Mg$, entonces $T = 2\pi\sqrt{R/g}$.

656. Las oscilaciones del cubo provocarán el movimiento periódico de la taza en el plano horizontal. De este modo, el período de oscilaciones del cubo disminuirá, porque en el sistema de las coordenadas relacionado con la taza aparecerá una aceleración variable adicional, dirigida horizontalmente (véase el problema 651).

657. Comparemos el movimiento del centro del aro con el movimiento del extremo de un péndulo simple de $R - r$ de largo. Ambos puntos describen un arco de circunferencia de radio $R - r$. Supongamos que cuando el ángulo es φ_0, el aro y el péndulo estén en reposo. Basándose en el principio de conservación de la energía, para la velocidad v_a del centro del aro y para la velocidad v_p del extremo del péndulo, en dependencia del ángulo φ, podemos escribir las siguientes expresiones:

$$v_a = \sqrt{g(R - r)\cos\varphi - \cos\varphi_0)},$$

$$v_p = \sqrt{2g(R - r)(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}.$$

(La expresión de la energía cinética del aro que gira sin deslizamiento, véase en el problema 215). De estas expresiones se deduce que $v_a = v_p/\sqrt{2}$. Como el centro del aro se mueve en $\sqrt{2}$ veces más lento que el péndulo, entonces el período del movimiento del centro del aro será $\sqrt{2}$ veces mayor que el período del movimiento del péndulo simple de $R - r$ de longitud.
De este modo, para el período desconocido tenemos la expresión: $T = 2\pi\sqrt{2(R - r)/g}$. Subrayamos que si $r \to 0$, $T = 2\pi\sqrt{2R/g}$, a pesar de que, a primera vista, puede parecer que si $r = 0$ deba verificarse la igualdad $T = 2\pi\sqrt{R/g}$. Esto está relacionado con el hecho de que para $r \to 0$ la energía del movimiento de rotación del aro no se desaparece.

658. Supongamos que primeramente la barra esté inclinada de la posición de equilibrio en un ángulo α. En el momento en que la barra forma un ángulo β con la vertical, la velocidad angular ω_1 de la barra, valiéndose del principio de conservación de la energía, será igual a

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2g(m_1 l_1 + m_2 l_2)}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}(\cos\beta - \cos\alpha)}.$$

Ahora analicemos un péndulo simple de longitud l. En este caso, para los mismos ángulos α y β tendremos

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\beta - \cos\alpha)}.$$

Escojamos l de modo que $\omega_1 = \omega_2$. Para ello hace falta que

$$l = \frac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}{m_1 l_1 + m_2 l_2}.$$

La velocidad angular caracteriza el cambio del ángulo β con el tiempo. Como $\omega_1 = \omega_2$, entonces los períodos de oscilaciones de dos péndulos serán iguales. Para el péndulo simple tenemos $T = 2\pi\sqrt{l/g}$. Por lo tanto, el período que hallamos es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}{m_1 l_1 + m_2 l_2}\,\frac{1}{g}}$$

659. Este problema se resuelve mediante el mismo método que el problema 658. Supongamos que el semianillo inicialmente esté inclinado de la posición de equilibrio en un ángulo α. Durante el movimiento todos los puntos del semianillo tienen la misma velocidad lineal. La energía cinética es $mr^2\omega^2/2$. El cambio de la energía potencial durante la rotación del semianillo en un ángulo $\alpha - \varphi$ es

$$mg\,(2/\pi)\,r\,(\cos\varphi - \cos\alpha),$$

ya que el centro de gravedad se encuentra a una distancia $(2/\pi)\,r$ del centro O (véase el problema 150).
Igualando la variación de la energía cinética a la variación de la energía potencial, obtenemos para ω una expresión de la siguiente forma:

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{(\pi r/2)}(\cos\varphi - \cos\alpha)}.$$

De ahí deducimos que el péndulo simple que tiene $\pi r/2$ de longitud, tendrá el mismo período de oscilaciones que el semianillo. De este modo, el período que estamos hallando es $T = 2\pi\sqrt{\pi r/2g}$.

660. En la posición de equilibrio el muelle se extenderá en un valor l que se determina de la relación $kl = mg$. Supongamos que en el momento inicial de tiempo, el peso esté en reposo, y la longitud del muelle, en comparación con la posición de equilibrio, cambie en x_0. Si, ahora, dejamos libre el sistema, el peso oscilará en torno a la posición de equilibrio con una amplitud $|x_0|$. En el caso de una polea imponderable ($M = 0$) el período de oscilaciones es $T = 2\pi\sqrt{m/k}$. Designemos por x el desplazamiento del peso medido a partir de la posición de equilibrio.

La velocidad del peso en dependencia de x puede determinarse del principio de conservación de la energía

$$\frac{k(x_0+l)^2}{2}-mgx_0=\frac{mv^2}{2}+\frac{k(x+l)^2}{2}-mgx.$$

Tomando en consideración que $mg = kl$, hallamos que $v = \sqrt{k(x_0^2 - x^2)/m}$.

Si $M \neq 0$, el principio de conservación de la energía se escribe de la forma siguiente

$$\frac{k(x_0+l)^2}{2}-mgx_0=\frac{(m+M)v^2}{2}+\frac{k(x+l)^2}{2}-mgx.$$

De ahí se deduce que $v = \sqrt{k(x_0^2 - x^2)/(M + m)}$. De tal modo, en el segundo caso ($M \neq 0$) el peso se mueve como si su masa, en comparación con el primer caso, hubiera aumentado en M. Por lo tanto, el período incógnito es $T = 2\pi\sqrt{(m+M)/k}$.

661. Durante el movimiento de la varilla respecto a la posición de equilibrio en un valor x, la fuerza que actúa sobre la varilla es igual a $F = -\rho gSx$, donde ρ es la densidad del agua. El signo «menos» significa que la fuerza está dirigida en contra del desplazamiento x. De acuerdo con la segunda ley de Newton, las oscilaciones de la varilla se determinan por la ecuación $ma = -\rho gSx$. Esta ecuación es exactamente análoga a la ecuación para la oscilación del peso en un muelle: $ma = -kx$. Puesto que para el peso $\omega = 2\pi/T = \sqrt{k/m}$, entonces la frecuencia de oscilaciones de la varilla es

$$\nu=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\rho gS}{m}}\approx 0{,}25\ \text{Hz}.$$

662. La ecuación de movimiento del mercurio tiene la forma

$$ma = -\rho gS\cdot 2x,$$

donde x es el desplazamiento del nivel del mercurio con relación a la posición de equilibrio. La ecuación de movimiento tiene la misma forma que en el caso de las oscilaciones de un peso de un muelle. Por eso $T = 2\pi\sqrt{m/2\rho gS} \approx 1{,}54$ s.

663. La fuerza que actúa sobre el cuerpo es $F = 4/3\,\gamma\pi\rho mr$, donde es la distancia del centro de la Tierra. Teniendo en cuenta que $g = 4/3\pi\gamma\rho R$, podemos escribir esta expresión en la siguiente forma:

$$F=mg\frac{r}{R}.$$

Aquí R es el radio de la Tierra. La ecuación de movimiento del cuerpo tiene la forma

$$ma=-\frac{mg}{R}r=-kr,$$

La fuerza es proporcional al movimiento de la posición de equilibrio y está dirigida al centro de la Tierra. Por consiguiente, el cuerpo realizará oscilaciones armónicas con frecuencia

$$\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{g/R}.$$

De ahí el período de oscilaciones es

$$T = 2\pi\sqrt{R/g}.$$

El cuerpo llegará al centro de la Tierra durante el tiempo

$$\tau = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R}{g}} \approx 21 \text{ min},$$

Es interesante el hecho de que el tiempo τ no depende absolutamente de la distancia del centro de la Tierra, donde el cuerpo comienza su movimiento. (Es importante sólo que esta distancia sea mucho mayor que las dimensiones del cuerpo.)

664. La fuerza F que actúa sobre el peso inclinado de la posición de equilibrio es $F = 2f \operatorname{sen} \varphi$ (fig. 483). Como el ángulo φ es pe-

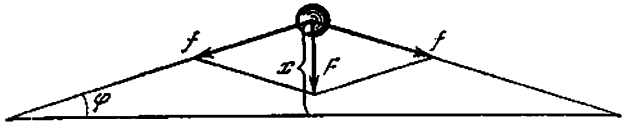


Fig. 482

queño, podemos considerar que $F = 4fx/l$ ó $F = kx$, donde $k = 4f/l$. Aprovechando la fórmula $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, obtenemos para el valor incógnito la siguiente expresión: $T = 2\pi\sqrt{ml/4f}$.

665. Analicemos las oscilaciones cofásicas de dos pesos. Para una pequeña inclinación x la fuerza F no cambiará, porque la variación de la longitud del muelle es de segundo orden decimal y por eso puede menospreciarse. Tomando en consideración solamente las primeras potencias de x, la ecuación de movimiento de cada peso puede escribirse del siguiente modo:

$$ma = -Fx/l,$$

de donde determinamos fácilmente el período de oscilaciones

$$T = 2\pi\sqrt{ml/F}.$$

666. Si los pesos realizan oscilaciones en antifase, la ecuación de movimiento de cada peso, con precisión hasta las primeras potencias de x, tiene la forma

$$ma = -F\frac{x}{l} - F\frac{2x}{l_1} = -F\left(\frac{1}{l} + \frac{2}{l_1}\right)x,$$

de donde

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{mll_1}{F(l_1+2l)}}.$$

667. Se puede sacudir poco a poco la puerta con una frecuencia igual a la frecuencia propia de oscilaciones de la puerta. Al producirse la resonancia, la amplitud de oscilaciones puede alcanzar grandes valores.

668. Basándose en el principio de conservación de la energía, tenemos

$$\frac{\omega^2}{2}(ml^2+Mr^2) = Mgr\alpha - mgl(1-\cos\alpha),$$

donde ω es la velocidad angular de rotación de la polea; de ahí resulta que

$$\omega = \sqrt{\frac{2(Mgr\alpha - 2mgl\,\mathrm{sen}^2(\alpha/2))}{ml^2+Mr^2}}.$$

La condición necesaria para que surja el régimen oscilatorio es que la velocidad angular, a un determinado valor del ángulo α, sea nula. En este caso $Mgr\,\alpha = 2\,mgl\,\mathrm{sen}^2(\alpha/2)$, o introducien-

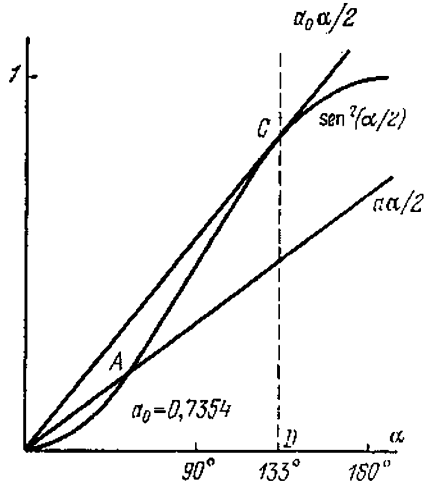


Fig. 484

do la designación $a = Mr/ml$, obtenemos que $a\,\alpha/2 = \mathrm{sen}^2(\alpha/2)$. A cada valor a le corresponde un determinado valor máximo de desviación de la posición de equilibrio, que se determina por la ecuación transcendental dada.

La solución de esta ecuación es más fácil hallar mediante el gráfico. Para esto es necesario construir la curva $y = \mathrm{sen}^2(\alpha/2)$ (fig. 484). Entonces, la intersección de esta curva con la recta

$y = a\alpha/2$ da el punto A que determina el valor de α para un dado a. (El valor de α que corresponde a la intersección de esta recta con otra ramificación de la curva $y = \text{sen}^2(\alpha/2)$ es imposible para las condiciones iniciales dadas del problema.)
Es evidente que nuestra ecuación tiene una solución diferente de cero solamente para a menor que un cierto valor límite a_0, que se determina a condición de que la resta $y = a_0\alpha/2$ tenga contacto con la curva $y = \text{sen}^2(\alpha/2)$ en el punto C. Como vemos en la fig. 484, $\alpha_0 \approx 133°$. Por consiguiente, $a_0 = 2CD/\alpha_0 \approx 0{,}73$. Las oscilaciones son posibles si $Mr/ml \leqslant a_0 \approx 0{,}73$.

669. El núcleo del hidrógeno consta de un protón, cuya masa es m. El núcleo del deuterio — el deuterón — consta de un protón y de un neutrón. La masa del deuterón es $2m$. El núcleo del tritio consta de un protón y de dos neutrones; La masa del tritio es $3\ m$. Como las fuerzas que actúan en todos tres casos entre los núcleos son iguales, es igual también el coeficiente de rigidez k y resulta

$$\omega_{H_2} : \omega_{D_2} + \omega_{T_2} = \frac{1}{\sqrt{m}} ; \quad \frac{1}{\sqrt{2m}} : \frac{1}{\sqrt{3m}} = \sqrt{6} : \sqrt{3} : \sqrt{2}.$$

670. Designemos el desplazamiento del i-ésimo átomo escogido arbitrariamente de la posición de equilibrio por

$$x_i = A \cos(\omega t + i\varkappa a),$$

donde $\varkappa$ es una magnitud arbitraria. Entonces, la fuerza que actúa sobre el enésimo átomo por parte de los átomos vecinos, es

$$F = kA\{\cos[\omega t + (n+1)\varkappa a] + \cos[\omega t + (n-1)\varkappa a] - 2\cos[\omega t + n\varkappa a]\}.$$

De la última expresión por medio de transformaciones trigonométricas simples, obtenemos

$$F = -kA \cos(\omega t + n\varkappa a) \cdot 4\text{sen}^2(\varkappa a/2).$$

Escribamos la ecuación de movimiento del enésimo átomo.

$$ma_n = -kA \cos(\omega t + n\varkappa a) \cdot 4\text{sen}^2(\varkappa a/2),$$

donde a_n es la aceleración del enésimo átomo igual a

$$a_n = -\omega^2 A \cos(\omega t + n\varkappa a).$$

Designemos $\omega_0^2 = k/m$. De las expresiones escritas arriba recibimos

$$\omega^2 = \omega_0^2 \cdot 4\,\text{sen}^2(\varkappa a/2),$$

$$\omega = 2\omega_0 \cdot \text{sen}(\varkappa a/2).$$

Si analizamos una cadena de N átomos, entonces los átomos extremos tendrán un vecino. Para no complicar los cálculos, en nuestro caso no tomamos en consideración los efectos extremos y aprovechamos la condición de periodicidad para una cade-

na infinita, o sea, vamos a considerar que las condiciones de oscilaciones de los átomos que tienen números n, $N+n$, $2N+n$, $3N+n$, etc., son iguales. Entonces

$$\cos(\omega t + n\varkappa a) = \cos[\omega t + (n+N)\varkappa a] =$$
$$= \cos[\omega t + (n+2N)\varkappa a], \text{ etc.,}$$

de donde para $\varkappa$ obtenemos N valores diferentes:

$$N\varkappa a = 2\pi\nu, \quad \varkappa = \frac{2\pi}{Na}\nu, \quad \text{donde} \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, N-1.$$

§ 26. OSCILACIONES ELECTRICAS

671. Sin un imán permanente tendríamos una duplicación de la frecuencia de oscilaciones. En este caso, durante el paso de la corriente sinusoidal a través de la bobina del teléfono, la membrana realizará dos oscilaciones durante un período de oscila-

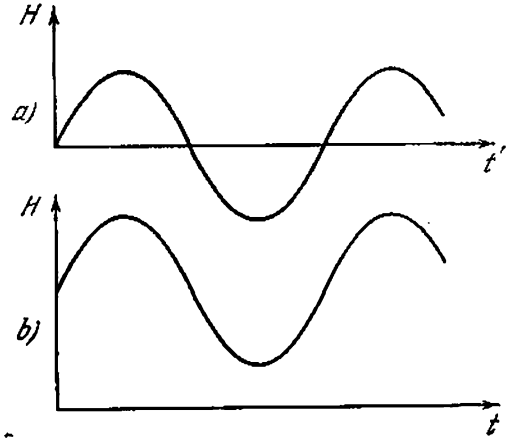


Fig. 485

ciones de la corriente, puesto que el gráfico de la intensidad del campo magnético H, creado por esta corriente, tendría la forma representada en la fig. 485, *a*, y la fuerza de atracción de la membrana no depende del signo de H.

Estando presente un imán permanente que crea un campo magnético, cuya intensidad supera la intensidad máxima del campo de la corriente, el gráfico de intensidad resultante tiene la forma representada en la fig. 485, *b*. Por eso, una oscilación de

la corriente corresponderá a una oscilación de la membrana y la distorsión de sonido será menor.

672. La frecuencia de las oscilaciones propias es $\nu = 1/2\pi\sqrt{LC}$. Como

$$L = \mu_0 N^2 S_1/l, \quad C = \varepsilon_0 S_2/d,$$

entonces

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{ld}{\varepsilon_0\mu_0 N^2 S_1 S_2}} \approx 24\cdot 10^6 \text{ Hz}.$$

673. La frecuencia de oscilaciones propias del circuito se determina por la fórmula de Thomson: $\omega = 1/\sqrt{LC}$.
1) Si en la bobina hay un núcleo de cobre, entonces en las variaciones periódicas del campo magnético de la bobina surgirán en el núcleo unas corrientes inducidas (corrientes de Foucault), cuyo campo magnético debilitará el campo magnético de la bobina. Esto conducirá a la disminución de la inductancia de la bobina y por consiguiente, al aumento de la frecuencia ω.
2) Si introducimos en la bobina un núcleo de ferrita, entonces el campo magnético de la bobina aumentará. Por lo tanto, aumentará la inductancia L de la bobina y la frecuencia ω disminuirá.

674. En el sistema aparecerán oscilaciones inamortiguadas (si prescindimos de las pérdidas insignificantes de energía en la radiación de las ondas electromagnéticas). En el momento cuando la carga está distribuida uniformemente entre los condensadores, la energía del campo electrostático es mínima, pero la intensidad de la corriente y la energía del campo magnético serán máximas. La energía total no cambia, sino tiene lugar la transformación de una forma de energía en la otra.

675. El desplazamiento de un rayo electrónico bajo la influencia de la tensión aplicada a lo largo de la vertical, se escribe de la siguiente forma

$$x = \frac{lL}{2dV} V_{10} \cos \omega t = a \cos \omega t$$

(véase el problema 559). A lo largo de la horizontal (eje y) el desplazamiento del rayo es

$$y = \frac{lL}{2dV} V_{20} \cos(\omega t - \varphi) = b \cos(\omega t - \varphi).$$

Para obtener la trayectoria hace falta excluir el tiempo de las ecuaciones dadas. Después de hacer algunas transformaciones simples tendremos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\varphi = \operatorname{sen}^2\varphi.$$

Si $\varphi_1 = \pi/2$, entonces $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Esta es la ecuación de una elipse. Si $\varphi_2 = \pi$, entonces $x = -(a/b)\,y$, o sea, las oscilaciones del rayo ocurren a lo largo de la recta que forma

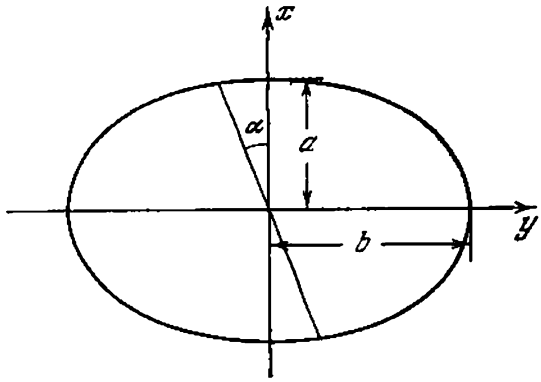


Fig. 486

con el eje x un ángulo α determinado por la igualdad $\operatorname{tg}\alpha = b/a$ (fig. 486).

676. La dependencia de la tensión respecto al tiempo está representada en la fig. 487. La tensión en el condensador (curva Oa) crece hasta el momento cuando alcanza el valor V_{enc}. En este

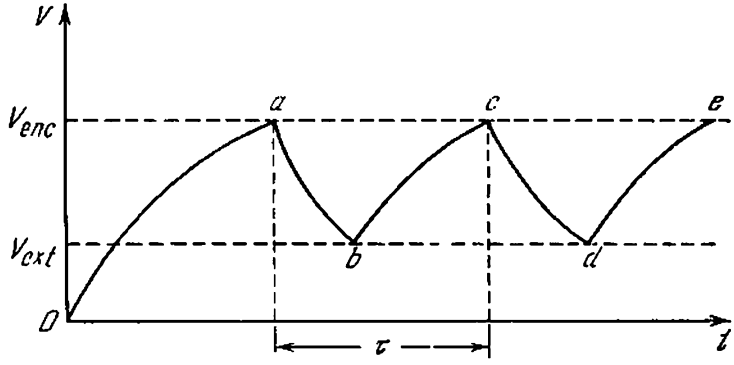


Fig. 487

momento, la lámpara se enciende y el condensador se descarga a través de la lámpara (curva ab), mientras que la tensión no caiga hasta el valor V_{ext}. Luego, el proceso se repite. Surgen, entonces, las llamadas oscilaciones de relajación, cuyo período es τ.

Las corrientes de la carga y de la descarga del condensador no son constantes, porque dependen de la tensión existente en el condensador (por ejemplo, durante la carga, la corriente disminuye con el aumento de la tensión). Por eso Oa, ab, bc, etc. no son segmentos de las rectas.

677. Al aumentar la capacidad, el tiempo de la carga del condensador hasta el potencial V_{enc}, y el tiempo de descarga del condensador hasta el potencial V_{ext} crecerá. Por consiguiente, crecerá también el período. El aumento de R provocará la disminución de la corriente de la carga del condensador y por lo tanto, conducirá al aumento del período.

678. Cuando la carga en las placas del condensador llega a su valor máximo, es necesario separar las placas. Para vencer las fuerzas de atracción entre éstas hace falta realizar un determinado trabajo. Este trabajo se efectúa para aumentar la energía del circuito. Cuando la carga es nula, las placas deben colocarse en posición inicial. En este caso, la energía en el circuito no cambiará.

§ 27. ONDAS

679. La velocidad de propagación de ondas se determina por la fuerza de gravedad. La fuerza de gravedad se caracteriza por el valor g, cuya dimensión es $[g] = L/T^2$. Para recibir un valor que tiene la dimensión de la velocidad es necesario introducir un valor característico que tiene la dimensión de la longitud. Tal valor solamente puede ser la longitud de onda, porque la profundidad del recipiente es infinitamente grande, y la amplitud de las oscilaciones de las partículas en la onda es infinitamente pequeña.
Con los valores g y λ podemos obtener un tercer valor que tiene la dimensión de la velocidad mediante un método único, a saber: $c = k\sqrt{g\lambda}$, donde k es un coeficiente adimensional. Los cálculos teóricos muestran que $k = 1/\sqrt{2\pi}$.

680. Razonando de modo análogo como fue hecho en el problema 679, podemos concluir que en el caso dado la velocidad de propagación de ondas puede determinarse solamente por la densidad del medio ρ, por el coeficiente de tensión superficial σ y por la longitud de onda λ. Estos valores poseen las siguientes dimensiones:

$$[\rho] = M/L^3, \quad [\sigma] = MT^{-2}, \quad [\lambda] = L.$$

Por lo tanto, $c = k\sqrt{\sigma/\lambda\rho}$, donde k es un coeficiente adimensional. (Su valor numérico es $k = \sqrt{2\pi}$.)

681. $\operatorname{sen}\varphi_1/\operatorname{sen}\varphi_2 = c_1/c_2 = \sqrt{h_1/h_2}$.

682. De la ley de Hook $F/S = E\Delta l/l$ deducimos que la dimensión del módulo de elasticidad es

$$[E] = M/T^2L.$$

La dimensión de la densidad es $[\rho] = M/L^3$. Por lo tanto, la expresión para la velocidad puede formularse del siguiente modo: $c = k\sqrt{E/\rho}$, donde k es un coeficiente adimensional

683. Es necesario aumentar 4 veces la tensión de la cuerda.

684. $\nu = \nu_0 n$, donde $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$,

$$\nu_0 = \frac{1}{ld}\sqrt{\frac{T}{\pi\rho}} \approx 4 \text{ Hz}.$$

685. En el tubo deberá propagarse un número entero de semiondas: $\frac{\lambda}{2}k = l$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$.

Las frecuencias propias son: $\nu_k = c/\lambda = kc/2l = k \cdot 50$ Hz ($c = 340$ m/s) es la velocidad del sonido en el aire).

686. La resonancia del diapasón se amplifica en el momento cuando la frecuencia de las oscilaciones propias de la columna de aire en el recipiente coincide con la frecuencia del diapasón. Las frecuencias propias de oscilaciones de la columna de aire en el tubo soldado en un extremo son

$$\nu_k = \frac{2k+1}{4}\frac{c}{l},$$

donde l es la longitud del tubo; $c = 340$ m/s, la velocidad del sonido en el aire; k toma los valores siguientes: 0, 1, 2, 3, ... Por consiguiente, las posiciones posibles del nivel de agua en el recipiente que se determinan por la distancia desde la superficie del líquido hasta el extremo superior del recipiente, son iguales a

$$l_k = \frac{2k+1}{4}\frac{c}{\nu} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Para $l = 1$ m son posibles dos posiciones del nivel de agua: $l_0 = 25$ cm y $l_1 = 75$ cm.

687. Analicemos una serie de posiciones consecutivas de la bala que vuela a lo largo de KA: K, F, E, D, B, A (fig. 488). En cada punto la bala crea delante de sí una compresión que se propaga por todos los lados en forma de un impulso esférico, y debido al hecho de que la velocidad de la bala v es mayor que la velocidad del sonido c, estos impulsos aparecen solamente después del paso de la bala. En el momento, cuando la bala se encuentra en el punto A, los impulsos aislados están representados en la fig. 488 mediante círculos de diferentes radios. La envolvente de estas esferas es el frente de onda que tiene la forma de una superficie cónica. El cono se mueve hacia el frente con la velo-

cidad de la bala. El ángulo de abertura del cono se determina por la relación

$$\text{sen}\ \alpha = BH/AB = ct/vt = c/v.$$

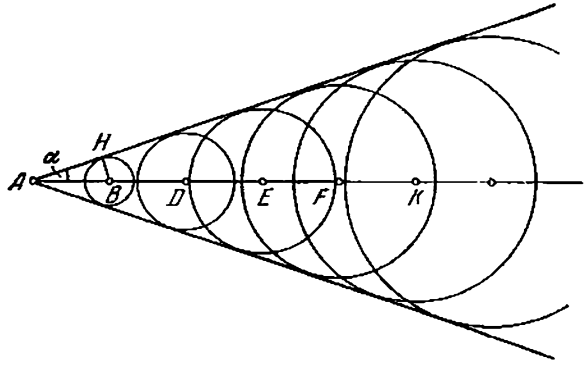


Fig. 488

688. Al hombre que se encuentra en el punto B (fig. 489) llega una onda sonora emitida en el momento cuando el avión estaba en

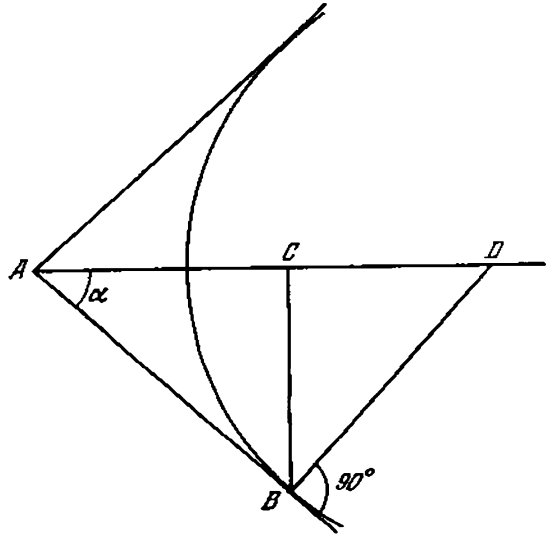


Fig. 489

un punto D (véase la solución del problema 687). La distancia $CB = 6$ km. La distancia incógnita será

$$AB = BC/\text{sen}\ \alpha = BCv/c,$$

donde v es la velocidad del avión y c, la velocidad del sonido; de ahí $AB = 9$ km.

689. Normalmente la velocidad del viento a una determinada altura es mayor que en la superficie de la tierra. Por eso las superficies ondulatorias que, estando el aire inmóvil, tienen la forma de esferas con centro en el punto de situación de la fuente sonora

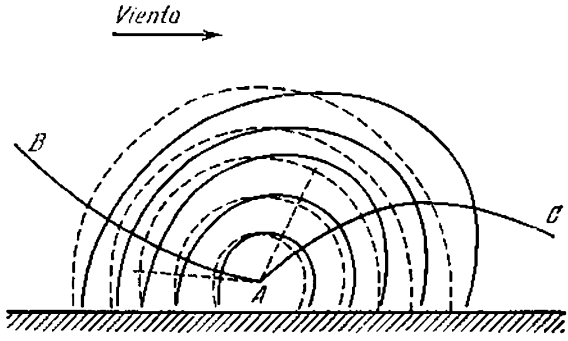


Fig. 490

(línea punteada en la fig. 490), cambian su forma. En dirección del viento, la velocidad de las ondas es mayor que la contraria al mismo. Las formas aproximadas de las superficies ondulatorias están representadas en la fig. 490 por líneas llenas. La propagación del sonido en cada punto tiene lugar en dirección perpendicular a las superficies ondulatorias. Por eso, el sonido que se propaga en contra del viento se desvía hacia arriba (curva AB) y no llega al observador en la superficie de la tierra. El sonido, al propagarse en dirección del viento, se desvía hacia la tierra (curva AC) y llega al observador.

690. La televisión se basa en la propagación de ondas cuya longitud es menor que 10 m. La ionosfera para estas ondas es «transparente» y no existe la reflexión de las ondas. No obstante, las ondas cortas se propagan prácticamente en línea recta, porque en los obstáculos terrestres (casas, etc.) éstas casi no sufren difracción.

691. Para calcular la distancia hasta el objeto, por la posición del impulso reflejado en la pantalla de un tubo de rayos electrónicos, es necesario que la reflexión del impulso llegue no antes de un tiempo τ y no más tarde que $T = 1/f$, después de emitirse un impulso rectilíneo. Por lo tanto, la distancia mínima hasta el objeto es $l = c\tau/2 = 120$ m y la distancia máxima es $L = cT/2 \approx 90$ km.

692. Reflejándose del techo, la onda llega al antena de recepción con un atraso $\tau = AB/c = 10^{-5}$ s. La velocidad del rayo electrónico a lo largo de la pantalla es $v = l/\Delta t$, donde $\Delta t =$

$= \frac{1}{25 \cdot 625}$ s es el tiempo en que el rayo traza una línea. (Se puede prescindir del tiempo del recorrido inverso del rayo.) El desplazamiento de las imágenes es $\Delta l = v\tau \approx 7{,}8$ cm.

693. La capacidad C del dipolo, al ser sumergido en keroseno, aumenta en ε veces. La frecuencia de oscilaciones propias del circuito es proporcional a $1/\sqrt{C}$. Por lo tanto, la frecuencia de oscilaciones disminuye en $\sqrt{\varepsilon}$ veces. En el vacío, la frecuencia de oscilaciones propias del dipolo es $\nu_0 = c/2l$ y en el dieléctrico, $\nu = c/2L\sqrt{\varepsilon}$. A esta frecuencia en el vacío corresponde la longitud de onda $\lambda = c/\nu = 2l\sqrt{\varepsilon} \approx 1{,}4$ m. Este resultado puede lograrse por un camino más corto. La longitud de onda en el keroseno es $\lambda = 2l$. En el vacío ésta aumenta en $\sqrt{\varepsilon}$ veces; por consiguiente, $\lambda_0 = 2l\sqrt{\varepsilon}$.

Capítulo V

Optica geométrica

§ 28. FOTOMETRIA

694. La iluminación mínima de la pared de la sala (fig. 491) es $E_1 = (I \cos \alpha)/r^2$. La iluminación mínima del piso es $E_2 =$

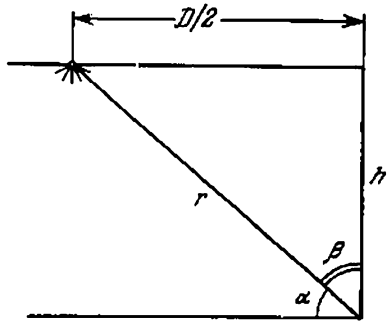


Fig. 491

$= (I \cos \beta)/r^2$. Por la condición del problema

$$E_1/E_2 = \cos \alpha/\cos \beta = D/2h = 2,$$

de donde $h = D/4 = 7{,}5$ m.

695. La iluminación del centro de la mesa es $E = I_1/H_1^2 = I_2/H_2^2$, donde H_2 es la altura de la segunda lámpara sobre la mesa. La iluminación de los bordes de la mesa, en el primer y en el segundo casos es

$$E_1 = \frac{I_1 H_1}{(H_1^2 + D^2/4)^{3/2}}, \qquad E_2 = \frac{I_2 H_2}{(H_2^2 + D^2/4)^{3/2}}.$$

De donde

$$\frac{E_1}{E_2}=\frac{\left[H_1^2+\left(\frac{I_1}{I_2}\right)D^2/4\right]^{3/2}}{(H_1^2+D^2/4)^{3/2}}=3.$$

La iluminación de los bordes de la mesa disminuirá en 3 veces.

696. Si la normal a la placa forma un ángulo α con la dirección AS_1, la iluminación de la placa es

$$E=\frac{I}{a^2}[\cos\alpha+\cos(90^\circ-\alpha)]=\frac{I}{a^2}\,2\cos 45^\circ\cos(\alpha-45^\circ).$$

Por consiguiente, la iluminación de la placa será máxima, si ella es paralela al lado del triángulo S_1S_2:

$$E_{\text{máx}}=\sqrt{2}\,I/a^2.$$

697. Con el uso de una fuente auxiliar junto con la fuente estándar, la igualdad de las iluminaciones tenía lugar para la siguiente relación: $I_0/I_1=r_1^2/r_2^2$, donde I_0 era la intensidad luminosa de la fuente estándar y I_1, la intensidad luminosa de la fuente auxiliar. En el segundo caso, la igualdad de las iluminaciones fue alcanzada cuando $I_x/I_1=r_3^2/r_4^2$, donde I_x era la intensidad de luz incógnita. De ahí $I_x=r_2^2r_3^2/r_1^2r_4^2=400\ I_0$.

698. El flujo luminoso total de la lámpara es $\Phi_0=4\pi I$. Si la lámpara está colgada en el techo, entonces la mitad de este flujo alcanzará las paredes y el suelo. Por consiguiente, el flujo incógnito será $\Phi=2\pi I=628$ lux.

699. La cantidad de la energía luminosa, absorbida por las paredes interiores del cilindro por unidad de tiempo (flujo luminoso), en ambos casos es igual. No obstante, el área de la superficie interna del cilindro cambiará en R_1/R_2 veces. Por eso, la iluminación cambiará (aumentará) en R_1/R_2 veces, o sea, $E_1/E_2=R_2/R_1$.

700. La iluminación en el borde de la mesa es

$$E=\frac{I\cos\varphi}{l^2}=\frac{1}{R^2}\cos\varphi\,\text{sen}^2\,\varphi,$$

donde I es la intensidad luminosa de la lámpara; R, el radio de la mesa; φ, el ángulo de incidencia de los rayos (fig. 492). El máximo valor de E se obtiene para un ángulo φ que satisface la ecuación: $1-\text{sen}^2\varphi=\frac{1}{2}\text{sen}^2\varphi$, o sea, cuando $\varphi=$

$= \text{arc sen} \sqrt{2/3}$. La lámpara deberá colgarse a una altura $h = (\sqrt{2/2})\, R \approx 0{,}71\ R$ sobre la mesa.

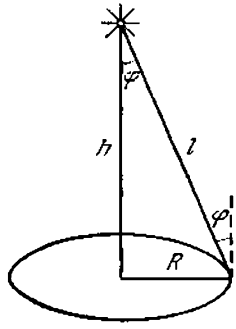


Fig. 492

701. El papel de seda dispersa hacia todos los lados los rayos luminosos que inciden sobre él. Si el papel se encuentra a cierta distancia del texto del libro, los haces luminosos divergentes reflejados de las partes blancas de la página (espacios entre las letras), se sobreponen en el lado del papel de seda dirigido al texto (fig. 493). Como resultado, el papel será iluminado casi por

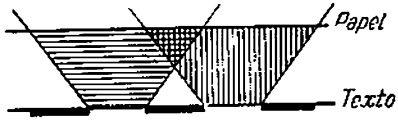


Fig. 493

igual y debido a la dispersión de la luz causada por éste, será imposible leer el texto. Si el papel se pone directamente sobre la página del libro, entonces la iluminación del lado del papel adyacente al texto, no será uniforme. Por consiguiente, la intensidad de la luz dispersa será distinta en diferentes partes de la hoja de papel. Esto permitirá leer el texto.

§ 29. LEYES FUNDAMENTALES DE LA OPTICA

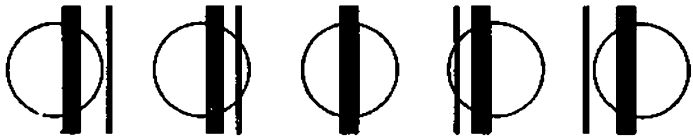
702. Solamente la sombra de la fuente puntual se verá bien en todos los lugares. Las secciones aisladas de la fuente larga crean sombras que se sobreponen la una sobre la otra. En este caso, la sombra tendrá un contorno tanto más nítido, cuanto menor sea la distancia desde el objeto hasta la superficie en que se forma la sombra, porque en este caso, las distancias entre los

límites de las sombras, de diferentes secciones de la fuente, serán menores. Es precisamente por eso que las piernas tienen una sombra más ostensible que la cabeza.

703. El lápiz debe colocarse paralelamente a la lámpara y posiblemente más cerca de la mesa. En este caso, las sombras creadas por secciones aisladas de la lámpara casi que exactamente se sobreponen las unas sobre las otras. Si el lápiz está perpendicularmente a la lámpara, entonces las sombras de las secciones aisladas de la lámpara están tan desplazadas las unas respecto a las otras que una sombra visible no se forma.

704. El fenómeno puede observarse en el caso cuando la distancia angular entre las ramas sea menor que el diámetro angular del disco solar. Supongamos, para mejor precisión, que la rama inferior es más gruesa que la rama superior. Para comprender por qué la iluminación dentro de la sombra cambia del modo como fue indicado en la condición del problema, supongamos que estemos mirando al Sol desde diferentes secciones de la sombra alternativamente.

Al lado de la sombra, el disco solar se ve por completo. Mientras que el ojo está en la sección de la sombra *A* (fig. 240), él se encuentra en la semisombra de la rama inferior. Delante del disco solar se ve solamente esta rama (fig. 494, *a*). Como



a) *b)* *c)* *d)* *e)*

Fig. 494

ésta cubre una parte del disco solar, la iluminación de este punto será menor. Moviendo el ojo hacia la posición *B* (fig. 240), nosotros veremos que la segunda rama también cubre en parte el disco solar (fig. 494, *b*). Por eso la iluminación será todavía menor. En el movimiento ulterior, el ojo ocupará una posición *C* (fig. 240), en que ambas ramas se sobreponen la una sobre la otra (fig. 494, *c*). Ahora, la parte del disco solar cubierta por las ramas se hace menor y por consiguiente, la iluminación será mayor. Como se ve el disco solar desde las secciones *D* y *E* está representado en la fig. 494, *d* y *e*. Esto hecho explica la luminosidad con que se ve la franja central de la sombra en comparación con las secciones vecinas.

705. Como vemos en la fig. 495, $H = L \operatorname{sen} \alpha$ y $\operatorname{sen} \alpha = b/a$, donde $b = DE$ es el diámetro de la sección transversal del cono luminoso cerca de la superficie de la tierra. Siendo la dimensión

angular del disco solar β, obtenemos que $L = b/\beta$. Por consiguiente, $H = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{b^2}{a} = 9$ m.

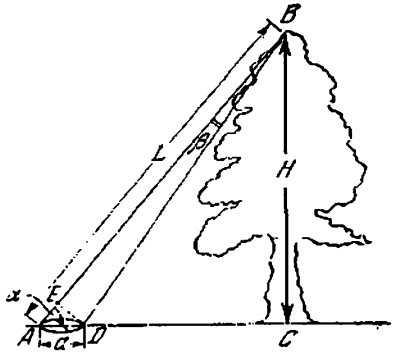


Fig. 495

706. La altura del espejo debe ser igual a la mitad de la altura del hombre. La distancia desde el borde inferior del espejo hasta el suelo debe ser igual a la mitad de la distancia desde los ojos del hombre hasta las plantas de sus pies (fig. 496).

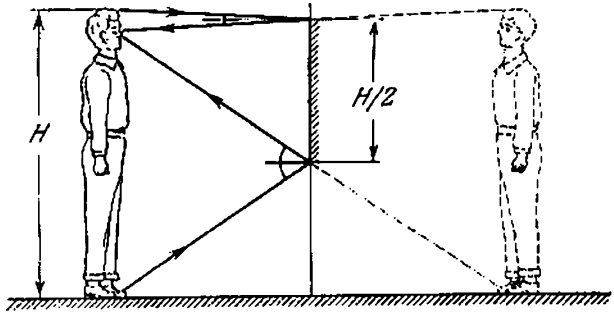


Fig. 496

707. Supongamos que h sea la altura del objeto y α, el ángulo de incidencia de los rayos en el espejo (fig. 497). Si la pantalla se encuentra a una distancia $l \geqslant h \operatorname{tg} \alpha$ del objeto, entonces en la pantalla se verán dos sombras, una derecha y otra izquierda, unidas por sus bases. La longitud total de la sombra será $2h$. La sombra iluminada por el sol se destaca en contraste con las demás secciones de la pantalla, iluminadas por los rayos directos y reflejados. Si la pantalla está puesta más cerca, la longitud

de la sombra será menor que $2h$ y en ella existirán partes no iluminadas ni por los rayos directos ni por los reflejados.

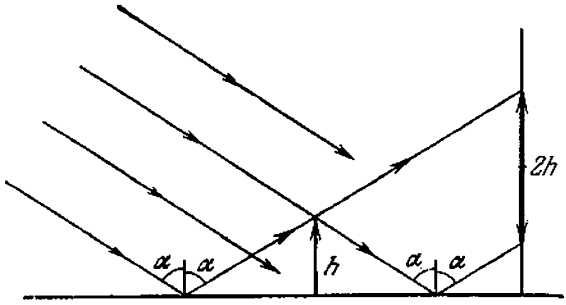


Fig. 497

708. Una fuente luminosa puntual siempre produce una reflexión, cuya forma se determina por la forma del espejo. El Sol tiene dimensiones finitas. Cada pequeño sector iluminado de la superficie nos da una mancha clara, que refleja la forma del espejo. Estas manchas de diferentes sectores del Sol se sobreponen los unos sobre los otros y dan un cuadro más o menos vago. Si la superficie, en la cual se observa la reflexión se encuentra lejos del espejo, entonces la forma de la mancha luminosa no dependerá de la forma del espejo. Solamente a una distancia pequeña del espejo, la mancha reflejará la forma del espejo, porque los ángulos, bajo los cuales los rayos inciden sobre el espejo de diferentes sectores del Sol, se diferencian muy poco entre sí.

709. El paisaje reflejado nosotros vemos, como si estuviéramos mirando en él desde un punto situado sobre la superficie del agua a una distancia igual a la del objetivo de la cámara fotográfica hasta el agua.

710. La imagen del segmento AB se verá por completo solamente si el ojo del observador está situado dentro de la región sombreada en la fig. 498.

711. Durante el movimiento del espejo MN en dirección a la pared, la posición de la reflexión AB sobre la pared, como se ve bien en la fig. 499, permanecerá invariable (S_1 y S_2 son las imágenes de la fuente S en dos posiciones del espejo: MN y $M'N'$). Las dimensiones de la reflexión tampoco cambiarán, continuando todo el tiempo iguales al doble de las dimensiones del espejo.

712. Si prescindimos de las pérdidas durante la reflexión, la iluminación de la reflexión será siempre cuatro veces menor que la iluminación del espejo. Al mismo tiempo, la iluminación del

espejo varía como resultado del cambio de la distancia desde la lámpara hasta el espejo y como resultado del cambio del ángulo de incidencia de los rayos. Para un espejo pequeño ten-

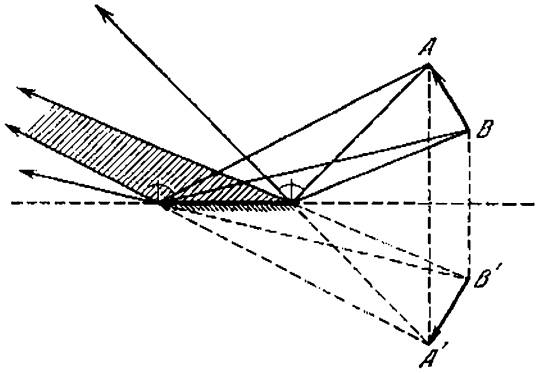


Fig. 498

dremos máxima iluminación a una distancia desde el espejo hasta la pared igual a $l = (\sqrt{2}/2)\,d$, donde d es la distancia desde la fuente luminosa hasta el punto de la pared, a la cual se acerca el espejo.

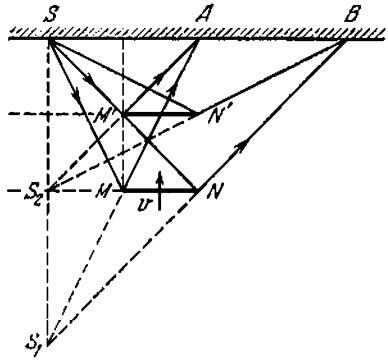


Fig. 499

713. Al moverse el espejo en un ángulo α, el rayo reflejado girará en 2α, porque el ángulo de incidencia aumentará en α y el ángulo de reflexión aumentará en igual magnitud. Por lo tanto, la velocidad angular de rotación del rayo reflejado es $\omega = 2\pi n \cdot 2$. La velocidad lineal del movimiento de la reflexión por la pantalla es $v = 4\pi nR \approx 62{,}8$ m/s.

714. 1) El rayo reflejado del primer espejo forma con el rayo incidente un ángulo 2α, donde α es el ángulo de incidencia. Durante un intervalo de tiempo t, el espejo girará en un ángulo ωt y el nuevo ángulo de incidencia será $\alpha + \omega t$. El ángulo de reflexión también será igual a este. Por consiguiente, el ángulo entre el rayo incidente y el rayo reflejado aumentará en $2\omega t$, es decir, el rayo reflejado girará en un ángulo $2\omega t$. Gracias a ello, el ángulo de incidencia en el segundo espejo, si éste no girara, sería igual a $\beta + 2\omega t$, donde β es el ángulo de incidencia, estando los discos inmóviles. Pero, durante el tiempo t, el espejo también gira en un ángulo ωt, por eso el ángulo de incidencia se hace igual a $\beta + 3\omega t$. El ángulo de reflexión será también este mismo. De esta manera, después de dos reflexiones, el rayo gira en un ángulo $3\omega t$ con relación a su dirección, estando los espejos inmóviles. Después de tres reflexiones el rayo gira en $5\omega t$, después de n reflexiones, en $(2n - 1)\cdot 2\omega t$. De este modo, la velocidad angular será $\Omega = (2n - 1)\cdot 2\omega$.
2) La imagen en el espejo que va alejándose de la fuente con velocidad v, se alejará de la fuente con velocidad $2v$ y del segundo espejo, con velocidad $3v$. Por eso, la segunda imagen se mueve con velocidad $3v$ respecto al segundo espejo y con velocidad $4v$ respecto a la fuente. La velocidad de la tercera imagen respecto a la fuente, será $6v$ y la velocidad de la enésima será $2nv$.

715. 1) Al moverse el primer espejo en un ángulo ωt, el rayo reflejado se moverá en un ángulo $2\omega t$ (véase la resolución del problema 714). De tal manera, aumentará en $2\omega t$ el ángulo de incidencia en el segundo espejo y, si éste no girara, el ángulo de reflexión también aumentaría en $2\omega t$. Después de dos reflexiones, el rayo giraría en comparación con el caso de los espejos inmóviles, en un ángulo $2\omega t$. No obstante, como consecuencia de la rotación del segundo espejo, el ángulo de incidencia del rayo en éste, durante un tiempo t, disminuirá en ωt. En igual magnitud disminuirá el ángulo de reflexión, por eso el rayo reflejado tendrá la misma dirección, que en el caso de los discos inmóviles. Como tal razonamiento puede efectuarse para cualesquiera de las dos reflexiones consecutivas, la velocidad angular de rotación del rayo, que sufre n reflexiones, será:

$$\Omega = 0, \text{ si } n \text{ es par}; \quad \Omega = 2\omega, \text{ si } n \text{ es impar}.$$

2) La primera imagen se aleja de la fuente con velocidad $2v$ y del segundo espejo con velocidad v. Por consiguiente, la segunda imagen se mueve con relación al segundo espejo con velocidad $-v$, o sea, ella está inmóvil respecto a la fuente. Continuando este razonamiento, encontramos que la velocidad lineal incógnita de la enésima imagen será nula, si n es par y será igual a $2v$, si n es impar.

716. El rayo reflejado del espejo ON forma con el rayo incidente un ángulo φ (véase la fig. 244), que no depende del ángulo de incidencia i. En efecto, como vemos del triángulo ABC, $\varphi = 180° - 2(i + r)$. Al mismo tiempo, en el triángulo OAB $\alpha + (90° - i) + (90° - r) = 180°$. De donde $\varphi = 180° - 2\alpha = 60°$. Durante la rotación del espejo la dirección del

rayo reflejado no cambia. Por lo tanto, si el rayo que cayó en el espejo OM, se reflejará del espejo ON, éste obligatoriamente alcanzará el receptor. Como no es difícil ver en la fig. 500, en que están mostradas las dos posiciones extremas de los espejos durante las cuales el rayo alcanza el receptor (OM, ON

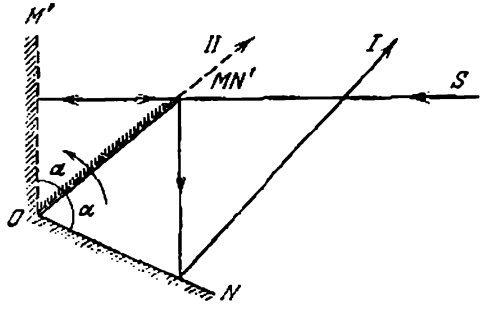


Fig. 500

y OM', ON'), esto tendrá lugar en el transcurso de 1/6 de una vuelta. Por eso, 1/6 parte de toda la energía del rayo alcanzará el receptor durante una vuelta y también gracias al intervalo de tiempo suficientemente grande.

717. No, porque alcanzarán el ojo los rayos que dan las imágenes solamente de las pequeñas partes del cuadro (véase la fig. 501,

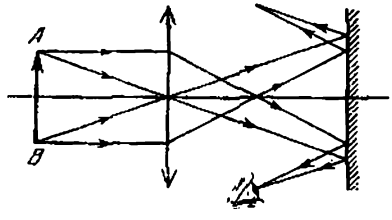


Fig. 501

en que está representado el trayecto de los rayos de las partes extremas del cuadro A y B).

718. De la igualdad de los triángulos SOA, SOB, $S_1''OA$, $S_1'OB$ se deduce (fig. 502), que la fuente luminosa S, su imagen S_1' en el espejo OB y la imagen S_1'' en el espejo OA, se encuentran en la circunferencia con centro en el punto O. $\angle S_1''OS = \angle SOS_1' = \varphi$. La fuente virtual S_1' se refleja en el espejo AO, produciendo la imagen S_2', que se encuentra en la misma cir-

cunferencia a distancia 2φ grados de la fuente S. Del modo absolutamente análogo se produce la imagen S_2'' de la fuente virtual S_1'' en el espejo OB.
Continuando la construcción, obtenemos las terceras imágenes S_3' y S_3'' que se encuentran de la fuente en 3φ grados; las cuartas

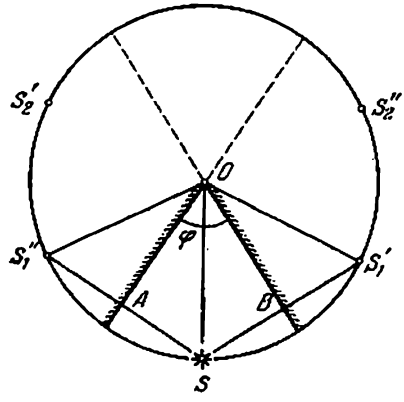


Fig. 502

S_4' y S_4'' (que se encuentran en 4φ grados), etc. Si el número n es par ($n = 2k$), la imagen S_k' coincide con S_k'' y se encontrará en el mismo diámetro que la fuente. De tal modo, habrán en total $2k - 1 = n - 1$ imágenes. Si n es impar ($n = 2i + 1$), veremos fácilmente que las i-ésimas imágenes se sitúan en las prolongaciones de los espejos y por consiguiente, coinciden con las $(i + 1)$-ésimas y con todas las siguientes. Por eso habrán en total $2i$ imágenes, es decir, como anteriormente $n - 1$.

719. Aprovechando la resolución del problema 718, construimos unas tras otras las primeras, las segundas, las terceras, etc. imágenes de la fuente S en los espejos (fig. 503). Todas ellas se encontrarán en una circunferencia con radio OS y el centro en el punto O. Si a es un número entero, las últimas i-ésimas imágenes se encontrarán en los puntos C y D de intersección de la circunferencia con las prolongaciones de los espejos, o coincidirán con el punto F, diametralmente opuesto a la fuente. En el primer y en el segundo casos el número de imágenes será $a - 1$. Si a no es entero, por ejemplo, $a = 2i \pm \xi$, donde $\xi < 1$, e i es un número entero, entonces las últimas i-ésimas imágenes se encontrarán en el arco CFD que se sitúa detrás tanto del primero, como del segundo espejo y por consiguiente, no tendrán lugar las reflexiones posteriores. Por eso el número total de imágenes será $2i$.

720. Construimos la imagen del punto B en el espejo bd (fig. 504). Luego construimos la imagen B_1 en el espejo cd; B_3, la imagen

de B_2 en el espejo ac; B_4, la imagen de B_3 en el espejo ab. Unimos los puntos A y B_4. C es el punto de intersección de ab con la línea AB_4. De B_3 trazamos la línea B_3C. El punto D

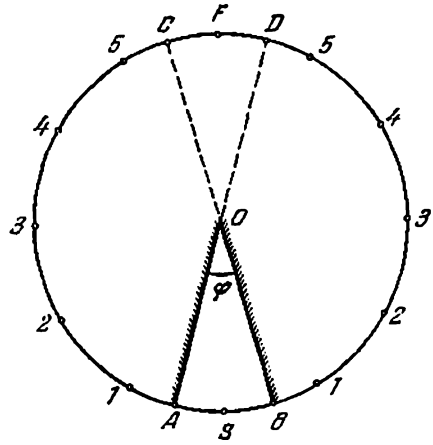


Fig. 503

de intersección de esta línea con ac, unimos con B_2. El punto E unimos con B_1 y F con B. Podemos afirmar que la línea quebrada $ACDEFB$ es la trayectoria incógnita del rayo. En efecto,

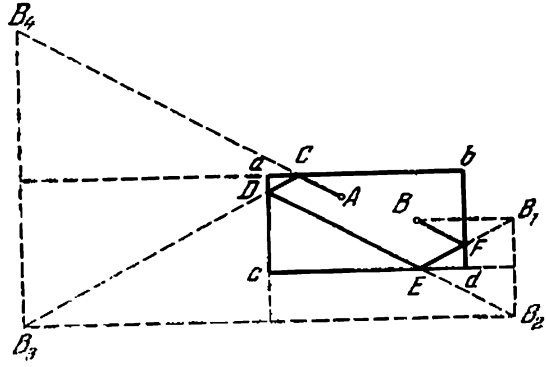


Fig. 504

como el $\triangle B_3CB_4$ es isósceles, CD es la reflexión del rayo AC. Del modo análogo podemos convencernos de que DE es la reflexión de CD, etc.

La solución dada del problema no es la única, ya que no es obligatorio que el rayo se dirija inicialmente al espejo ab.

721. El coeficiente de reflexión de la luz de la superficie del agua disminuye con la disminución del ángulo de incidencia. Si el observador mira hacia abajo, a sus ojos llegan rayos reflejados bajo ángulos pequeños. Los rayos reflejados de los sectores del mar en el horizonte, alcanzan los ojos bajo los ángulos grandes.

722. Según la ley de refracción: sen i/sen $r = n$ (fig. 505). Al salir de la placa, sen r/sen $i_1 = 1/n$. Multiplicando estas expresiones obtendremos que sen i = sen i_1, o sea, el rayo CD que

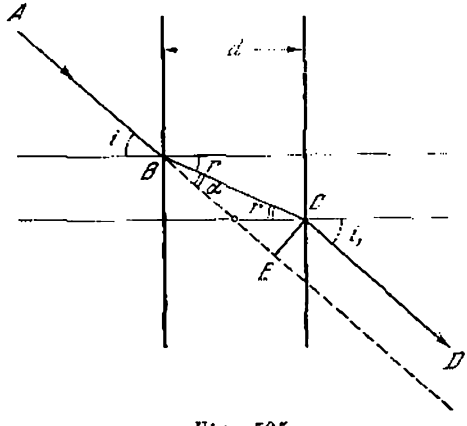


Fig. 505

salo de la placa, es paralelo al rayo incidente AB. Como sigue del dibujo: $\alpha = i - r$. El desplazamiento incógnito del rayo es $x = EC = BC$ sen $(i - r)$ y como $BC = d/\cos r$, entonces

$$x = \frac{d \operatorname{sen}(i-r)}{\cos r} = d \operatorname{sen} i \left(1 - \frac{\cos i}{\sqrt{n^2 - \operatorname{sen}^2 i}}\right).$$

Cuando $i \to 90°$, el desplazamiento máximo será d.

723. El ángulo de incidencia del rayo sobre las caras AC y BC es 45°. Para la reflexión total es necesario que sen $i > 1/n$, de donde $n > \sqrt{2} \approx 1{,}4$.

724. El ángulo de incidencia del rayo sobre la cara BC es igual al ángulo incógnito α. Para que el rayo se refleje por completo de la cara BC hace falta que el ángulo α sea mayor que el ángulo límite. Por consiguiente, sen $\alpha > n_2/n_1$, donde n_2 es el índice de refracción del agua. De ahí resulta que $\alpha > 62°30'$.

725. Este fenómeno es nada más que una imagen que se observa con frecuencia en los desiertos. La capa calentada del aire, más cercana al asfalto, tiene un coeficiente de refracción menor que las capas situadas más arriba. Como consecuencia de ello,

se produce la reflexión total y el asfalto parece ser un buen reflector de la luz igual a la superficie del agua.

726. Dividamos la placa en una infinidad de plaquitas finas de espesor muy pequeño, para poder, dentro de los límites de cada plaquita, considerar el índice de refracción como una magnitud constante (fig. 506). Supongamos que el rayo penetre

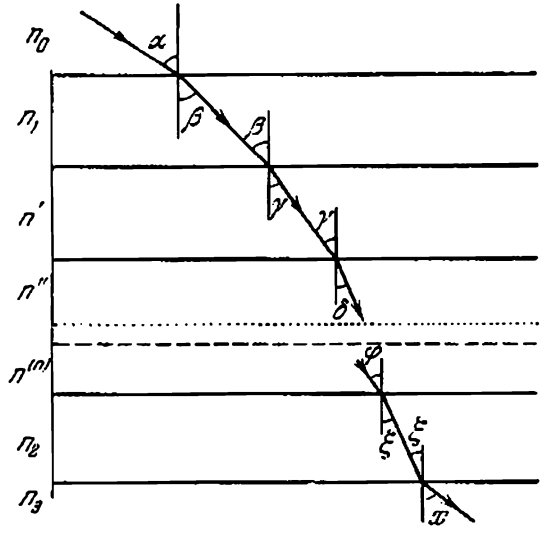


Fig. 506

en la placa de un medio con índice de refracción n_0 y salga de ella a un medio con índice de refracción n_3. Entonces, de acuerdo con la ley de refracción,

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{n_1}{n_0}, \quad \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\gamma}=\frac{n'}{n_1},$$

$$\frac{\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\delta}=\frac{n''}{n'}, \text{ etc.},$$

$$\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\xi}=\frac{n_2}{n^{(n)}}, \quad \frac{\operatorname{sen}\xi}{\operatorname{sen}x}=\frac{n_3}{n_2}.$$

Multiplicando estas igualdades, obtenemos que $\operatorname{sen}\alpha/\operatorname{sen}x = n_3/n_0$. Por consiguiente, el ángulo, bajo el cual el rayo sale de la placa, será

$$x=\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{n_0}{n_3}\operatorname{sen}\alpha\right)$$

y dependerá solamente del ángulo de incidencia del rayo sobre la placa y de los índices de refracción de los medios, situados a ambos lados de la placa. En particular, si $n_3 = n_0$, entonces $x = \alpha$.

Normalmente, el ángulo θ de inclinación del rayo con relación a la vertical está relacionado con el índice de refracción n

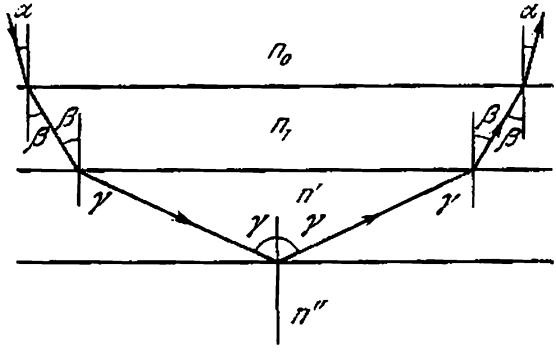


Fig. 507

en cualquier punto de la placa mediante la relación $n \operatorname{sen} \theta = \text{const} = n_0 \operatorname{sen} \alpha$. Si, en un lugar cualquiera dentro de la placa, el índice de refracción alcanza un valor $n = n_0 \operatorname{sen} \alpha$, entonces tendrá lugar la reflexión total. En este caso, el rayo saldrá de la placa al medio bajo el mismo ángulo α bajo el cual él penetró en la placa (fig. 507).

727. La cantidad mínima de agua, determinada por el nivel x (fig. 508), podemos hallar del triángulo MNF, $NF = x - b = x \operatorname{tg} r$. De la ley de refracción tenemos que $\operatorname{sen} r = \operatorname{sen} i/n$. Por consiguiento,

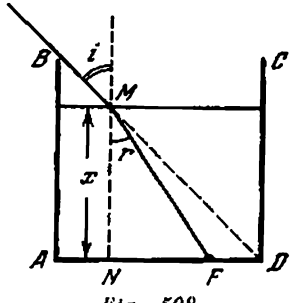


Fig. 508

$$x = \frac{b}{1 - \operatorname{tg} r} = \frac{b\sqrt{n^2 - \operatorname{sen}^2 i}}{\sqrt{n^2 - \operatorname{sen}^2 i} - \operatorname{sen} i} \approx 27 \text{ cm}.$$

porque $i = 45°$ y $n = 4/3$. El volumen necesario de agua es $V = xa^2 \approx 43{,}2$ l.

728. $\varphi = 120°$.

729. El trayecto del rayo en el prisma está representado en la fig. 509. Entre los ángulos α y β existe una relación evidente: $2\alpha + \beta = 180°$, $\alpha = 2\beta$. De ahí $\alpha = 72°$; $\beta = 36°$.

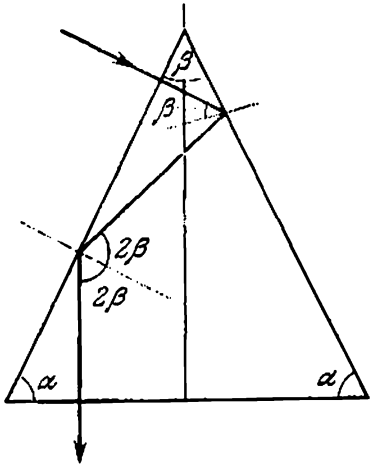


Fig. 509

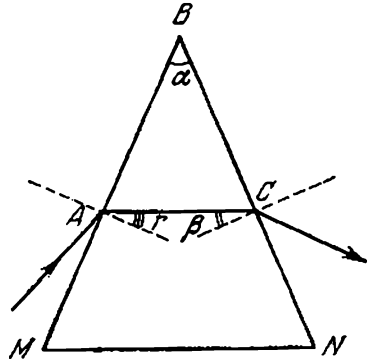


Fig. 510

730. El recorrido del rayo en el prisma está representado en la fig. 510. Para que no produzca una reflexión total en la cara BN, es necesario que sen $\beta \leqslant 1/n$. Como vemos en el dibujo, $\beta = \alpha - r$. Por lo tanto, cuanto mayor es r, tanto mayor será el valor admisible de α. El valor máximo de r se determina por la condición: sen $r = 1/n$ (el ángulo de incidencia es 90°), de donde

$$\alpha_{\text{máx}} = 2 \text{ arc sen } (2/3) \approx 83°40'.$$

731. Analizando los triángulos ABC, AMC y ADC (fig. 511), no es difícil convencerse de que $r + r_1 = \varphi$; $\gamma = \alpha + \beta - \varphi$. Por la ley de refracción

$$\text{sen } \alpha/\text{sen } r = n, \quad \text{sen } r_1/\text{sen } \beta = \frac{1}{n}.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenido, hallamos

$$\varphi = \alpha + \beta - \gamma$$

y

$$n = \text{sen } \beta \sqrt{\left\{\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \beta \text{ sen } (\alpha + \beta - \gamma)} + \frac{1}{\text{tg } (\alpha + \beta + \gamma)}\right\}^2 + 1}.$$

732. Por las condiciones del problema el rayo incidente y el rayo que pasa por el prisma son perpendiculares entre sí. Por consiguiente $\angle\varphi = \angle\alpha$, así como, $\angle\gamma = \angle\beta$ (fig. 512). La suma

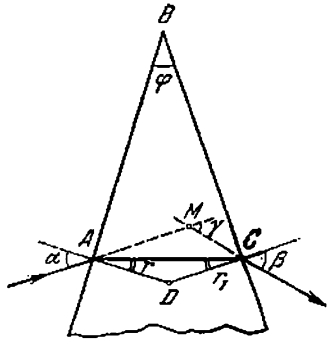


Fig. 511

de los ángulos del cuadrilátero $AKMN$ es igual a 360°. Por eso, $\angle KMN = 90°$ y el rayo KM cae sobre la cara BC bajo un ángulo de 45°. Conociendo los ángulos del triángulo KBM,

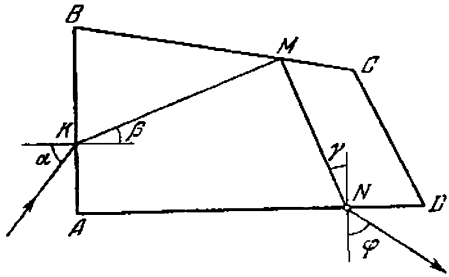


Fig. 512

no es difícil encontrar que $\beta = 30°$. Por la ley de la refracción sen α/sen $\beta = n$. Por consiguiente,

$$\text{sen}\ \alpha = 0{,}5\ n, \quad \alpha = \text{arc sen}\ 0{,}5\ n.$$

Como la reflexión total bajo un ángulo de 45° se verifica solamente cuando $n \geqslant \sqrt{2}$, entonces el ángulo α se encuentra dentro de los límites $45° \leqslant \alpha \leqslant 90°$.

733. El papel permite en parte el paso de luz. Como consecuencia de la estructura fibrosa y del grande número de poros, la dispersión de la luz por todos los lados, es muy grande. Por eso es

imposible leer el texto. La cola o el agua llenando los poros, disminuyen la dispersión de la luz, ya que el índice de refracción de estas últimas es semejante al índice de refracción del papel. La luz comienza a pasar a través del papel, no sufriendo desviaciones sensibles. Debido a ello, el texto puede leerse fácilmente.

734. En la primera superficie de separación, el haz que es portador de una energía E, se divide en dos haces (fig. 513). Un haz con energía pE se volverá al primer medio y se infiltrará en la

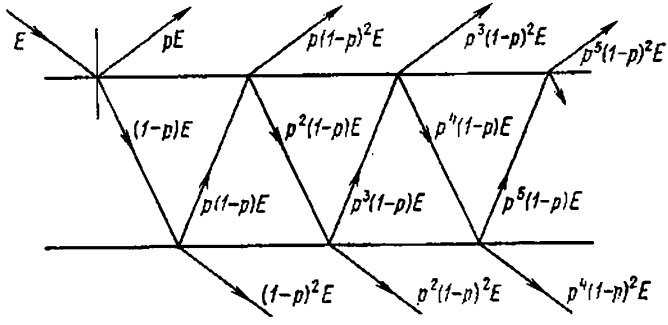


Fig. 513

placa una luz que posee energía $(1 - p)\,E$. En la segunda superficie de separación, el haz que posee energía $(1 - p)\,E$, se dividirá nuevamente. El haz saldrá de la placa al segundo medio con energía $(1 - p)^2\,E$. Haciendo consideraciones análogas, llegaremos a la conclusión que a través de la placa pasarán y saldrán al segundo medio haces luminosos con energías $(1 - p)^2\,E$, $p^2\,(1 - p)^2\,E$, $p^4\,(1 - p)^2\,E$, etc. (fig. 513). La energía resultante de los haces que entran en el segundo medio, es

$$E_2 = (1-p)^2\,E\,(1+p^2+p^4+\ldots) = E\,\frac{(1-p)^2}{1-p^2} = E\,\frac{1-p}{1+p}.$$

Al primer medio se volverán los haces con energías

$$E_1 = pE + (1-p)^2\,Ep\,(1+p^2+p^4+\ldots) = E\,\frac{2p}{1+p}.$$

La energía total será

$$E_1 + E_2 = E\,\frac{2p}{1+p} + E\,\frac{1-p}{1+p} = E.$$

735. Supongamos que la distancia desde el punto luminoso hasta el espejo sea igual a d, y la distancia desde la reflexión hasta el espejo sea f. Entonces, por la fórmula del espejo cóncavo tenemos

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{2}{R}.$$

Por la condición $|d-f|=0{,}75\ R$. Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenido, encontramos las siguientes soluciones:

$$d_1=1{,}5\ R,\quad d_2=0{,}25\ R,\quad d_3=0{,}75\ R.$$

La cuarta solución $d_4=-0{,}5\ R$ es inconveniente porque solamente tiene sentido $d>0$.

736. $f=2R$.

737. La lente es divergente. Su distancia focal es 3 m.

738. En el primer caso, la distancia focal se determina por la fórmula

$$\frac{1}{f_1}=\left(\frac{n}{n_1}-1\right)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right).$$

Como en el vacío la distancia focal de la lente es igual a f, entonces

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{1}{(n-1)f},$$

de donde $f_1=\dfrac{(n-1)f}{n/n_1-1}=90$ cm. En el segundo caso, la distancia focal incógnita es $f_2=\dfrac{(n-1)f}{n/n_2-1}=-102$ cm. La lente será divergente.

739. Si la lente tiene la parte convexa dirigida al interior del tubo, entonces $F_1=\dfrac{n_1}{n_2-1}R$. Si al interior del tubo está dirigida la parte plana de la lente, entonces $F_2=\dfrac{n_1}{n_2-n_1}R$.

740. Como fue demostrado en la solución del problema 738, $-f=\dfrac{n_2(n_1-1)}{D(n_1-n_2)}$, de donde $n_2=\dfrac{fDn_1}{fD+1-n_1}\approx 1{,}67$.

741. Designemos por R el radio de curvatura de las superficies de la lente; por n_1, el índice de refracción del vidrio. Entonces

$$\frac{1}{F_1}=(n_1-1)\frac{2}{R},\qquad \frac{1}{F_2}=\left(\frac{n_1}{n}-1\right)\frac{2}{R}.$$

Al mismo tiempo, si la lente se encuentra en la superficie de separación de los medios y los rayos parten del agua, el foco

de la lente está situado en el aire, a una distancia F' que se halla de la igualdad

$$\frac{1}{F'}=\frac{n_1-n}{R}+\frac{n_1-1}{R}.$$

De tal modo, si los rayos parten del aire, el foco se encuentra en el agua a una distancia F'', siendo

$$\frac{n}{F''}=\frac{n_1-n}{R}+\frac{n_1-1}{R}.$$

De estas cuatro ecuaciones deducimos

$$F'=\frac{2F_1F_2}{F_2+nF_1}=\frac{6F_1F_2}{4F_1+3F_2},$$

$$F''=\frac{2nF_1F_2}{F_2+nF_1}=\frac{8F_1F_2}{4F_1+3F_2}.$$

742. Está claro que una de las reflexiones será virtual. Por eso, designando por a_1 y a_2 las distancias desde las fuentes luminosas hasta la lente, y por b_1 y b_2, las distancias desde la lente hasta las reflexiones, tendremos

$$\frac{1}{a_1}-\frac{1}{b_1}=\frac{1}{f}, \quad \frac{1}{a_2}+\frac{1}{b_2}=\frac{1}{f};$$

por las condiciones del problema $a_1 + a_2 = l$, $b_1 = b_2$. Resolviendo el sistema de ecuaciones dado, obtenemos

$$a_1=\frac{l\left(1\pm\sqrt{1-2f/l}\right)}{2}.$$

La lente deberá encontrarse a distancia de 6 cm de una de las fuentes y a 18 cm de la otra.

743. Aplicando a ambos casos la fórmula de la lente, obtenemos

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{b_1}=\frac{1}{f}, \quad \frac{1}{a_2}+\frac{1}{b_2}=\frac{1}{f}.$$

Por la condición del problema $a_2 = a_1 + l$, $b_1/a_1 = k_1 = 3$ (aumento en el primer caso); $b_2/a_2 = k_2 = 2$ (aumento en el segundo caso), de donde $f = \frac{k_1k_2}{k_2-k_1}\,l = 9$ cm.

744. 1) El trayecto de los rayos, en el caso dado, está representado en la fig. 514, *a*. Utilizando la propiedad de la reversibilidad de los haces luminosos, el punto B puede considerarse como una fuente luminosa, y el punto A, como una reflexión. Entonces, por la fórmula de la lente, tenemos:

$$\frac{1}{a_1}-\frac{1}{b}=-\frac{1}{f},$$

de donde $f = a_1b/(a_1 - b) = 20$ cm.

2) El trayecto de los rayos está representado en la fig. 514, *b*. En el caso dado, la imagen (punto *A*) y la fuente (punto *B*) son virtuales. Por la fórmula de la lente

$$-\frac{1}{a_2}-\frac{1}{b}=-\frac{1}{f},$$

de donde $f = a_2b/(a_2 + b) = 12$ cm.

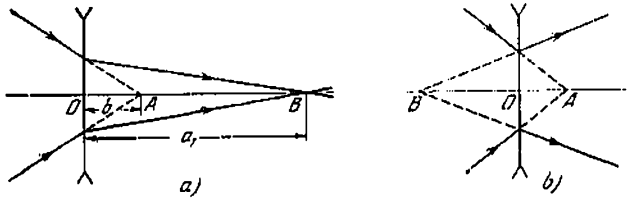


Fig. 514

745. Basándose en la fórmula de la lente

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{d-a}=\frac{1}{f},$$

donde a es la distancia entre la lente y la lámpara. De ahí

$$a^2 - ad + df = 0.$$

Resolviendo esta ecuación, recibimos

$$a=\frac{d}{2}\pm\sqrt{\frac{d^2}{4}-df}.$$

Por lo tanto, serán posibles dos posiciones de la lente: a una distancia $a_1 = 70$ cm de la lámpara y a una distancia $a_2 = 30$ cm. Si $f' = 26$ cm, no habrá una imagen nítida en la pantalla a cualquier que sea la posición de la lámpara, porque para obtener una imagen es necesario que $d \geqslant 4f$.

746. En el primer caso, $h_1H = b_1/a_1$, donde a_1 y b_1 son las distancias desde el objeto y desde la imagen hasta la lente. En el segundo caso, $h_2/H = b_2/a_2$, respectivamente. Como deducimos de la solución del problema 745: $a_1 = b_2$ y $b_1 = a_2$; por lo tanto, $H = \sqrt{h_1h_2}$.

747.

$$F=\frac{n-n_1}{n_1(n-1)}\,\frac{f_1f_2}{f_1+f_2}=4 \text{ cm}.$$

748. Basándose en la fórmula del espejo

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{f}.$$

El aumento lineal del espejo es $H/h = b/a$. Las dimensiones angulares de la imagen en un espejo cóncavo, por las condiciones del problema, son 1,5 veces mayores que las dimensiones angulares de la imagen en un espejo plano: $\beta = 1{,}5\alpha$ (fig. 515).

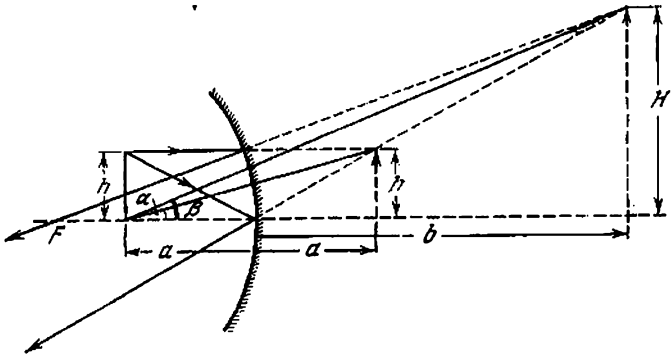


Fig. 515

Es evidente que $\operatorname{tg}\alpha = h/2a$, $\operatorname{tg}\beta = H/(a+b)$. Cuando $h \ll 2a$, los ángulos α y β serán pequeños. Para pequeños ángulos

$$H/(a+b) \approx 1{,}5h/2a.$$

Excluyendo de las ecuaciones las incógnitas H/h y b, determinamos que $f \approx 3a/2$. Por consiguiente, $R = 2f = 3a = 6$m.

749. La construcción que tratamos de encontrar está representada en la fig. 516. Prolongamos AB hasta la intersección con el

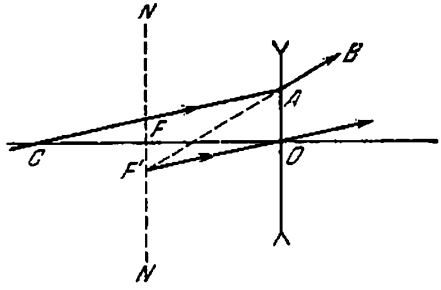


Fig. 516

plano focal de la lente NN. El haz de rayos paralelos, después de refractarse en la lente, continúa de tal modo que las prolonga-

ciones de los rayos refractados deben intersecarse en F'. El rayo $F'O$ no se refractará. Por lo tanto, el rayo CA, incidente en el punto A va hasta la lente paralelamente a $F'O$.

750. Si A es la fuente y B, la imagen, entonces la lente es convergente. La posición del centro óptico de la lente O y de sus focos

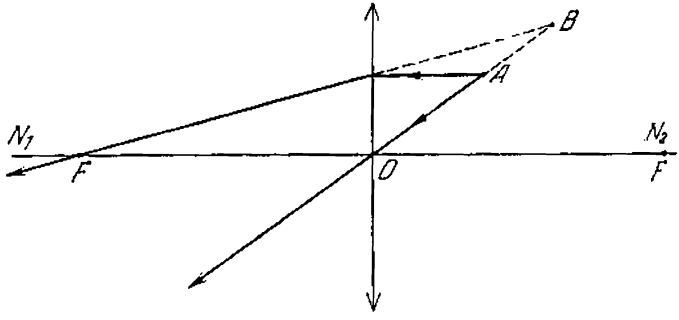


Fig. 517

F, se halla por la construcción gráfica representada en la fig. 517. Si B es la fuente y A, la imagen, entonces la lente es divergente. La construcción respectiva se da en la fig. 518.

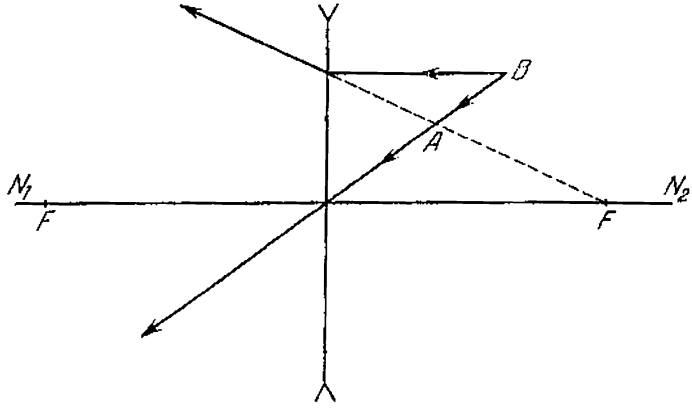


Fig. 518

751. El centro de la lente O es el punto de intersección de las rectas SS' y N_1N_2. Los focos se hallan con facilidad por la construcción de los rayos paralelos al eje óptico principal (fig. 519).

752. Al trazar una perpendicular BO sobre la recta N_1N_2, encontramos el punto O que es el centro óptico de la lente (fig. 520). Trazamos un eje óptico secundario DO, paralelo al rayo AB.

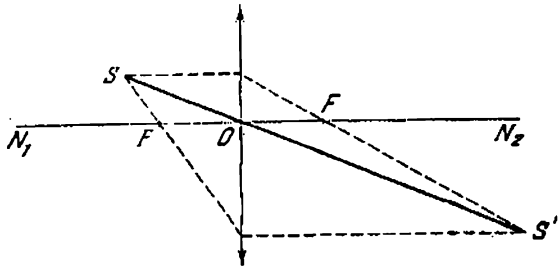


Fig. 519

Prolongamos la recta BC hasta la intersección con el eje DO en el punto E que se encuentra en el plano focal. Bajando de E una perpendicular a N_1N_2, encontramos el punto F, que es

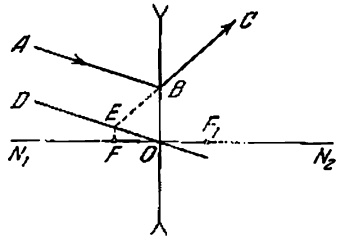


Fig. 520

uno de los focos principales de la lente. Aprovechando la propiedad de la reversibilidad del rayo, podremos encontrar, de un modo análogo, otro foco principal de la lente F_1.

753. La imagen S' puede ser real o virtual. En ambos casos, para determinar la posición de la fuente, tracemos un rayo arbitrario ADS' y paralelamente a éste, un eje óptico secundario BOC (fig. 521). Uniendo por rectas los puntos de intersección B y C (el eje secundario con los planos focales) con el punto D, hallamos la posición de la fuente S_1 (si la imagen S' es real) y S_2 (si la imagen S' es virtual).

754. Aprovechando el hecho de que el rayo incidente en el espejo, en su polo, se refleja simétricamente con relación al eje óptico principal, construimos el punto S_1, simétrico a S', y trazamos el rayo SS_1 hasta la intersección con el eje en el punto P (fig. 522). Este punto será el polo del espejo. El centro óptico C del espejo, como es evidente, puede encontrarse como el punto

de intersección del rayo SS' con el eje NN'. El foco se halla por la construcción común del rayo SM paralelo al eje, el cual, al reflejarse, deberá pasar por el foco F (situado en el eje óptico del espejo) y por S'.

755. 1) Construyendo, igualmente como en la resolución del problema 754, el rayo BAC encontramos el punto C (el centro óptico del espejo) (fig. 523, *a*). El polo P puede encontrarse mediante

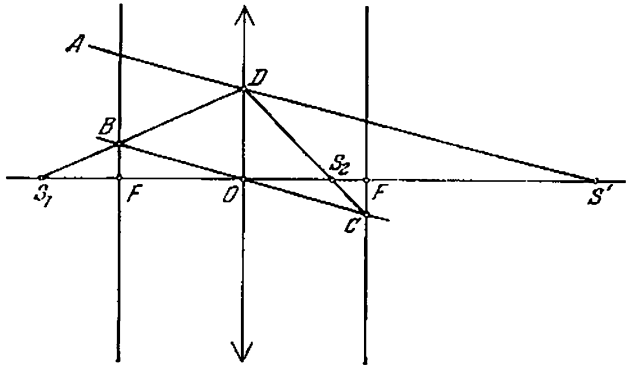


Fig. 521

la construcción del trayecto del rayo reflejado APA' en el polo, con ayuda del punto simétrico A'. La posición del foco

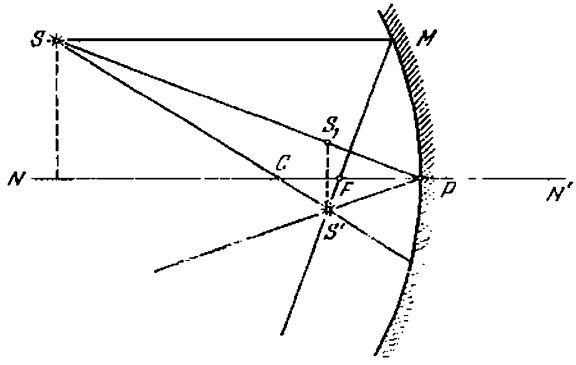


Fig. 522

del espejo F se determina mediante una construcción común del rayo AM paralelo al eje.

2) Por una construcción análoga determinamos el centro del espejo C y el polo P (fig. 523, *b*). El rayo BM, reflejándose,

se dirigirá paralelamente al eje óptico del espejo. Por eso, para hallar el foco, primeramente encontramos el punto de intersección M de la recta AM paralela al eje óptico, con el espejo y después prolongamos BM hasta la intersección con el eje en el foco F.

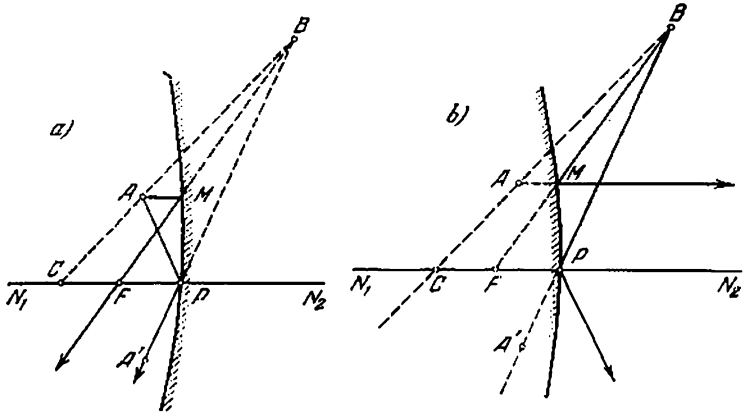


Fig. 523

756. 1) Los rayos reflejados de un espejo plano aumentan la iluminación en el centro de la pantalla. La presencia del espejo es equivalente a la aparición de una nueva fuente (de misma intensidad luminosa), situada a una distancia de la pantalla tres veces mayor que la primera fuente. Por eso, la iluminación deberá aumentar en 1/9 de la iluminación que existía anteriormente: $E_1 = 2{,}5$ lux.

2) El espejo cóncavo está situado de tal modo, que la fuente se encuentra en su foco. Los rayos, al reflejarse del espejo, forman un haz de rayos paralelos. La iluminación en el eje del haz de rayos paralelos es uniforme en todos los lugares e igual a la iluminación creada por una fuente puntual situada en un punto del espejo más próximo a éste. La iluminación total en el centro de la pantalla, es igual a la suma de las iluminaciones creadas por la propia fuente en el centro de la pantalla y por los rayos reflejados: $E_2 = 2 \cdot 2{,}25$ lux $= 4{,}5$ lux.

3) La imagen virtual de una fuente puntual en un espejo convexo se encuentra a una distancia $2{,}5\ r$ de la pantalla (r es la distancia desde la pantalla hasta la fuente). El flujo luminoso Φ proyectado por esta fuente virtual es igual al flujo luminoso de la fuente real que incide en el espejo: $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$. Como el ángulo sólido ω_1 del flujo que incide en el espejo de la fuente S (fig. 524), es cuatro veces menor que el ángulo sólido ω_2, dentro del cual se propagan los rayos de la fuente virtual S_1, entonces la intensidad luminosa I_2 de la fuente virtual es cuatro veces menor que la intensidad luminosa de la fuente S. Por eso,

la fuente virtual crea en el centro de la pantalla una iluminación $4 \cdot (2{,}5)^2 = 25$ veces menor que la fuente real. Por consiguiente, $E_3 = 2{,}34$ lux.

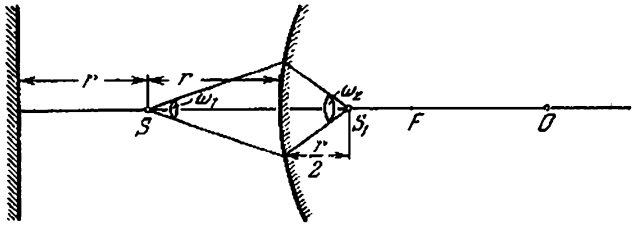


Fig. 524

757. Cada sector de la lente crea una imagen completa independientemente de los otros. Por eso en la imagen no aparecerán ningunas rayas. Ella será simplemente menos luminosa.

758. Cualquier sector de la lente da la misma forma de imagen que toda lente. Una lente compleja puede considerarse gracias a ello como dos lentes con diferentes distancias focales, pero

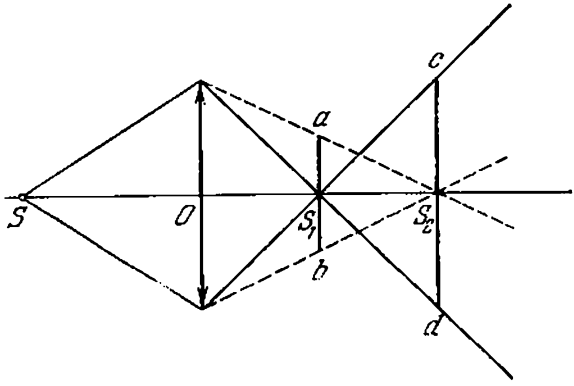


Fig. 525

con un centro óptico común. Por consiguiente, esta lente creará dos imágenes: en el punto S_1 y en el punto S_2 (fig. 525). En la pantalla, situada perpendicularmente al eje óptico, en el punto S_1 o S_2, la imagen de la fuente será rodeada de una aureola luminosa de diámetro *ab* o de diámetro *cd*, respectivamente.

759. Para demostrar la igualdad de las dimensiones del disco solar vistas en el horizonte y en el zenit hace falta proyectar el disco solar, en ambos casos, en una hoja de papel con ayuda de una

lente de distancia focal grande. En este caso, la lente y la hoja deberán ser perpendiculares a los rayos solares. La lente deberá tener una distancia focal grande, porque las dimensiones de la imagen son proporcionales a esa distancia focal. Al medir las dimensiones de las imágenes, nos convencemos de que ellas son iguales.

§ 31. SISTEMAS E INSTRUMENTOS OPTICOS

760. La lente divergente debe colocarse a una distancia de 25 cm de la convergente. De este modo, los focos de las lentes diver-

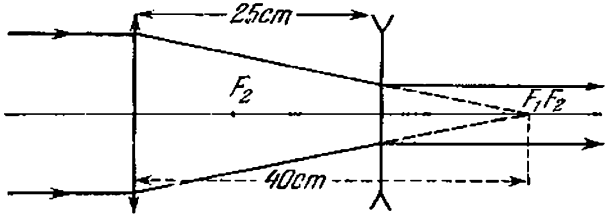


Fig. 526

gente y convergente se coincidirán. En la fig. 526 está representado, mediante el gráfico, el recorrido de los rayos.

761. Son posibles dos casos.

1) El espejo se encuentra a una distancia $d = f + R$ de la lente. El trayecto del rayo, paralelo al eje óptico del sistema,

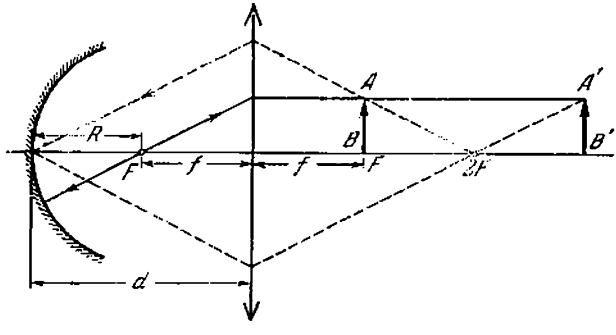


Fig. 527

así como la imagen del objeto AB, se dan en la fig. 527. La imagen $A'B'$ (directa y real) se obtiene en el tamaño natural para cualquier posición del objeto.

2) El espejo se encuentra a una distancia $d = f = R$ de la lente (fig. 528). La imagen del objeto $A'B'$ tendrá también

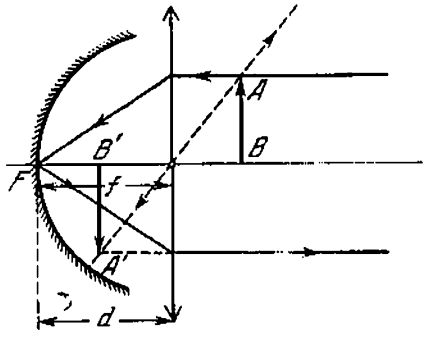


Fig. 528

un tamaño natural, siendo inversa y virtual para cualquier posición del objeto.

762. El trayecto de los rayos en el sistema óptico dado está representado en la fig. 529. La primera lente, en la ausencia de la

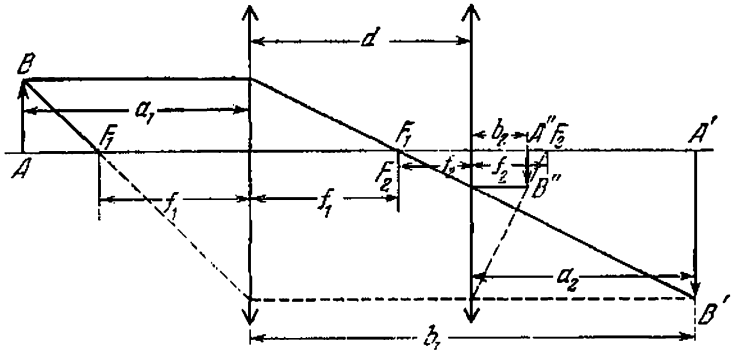


Fig. 529

segunda, crea la imagen $A'B'$ que se encuentra a una distancia $b_1 = 60$ cm de la lente. Esta distancia se halla por la fórmula de la lente:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_1}.$$

La imagen $A'B'$ es «virtual» con relación a la segunda lente. Por consiguiente,

$$-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{b_2}=\frac{1}{f_2}.$$

donde $a_2 = b_1 - d = 30$ cm. De donde $b_2 = 7{,}5$ cm.

763. De la solución del problema anterior se deduce que en el caso de dos lentes convergentes que se encuentran a cierta distancia d la una de la otra es válida la igualdad

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{b_1}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}+\frac{d}{a_2 b_1}.$$

En nuestro caso la lente divergente se encuentra muy cerca de la convergente ($d = 0$), por eso

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{b_2}=-\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}=\frac{1}{f},$$

donde f es la distancia focal del sistema que buscamos. De donde $f = f_1 f_2/(f_1 - f_2)$.

764. La lente media (la tercera) es convergente. Si la distancia desde el objeto hasta la lente anterior del sistema es d, entonces la distancia desde la lente posterior hasta la imagen es $f = F^2/4d$, donde F es la distancia focal de la lente divergente. El aumento del sistema es $k = F/2d$. A distancia mínima entre el objeto y su imagen (esta distancia es $3F$) $k = 1$.

765. En la segunda lente incide un haz luminoso que sale del punto situado a una distancia $a_2 = 5$ cm de la lente. Las prolongaciones de los rayos luminosos refractados por esta lente, se interceptan, como deducimos de la fórmula de la lente a una distancia $b_2 = 4$ cm de la misma (fig. 530). Este punto coincide con

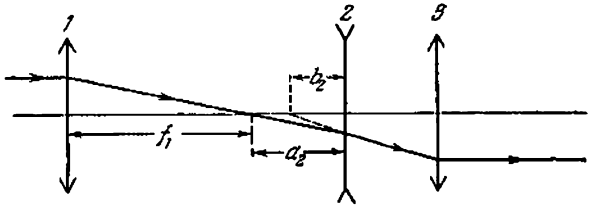


Fig. 530

el foco de la tercera lente. Por eso, los rayos que salen del sistema, formarán un haz de rayos paralelos. El sistema dado es telescópico.

766. La imagen obtenida por el segundo sistema es virtual. Ella se encuentra en el plano focal anterior de la primera lente. El tamaño de la imagen es igual a 2 mm.

767. Supongamos que la distancia entre las lentes sea a. Entonces, si los rayos caen primero sobre la lente divergente, la ecuación para la segunda (convergente) lente se escribirá en la siguiente forma:

$$\frac{1}{F+a}+\frac{1}{f_1}=\frac{1}{F}.$$

En el caso cuando en el primer plano se encuentra la lente convergente, la ecuación para la lente divergente se escribirá del siguiente modo:

$$-\frac{1}{F-a}+\frac{1}{f_2}=-\frac{1}{F},$$

donde f_1 y f_2 son las distancias desde la lente posterior hasta la imagen en el primer y en el segundo casos. Por la condición tenemos $f_1 - f_2 = l$. De estas igualdades recibimos $F = l/2 = 10$ cm.

768. El diámetro de la imagen de la Luna obtenida con ayuda de una lente es $d_1 = \varphi F_x$, donde φ es el diámetro angular de la Luna. El diámetro de la imagen real, producido por el sistema dado, es $d_2 = \varphi F^2/a$, donde a es la distancia entre las lentes; su distancia focal (véase la resolución del problema 767). Por consiguiente, $F_x = F^2/a = 25$ cm.

769. La dimensión de la imagen formada por la primera lente no depende del tipo de la lente: si es divergente o convergente. En ambos casos el diámetro de la imagen es igual a φF, donde φ es el diámetro angular de la Luna. Si la segunda lente es convergente, su aumento es $k_1 = f_1/(F + a) = F/a$. Del modo análogo, si la segunda lente es divergente, entonces $k_2 = f_2/(F - a)$, de donde se deduce que $k_1 = k_2$ y el diámetro de la imagen definitiva $d = \varphi F \cdot F/a = \varphi F^2/a$ es igual en ambos casos.

770. En la fig. 531 se muestra el trayecto del rayo a través de la lámina del punto S del objeto. Como resultado de la refracción

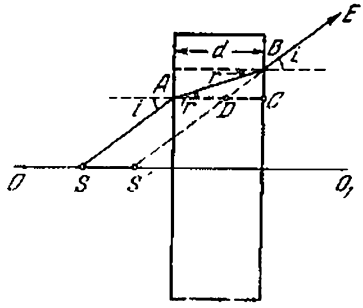


Fig. 531

de la luz en la lámina, tenemos la impresión que el rayo BE sale del punto S'; S' es la imagen virtual de S sobre la lámina.

De este modo la distancia entre la imagen del objeto en la lámina y la lente es $a' = a - SS'$. El desplazamiento $SS' = AD = d - DC$. Considerando los ángulos de incidencia sobre la lámina pequeños, tendremos

$$DC = \frac{BC}{i} = \frac{d \cdot r}{i} = \frac{d}{n},$$

ya que $i/r \approx n$. Por consiguiente, $SS' = d(1 - 1/n) = 4$ cm. Hasta el momento de colocar la lámina, la pantalla se encontraba a una distancia $b = af/(a - f) = 120$ cm; después de colocarla, la pantalla se encontrará a una distancia $b' = a'f/(a' - f) = 180$ cm. Entonces es necesario mover la pantalla en 60 cm.

771. Sin el espejo la imagen del objeto $A'B'$ se produce a una distancia $b = af/(a - f) = 180$ cm de la lente (fig. 532). Después de reflejarse en el espejo la imagen ocupará una posición $A''B''$

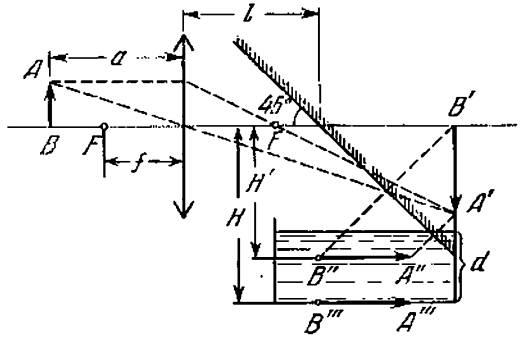


Fig. 532

y se encontrará a una distancia $H' = b - l = 180$ cm del ojo óptico. La capa del agua de espesor d desplazará la imagen en una distancia $H - H' = d(1 - 1/n)$, donde n es el índice de refracción del agua. Esto se deduce directamente de la resolución del problema 770. Por consiguiente, $H = H' + d(1 - 1/n) = 85$ cm.

772. Serán posibles dos casos:
1) El eje óptico de la lente es perpendicular a la cara anterior de la cuña. Los rayos reflejados de la cara anterior, pasando por la lente crean una imagen de la fuente puntual que coincide con la propia fuente. Los rayos reflejados de la cara posterior se inclinan bajo un ángulo φ (fig. 533) que se determina por la igualdad: sen φ/sen $2\alpha = n$. Debido a la pequeña dimensión de los ángulos resulta que $\varphi \approx 2\alpha n$. La segunda imagen de la fuente se producirá a una distancia d de la primera imagen: $d = f \cdot \varphi = f \cdot 2\alpha n$. De donde $n = d/2\alpha f$.

2) El eje óptico de la lente es perpendicular a la superficie posterior de la cuña. Los rayos reflejados de la superficie anterior se inclinan bajo un ángulo $\psi = 2\alpha$ y crean una imagen que se encuentra de la fuente a una distancia $d_1 = 2\alpha f$ (fig. 534).

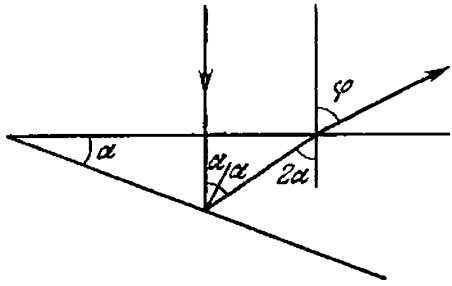


Fig. 533

Los rayos reflejados de la superficie postorior se inclinan bajo un ángulo θ determinado de las ecuaciones

$$\text{sen}\ \alpha/\text{sen}\ \beta = n, \quad \text{sen}\ (\alpha + \theta)/\text{sen}\ (2\alpha - \beta) = n.$$

Cuando los ángulos son pequeños, $\theta = 2\alpha\,(n - 1)$. Por eso, la segunda imagen se encontrará a una distancia $d_2 =$

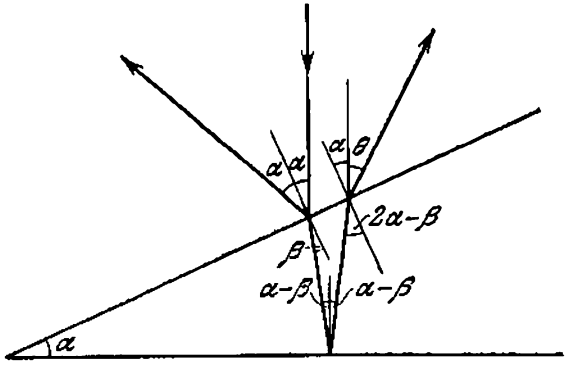


Fig. 534

$= 2\alpha\,(n - 1)\,f$ de la fuente. La distancia total entre las imágenes será $d = d_1 + d_2 = 2\alpha n f$, de donde $n = d/2\alpha f$, como en el caso (1).

773. Como la imagen que coincide con la fuente se forma como consecuencia de la reflexión de la parte del espejo no cubierta por el líquido, es evidente que la fuente se sitúa en el centro

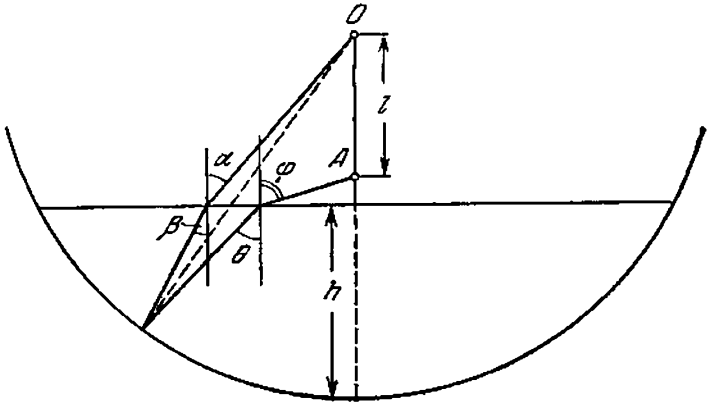


Fig. 535

de la semiesfera O. Determinemos la posición de otra imagen (punto A en la fig. 535). De acuerdo con la ley de la refracción

$$\text{sen}\ \alpha/\text{sen}\ \beta = n \approx \alpha/\beta,$$
$$\text{sen}\ \varphi/\text{sen}\ \theta = n \approx \varphi/\theta.$$

Como vemos en el dibujo $\theta = \beta + 2\gamma$, donde $\gamma \approx \alpha - \beta$ es el ángulo de incidencia del rayo refractado sobre el espejo y $(R - l - h)\ \text{tg}\ \varphi \approx (R - h)\ \text{tg}\ \alpha$. Prescindiendo de h en comparación con R, hallamos del sistema de ecuaciones obtenido, que $n = (2R - l)/2\ (R - l) = 1{,}6$.

774. La imagen $A'''B'''$ obtenida en el sistema, se muestra en la fig. 536. F_1 y F_2 son los focos de la lente y del espejo; $A'B'$ es la imagen proyectada por la lente en el caso, cuando su superficie no está plateada.

La imagen $A''B''$ producida por el espejo cóncavo, puede construirse, conociendo que el rayo BO, después de pasar por la lente y reflejarse de la superficie del espejo, seguirá el trayecto OB'', siendo $\angle BOA = \angle B''OA$. El rayo BC sale de la lente paralelamente al eje óptico del sistema y después de reflexión pasará por F_2. Los rayos reflejados del espejo se refractan en la lente una vez más y producen la imagen $A'''B'''$. El punto B''' se encuentra en la intersección de los rayos OB'' y CD. El rayo OB'' después de reflexión pasa por el centro óptico de la lente y por eso no se refracta. El rayo CD se construye del siguiente modo. Después de la primera refracción en la lente y de la reflexión, el rayo BC seguirá en dirección de F_2 y se refractará

en la lente una vez más. Su dirección, después de la segunda refracción, se halla mediante el método utilizado en el problema 753: a través del centro óptico O hasta la intersección con el plano focal de la lente se traza el rayo OD, paralelo a CF_2. Entonces, uniendo C y D obtenemos el rayo incógnito.

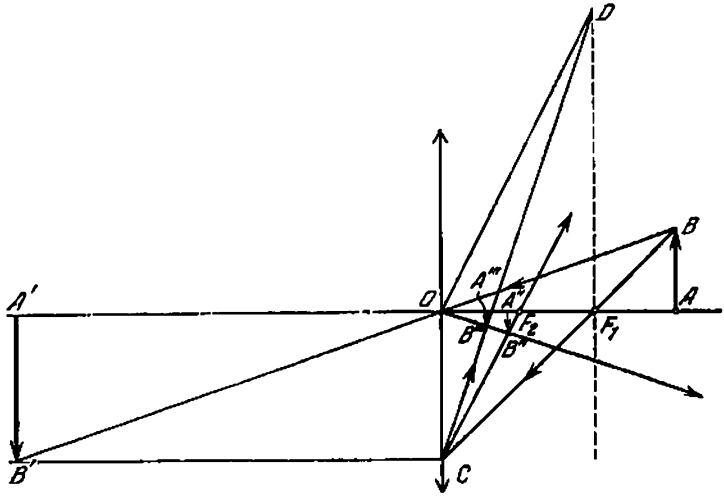


Fig. 536

Como los rayos se refractan en la lente dos veces, la distancia focal f del sistema puede determinarse de la relación (véase el problema 763):

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}+\frac{1}{f_1},$$

donde $f_2 = R/2$ es la distancia focal del espejo. De este modo, $f = f_1f_2/(f_1 + 2f_2) = 2{,}5$ cm. De donde la distancia b hasta la imagen $A'''B'''$ se encuentra por la fórmula

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}.$$

Por lo tanto $b = af/(a - f) = 3$ cm.

775. La convergencia del sistema es igual a la suma de las convergencias de sus componentes (si ellas se encuentran juntas). En el primer caso,

$$\frac{1}{F_1}=(n-1)\frac{1}{R}+(n-1)\frac{1}{R}.$$

En el segundo caso,

$$\frac{1}{F_2} = (n-1)\frac{1}{R} + \frac{2}{R} + (n-1)\frac{1}{R},$$

de donde $F_2 = F_1(1 - 1/n)$.

776. La distancia focal de la lente delgada es $f = \frac{r}{n-1}$, donde r es el radio de la superficie esférica. Supongamos que los rayos se dirijan paralelamente al eje óptico de la superficie esférica e inciden sobre ella desde el aire (fig. 537). Refractándose en

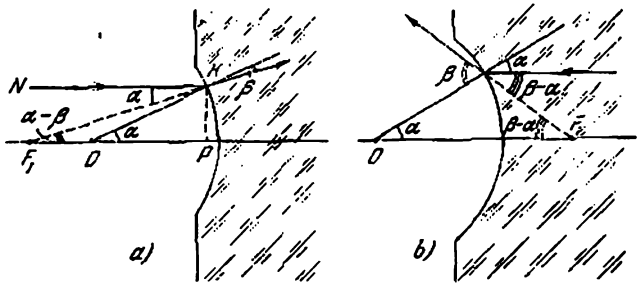


Fig. 537

la superficie el rayo NK se inclina bajo un ángulo $\alpha - \beta$ del eje óptico. Como vemos en la fig. 537, *a*: $OP \cdot \operatorname{tg} \alpha = F_1P \operatorname{tg}(\alpha - \beta)$.
Por la ley de la refracción tenemos: $\operatorname{sen} \alpha / \operatorname{sen} \beta = n$. Debido al hecho de que los ángulos analizados son pequeños, deducimos que $r\alpha \approx f_1(\alpha - \beta)$ y $\alpha = \beta n$. Por lo tanto

$$f_1 = \frac{n}{n-1} r = nf.$$

Si los rayos paralelos inciden del vidrio (fig. 537, *b*), un análisis análogo conduce a las ecuaciones

$$\operatorname{sen} \alpha / \operatorname{sen} \beta = 1/n, \quad r \operatorname{tg} \alpha = f_2 \operatorname{tg}(\beta - \alpha).$$

Gracias al hecho de que los ángulos son pequeños, tenemos $\beta = n\alpha$, $r\alpha = f_2(\beta - \alpha)$. De donde $f_2 = r/(n-1) = f$.

777. Son posibles dos casos: el foco se encuentra fuera de la esfera o dentro de ella. Analicemos inicialmente el primer caso. El

trayecto del rayo que incide sobre la esfera bajo un ángulo i se representa en la fig. 538. Conociendo que los ángulos i y r

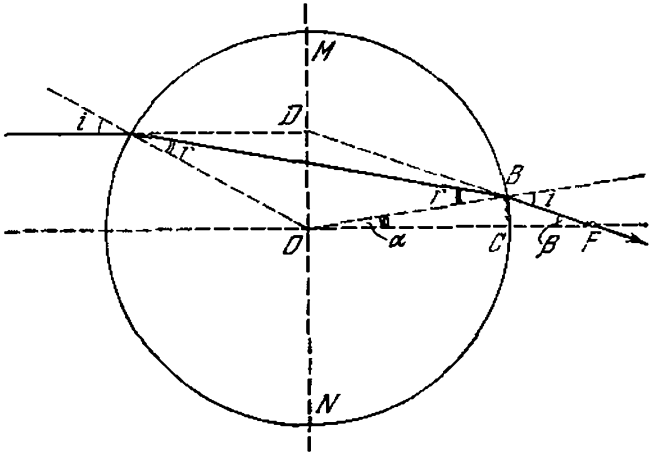


Fig. 538

son pequeños de acuerdo con las condiciones del problema, tendremos

$$BC = R \operatorname{sen} \alpha = R \operatorname{sen} (2r - i) \approx R\,(2r - i) \approx \frac{R \cdot i}{n}\,(2 - n).$$

Es ovidente que el foco se encuentra fuera de la esfera cuando $n < 2$. Si $n = 2$, entonces el foco se encuentra en la superficie

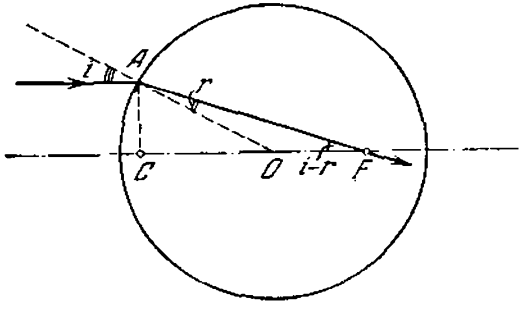


Fig. 539

de la esfera. La distancia

$$CF = BC \cdot \operatorname{ctg} \beta \approx BC/\beta, \quad \beta \approx 2\,(i - r) \approx 2i\,(n-1)/n,$$

podrá determinarse con ayuda de la fig. 538.

La distancia incógnita es $f = R + CF = Rn/2\,(n-1)$. El trayecto del rayo cuando $n > 2$ está representado en la fig. 539. La distancia que buscamos es $f' = OF \approx CF - R$. Como vemos de la fig. 539

$$CF = AC \operatorname{ctg}(i-r) \approx \frac{AC}{i-r} \approx \frac{R \cdot i}{i-r},$$

de donde $f' = Ri/(n-1)$.

778. La refracción de los rayos proyectados por la fuente en la superficie anterior de la esfera se describe por la fórmula

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f_1} = \frac{n-1}{R},$$

donde f_1 es la distancia desde la imagen hasta la superficie anterior. De la superficie posterior (cubierta de plata), la imagen se encuentra a una distancia $2R - f_1$. La reflexión de los rayos en el espejo esférico formado se describe por la fórmula

$$\frac{1}{2R - f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{2}{R}.$$

La nueva imagen se encuentra a una distancia f_2 de la superficie especular posterior y a una distancia $2R - f_2$ de la superficie anterior. El cálculo de la refracción en la superficie anterior se hace por la fórmula

$$\frac{n}{2R - f_2} + \frac{1}{d} = \frac{n-1}{R},$$

donde fue tomado en consideración que la imagen definitiva se obtiene en el aire a una distancia d de la esfera.
Resolviendo el sistema de tres ecuaciones, recibimos que $d_1 = 5R$, $d_2 = -R$. El segundo valor corresponde a la posición de la fuente en el centro de la esfera que contradice a las condiciones del problema.

779. Prolongamos el rayo BF hasta su intersección con la prolongación del rayo que incide en la esfera paralelamente al eje óptico (fig. 538). No es difícil ver que el segmento DO que une el punto de intersección con el centro de la esfera, forma con la dirección del rayo incidente un ángulo recto. El triángulo ODF es rectángulo, puesto que

$$OF \cdot \beta \approx \frac{R}{2} \frac{n}{n-1} \frac{2i\,(n-1)}{n} = R \cdot i$$

(véase el problema 777). Por lo tanto, los planos principales de la esfera MN coinciden y pasan por su centro.

780. La distancia focal de la esfera es

$$f = \frac{R}{2} \frac{n}{n-1} = 15 \text{ cm},$$

(véase los problemas 777 y 779). Utilizando la fórmula de la lente, lo que se permite porque los planos principales coinciden, determinamos la distancia desde el centro de la lente hasta la imagen: $b = af/(a - f) = -15$ cm. La imagen será virtual y se encontrará delante de la esfera.

781. La pared delgada de un recipiente esférico puede considerarse como una lente divergente con distancia focal

$$f_1 = \frac{1}{(n-1)(1/R_1 - 1/R_2)} \approx \frac{R_2}{(n-1)\Delta R}.$$

Pasando por dos lentes de este tipo, situadas a una distancia $2R$ la una de la otra (fig. 540), los rayos paralelos al eje óptico

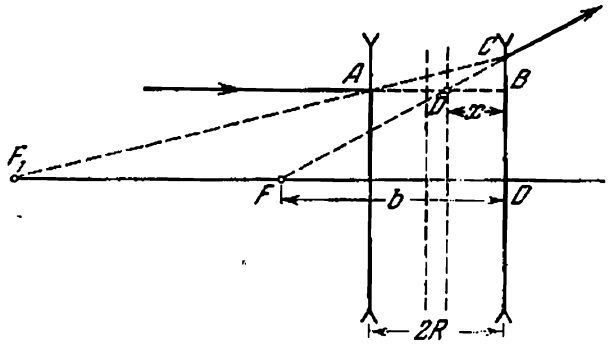


Fig. 540

(al diámetro del recipiente) se refractan de modo que sus prolongaciones se interceptan en el foco F del sistema a una distancia b de la segunda lente; además, por la fórmula de la lente,

$$\frac{1}{f_1 + 2R} - \frac{1}{b} = -\frac{1}{f_1},$$

de donde $b = f_1(f_1 + 2R)/2(f_1 + R)$. El punto D de intersección del segmento AB (prolongación del rayo incidente) y del segmento CF (prolongación del rayo refractado) se encuentra en el plano principal del sistema situado a una distancia x de la segunda lente.

De la semejanza de los triángulos ACB y F_1CO, así como de los triángulos DCB y FCO, deducimos

$$\frac{x}{b} = \frac{2R}{2R + f_1}.$$

El plano principal se encuentra a una distancia

$$x=\frac{2Rb}{2R+f_1}=\frac{f_1R}{f_1+R}$$

de la segunda lente.
Por consiguiente, la distancia focal del sistema es

$$f=b-x=\frac{f_1^2}{2(f_1+R)}\approx\frac{f_1}{2}=\frac{R^2}{2(n-1)\Delta R}.$$

Por fuerza de la simetría del sistema óptico, las posiciones del segundo foco y de otro plano principal son evidentes.

782. Como vemos en la fig. 541 el ángulo de refracción

$$r=\angle OAB=\angle ABO=\angle OBC=\angle OCB \text{ y } \angle BAD=$$
$$=\angle BCD=i-r.$$

En el punto A el rayo gira en un ángulo $i-r$; en el punto B, en un ángulo $\pi-2r$ y en el punto C, en un ángulo $i-r$.

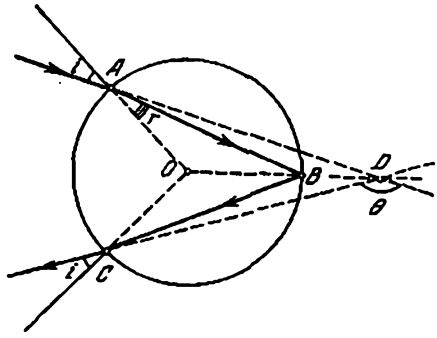


Fig. 541

Por consiguiente, el ángulo total de desviación del rayo respecto a la dirección inicial es

$$\theta=i-r+\pi-2r+i-r=\pi+2i-4r.$$

El ángulo r puede hallarse de la relación: sen i/sen $r=n$.

783. Cuando un haz de rayos paralelos cae sobre la gota, el rayo que pasa a lo largo del diámetro tiene un ángulo de incidencia $i=0°$ y los rayos situados más abajo y más arriba de éste, tienen ángulos de incidencia que toman todos los valores posibles desde 0° hasta 90°.

1) Utilizando los resultados del problema anterior y la ley de refracción, podemos determinar el valor de θ para diferentes i:

Tabla II

i	θ	i	θ
0°	180°	55°	138°20′
20°	160°24′	60°	137°56′
40°	144°40′	65°	138°40′
50°	139°40′	70°	140°44′

2) El gráfico de dependencia de θ respecto a i está representado en la fig. 542.

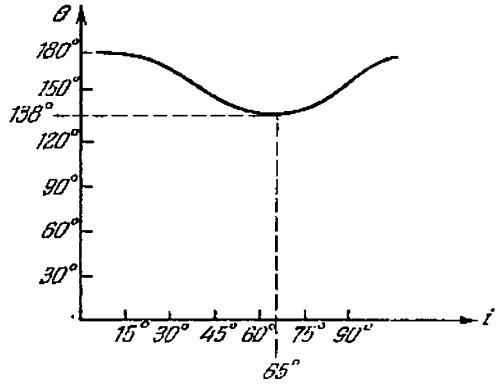


Fig. 542

3) El menor valor del ángulo de desviación es aproximadamente igual a $\theta_{mín} = 138°$. Los rayos que salen de la gota se propagarán aproximadamente de modo paralelo precisamente cuando $\theta = \theta_{mín}$, ya que para esto, como se ve de la tabla y del gráfico, θ varía más lentamente al variar i. El trayecto aproximado de los rayos en la gota está representado en la fig. 543.

784. Hace falta tener un vidrio mate, en primer lugar, para fijar el plano en que se obtiene la imagen y, en segundo lugar, para aumentar el ángulo de visión.
El vidrio transparente se utiliza para analizar una imagen producida por el objetivo, en el microscopio. Para esto en el

vidrio transparente se traza una línea de enfoque del plano, recibiendo en el microscopio una imagen nítida de esta línea y del sector adyacente del cuadro producido por el objetivo. En este caso el vidrio mate no puede utilizarse, ya que en el

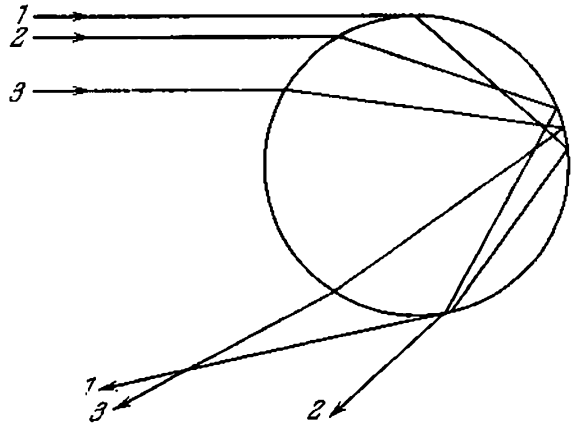


Fig. 543

microscopio se verán todas las deformaciones contenidas en la estructura de la superficie del vidrio mate.

785. 1) Los faroles parecerán igualmente claros, porque la iluminación de la retina del ojo humano $E = BS/b^2$ es igual para ambos faroles (aquí B es la intensidad del farol; S, el área de la abertura de la pupila y b, la distancia desde el cristalino hasta la retina).
2) La imagen de un objeto alejado se encuentra más cerca del objetivo que la imagen de un objeto cercano. Por eso el farol alejado creará una iluminación grande en la lámina fotográfica y su imagen en la fotografía será más clara.

786. La iluminación de la lámina fotográfica es $E \sim S/b^2 \sim \sim A\,(a - f)^2/a^2$, donde $A = d^2/f^2$ es la luminosidad del objetivo; f, la distancia focal; a, la distancia desde el objetivo hasta el objeto fotografiado (véase el problema 785). De ahí es evidente que en una cámara de pequeña distancia focal, la exposición deberá ser menor.

787. Analicemos la dependencia de la iluminación de la imagen. Como cada punto de la fuente alargada emite la luz, el flujo luminoso Φ que incide sobre la lente es proporcional al área de la fuente S_1. Además, el flujo luminoso es proporcional al ángulo sólido ω bajo el cual se ve la lente desde los puntos de la fuente. Si el área de la lente es S_2 y la distancia desde la fuente hasta la lente es d, entonces $\omega = S_2/d^2$. De este modo,

$\Phi = BS_1\omega$, donde el coeficiente de proporcionalidad B caracteriza la iluminación de la fuente.
El flujo luminoso Φ se distribuye por el área de la imagen S_3. Por eso la iluminación de la imagen será

$$E = \frac{\Phi}{S_3} = \frac{BS_1\omega}{S_3} = \frac{BS_1S_2}{S_3d^2}.$$

La relación de las áreas de la fuente y de la imagen es igual a la relación de los cuadrados de sus distancias hasta la lente: $S_1/S_2 = d^2/f^2$. Por consiguiente, la iluminación de la imagen $E = BS_2/f^2$ depende solamente de la distancia f desde la lente hasta la imagen, permaneciendo invariables B y S_2. Aprovechando la fórmula de la lente

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$$

y la relación $k = f/d$, encontramos con facilidad que $f = F(k+1)$. Por lo tanto, la relación incógnita de las iluminaciones es

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{f_1^2}{f_2^2} = \left(\frac{k_1+1}{k_2+1}\right)^2 = 4.$$

788. $F = 2al/(a - 2l) = 60$ cm.

789. La intensidad luminosa de la imagen de una fuente puntual dada no depende de la posición de la pantalla. Por eso $nI(l-f)^2 = I/f^2$. De esta ecuación de segundo grado obtenemos dos valores de f: $f = l/(1 \pm \sqrt{n})$. Utilizando la fórmula de la lente, podemos escribir

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F},$$

y obtenemos para F dos valores:

$$F_1 = \frac{ld}{l + d + d\sqrt{n}} = 12 \text{ cm}, \qquad F_2 = \frac{ld}{l + d - d\sqrt{n}} = 60 \text{ cm}.$$

790. $n = 0{,}75 + 0{,}25\sqrt{E_1/(E_2 - E_1)} = 1{,}25.$

791. Si los rayos inciden primero en la lente convergente de diámetro D (o en una lente que sustituye la lente equivalente), todo el flujo luminoso Φ que pasa por la lente toma parte en la formación de la imagen. Si la lente divergente está en frente, entonces una parte de la luz pasa lejos de la segunda (convergente) lente. El «diámetro activo» d de la lente divergente puede hallarse de la semejanza de los triángulos, aprovechando la fórmula $d = \frac{F}{F+a}D$.
Por eso en la producción de la imagen toma parte el flujo luminoso:

$$\Phi_1 = \left(\frac{F}{F+a}\right)^2 \Phi \approx \frac{\Phi}{2}.$$

El área de la imagen en todos los casos es igual. Por lo tanto, la iluminación de la imagen, en el caso cuando la lente divergente está en frente, será dos veces menor que en otros casos.

792. Las distancias entre el Sol y la Tierra, y entre el Sol y la Luna, son prácticamente iguales. Por eso, si la Luna y la pared tienen el mismo coeficiente de reflexión, entonces la claridad de ellas debería parecer igual. Por consiguiente, podemos considerar que la superficie de la Luna constituye de rocas oscuras.

793. En el aire la córnea convexa exterior del ojo reune los rayos y produce la imagen en la retina. El cristalino sólo le ayuda en esto. El índice de refracción del líquido dentro del ojo es muy semejante al índice de refracción del agua. Por eso la córnea casi no refracta la luz en el agua y el ojo se hace extremadamente hipermétrope. Poniendo la máscara las propiedades de refracción de la córnea se conservan completamente.

794. Viendo objetos alejados mediante las gafas, el hombre los ve como viera sin gafas objetos situados a una distancia $a_2 = 60$ cm. Por eso, para el hombre con gafas (véase la solución del problema 763) tendremos

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}+\frac{1}{f_0},$$

donde $a = \infty$.
Para el hombre sin gafas tendremos

$$\frac{1}{a_2}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f},$$

donde b es la profundidad del ojo; $1/f$, menor convergencia del ojo; $1/f_0$ es la convergencia de las gafas. Se supone que las gafas están puestas muy cerca de los ojos; de donde $f_0 = -a_2$. Determinamos, ahora, la posición del punto más próximo a la acomodación de los ojos con gafas:

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{b_1}=\frac{1}{f_1}, \quad \frac{1}{a^3}+\frac{1}{b_1}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_0},$$

de donde

$$\frac{1}{a_3}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{f_0}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2},$$

y por lo tanto $a_3 = 15$ cm.

795. Usando las gafas de otra persona, el hipermétrope ve nítidamente solamente objetos muy alejados. De este modo, la distancia a_2 de la mejor visión de los ojos de un hipermétrope, se halla de la ecuación

$$\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}=D_1,$$

donde a_1 es una distancia muy grande ($a_1 \to \infty$); D_1, la convergencia de las gafas del miopo.

La convergencia D_2 de las gafas que corrigen el defecto de visión de un hipermétrope, podemos encontrar por la siguiente fórmula:

$$\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_2}=D_2,$$

donde $a_0 = 0{,}25$ m es la distancia de mejor visión para un ojo normal. La distancia a_3 de mejor visión de un miope, se determina por la ecuación

$$\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_3}=D_1.$$

Si el miopo usa las gafas del hipermétrope, entonces la distancia de mejor visión, o sea, la distancia mínima a en que el miope puede leer sin esfuerzo caracteres pequeños, se determina por la fórmula

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{a_3}=D_2$$

Resolviendo estas cuatro ecuaciones, recibimos que $a = 12{,}5$ cm.

796. Al observar un objeto de altura l desde una distancia D, el ángulo de visión φ_1 se determina por la expresión $\varphi_1 = l/D$.

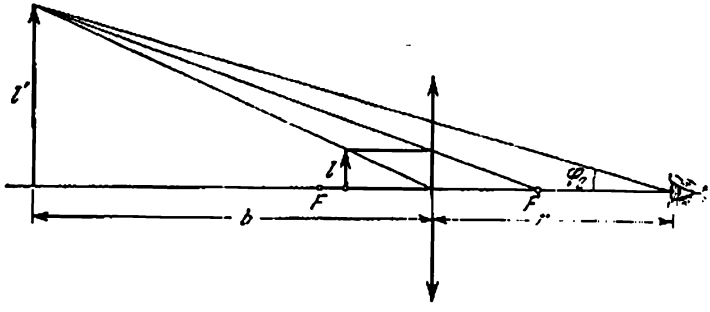


Fig. 544

Si observamos el mismo objeto a través de una lupa, el ángulo de visión será $\varphi_2 l'/(b + r) = l'/L$, donde l' es la altura de la imagen (fig. 544). El aumento angular es

$$N=\varphi_2/\varphi_1=l'D/lL=kD/L,$$

donde $k = l'/l = b/D = (f + b)/f$ es el aumento lineal determinado por la fórmula de la lente (f es la distancia focal). Por

consiguiente,

$$N=\frac{D}{f}\,\frac{b+f}{L}=\frac{D}{f}\,\frac{L-r+f}{L}.$$

1) Si $L=\infty$, $N=\frac{D}{f}$.

2) Si $L=D$, $N=\frac{D}{f}+1-\frac{r}{f}$.

797. El aumento del tubo óptico es $N=f_1/f_2$, donde f_1 es la distancia focal del objetivo y f_2, la distancia focal de ocular. Como el tubo está enfocado para el infinito, la distancia entre el objetivo y el ocular es f_1+f_2, entonces $D/d=(f_1+f_2)/b$, donde b es la distancia desde el ocular hasta la imagen del diafragma. Por la fórmula de la lente

$$\frac{1}{f_1+f_2}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f_2}.$$

Excluyendo b de estas ecuaciones, hallamos que $D/d=f_1/f_2=N$.

798. Las imágenes nítidas de objetos alejados pueden producirse en dos posiciones diferentes de la lente convergente. Podemos

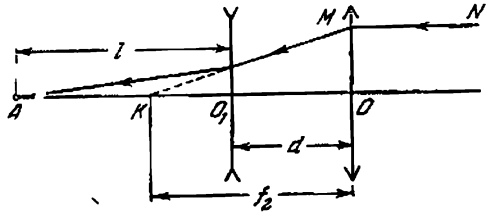


Fig. 545

colocarla antes de la lente divergente o después de ella. Para la primera posición, la distancia d entre las lentes puede hallarse analizando el punto K como la imagen virtual del punto A en la lente divergente (fig. 545):

$$-\frac{1}{f_2-d}+\frac{1}{l}=-\frac{1}{f_1}.$$

El rayo MN es paralelo al eje óptico del sistema. De donde

$$d=f_2-\frac{f_1 l}{f_1+l}=3{,}5\ \text{cm}.$$

Para la segunda posición (la lente convergente se encuentra detrás de la lente divergente) el trayecto de los rayos se repre-

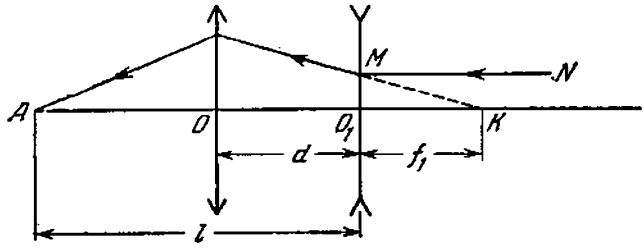


Fig. 546

senta en la fig. 546. Considerando el punto A como la imagen de K en la lente convergente, aplicamos la fórmula de la lente

$$\frac{1}{f_1+d}+\frac{1}{l-d}=\frac{1}{f_2}.$$

De donde

$$d=\frac{l-f_1}{2}\pm\frac{l+f_1}{2}\sqrt{1-\frac{4f_2}{l+f_1}}.$$

La distancia entre las lentes podrá ser igual a $d_2 = 35$ cm o igual a $d_3 = 5$ cm.

799. Supongamos que los rayos que parten de uno de los extremos del diámetro del disco visible de la Luna, estén dirigidos

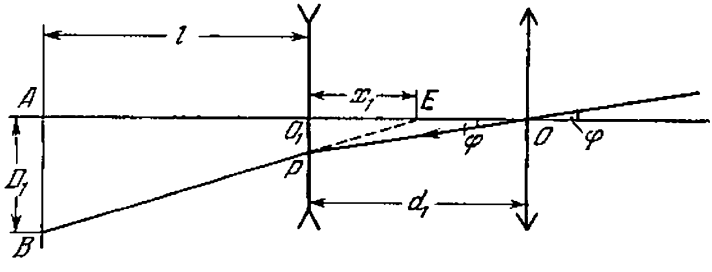


Fig. 547

a lo largo del eje óptico del sistema. Ellos producirán una imagen en el eje óptico en el punto A que se encuentra de la lente divergente a una distancia $l = 45$ cm (fig. 547). Los rayos que parten del otro extremo del diámetro forman con los primeros rayos, por la condición del problema, un ángulo φ. Pasando

por el sistema ellos producirán una imagen (punto B) situada en el plano perpendicular al eje óptico y alejado de la lente divergente a la misma distancia l.
Para hallar el diámetro de la imagen $D_1 = AB$ observemos el trayecto del rayo que pasa a través del centro óptico de la primera lente. En la primera posición de las lentes, la lente convergente se encuentra antes de la lente divergente a una distancia $d_1 = 3{,}5$ cm. En este caso, considerando el punto E como la imagen virtual del punto O, podemos escribir

$$\frac{1}{d_1} - \frac{1}{x_1} = -\frac{1}{f_1}.$$

Valiéndose de la semejanza de los triángulos ABE y O_1PE y teniendo en cuenta que $O_1P = d_1 \operatorname{tg} \varphi$, obtenemos

$$\frac{D_1}{l + x_1} = \frac{d_1 \operatorname{tg} \varphi}{x_1} \approx \frac{d_1 \varphi}{x_1}.$$

Excluyendo x_1 de las ecuaciones dadas, recibimos $D_1 = 0{,}72$ cm. Para la segunda posición de las lentes ($d_2 = 35$ cm), el trayecto

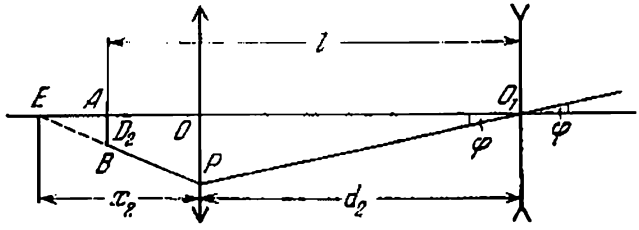


Fig. 548

de los rayos se muestra en la fig. 548. El valor de la imagen de la Luna, D_2, puede determinarse de las ecuaciones

$$\frac{D_2}{(x_2 + d_2) - l} = \frac{d_2 \operatorname{tg} \varphi}{x_2} \approx \frac{d_2 \varphi}{x_2},$$

(analizando los triángulos EOP, EAB y OPO_1),

$$\frac{1}{d_2} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{f_2},$$

(analizando E como la imagen de O_1); de donde $D_2 \approx 0{,}011$ cm. Para la tercera posición ($d_3 = 5$ cm), el trayecto de los rayos será un poco diferente (fig. 549) al que se muestra en la fig. 548.

Las ecuaciones para determinar D_3 se escribirán, por analogía con los casos anteriores, del siguiente modo

$$\frac{D_3}{(l-d_3)+x_3}=\frac{d_3\,\mathrm{tg}\,\varphi}{x_3}\approx\frac{d_3\varphi}{x_3},$$

$$\frac{1}{d_3}-\frac{1}{x_3}=\frac{1}{f_2},$$

de donde $D_3 = 0{,}18$ cm.

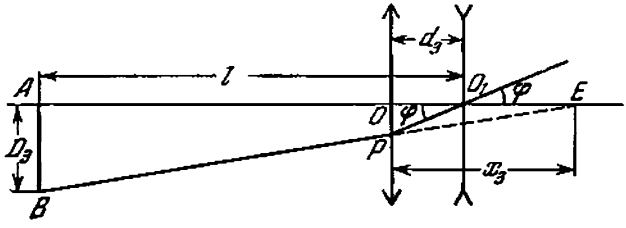


Fig. 549

800. De la fórmula de la lente

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{F_{\mathrm{obj}}}$$

se deduce que el aumento del objetivo es $k_1 = b/a = F_{\mathrm{obj}}/(a - F_{\mathrm{obj}}) = 30$. La imagen real inversa y aumentada del objeto, producida por el objetivo, se ve a través del ocular como a través de una lupa; además, en primer caso, la imagen virtual dada por la lupa se encuentra a una distancia $D = 25$ cm de los ojos. Por la fórmula de la lupa

$$\frac{1}{a_1}-\frac{1}{D}=\frac{1}{F_{\mathrm{oc}}},$$

donde a_1 es la distancia de la imagen producida por el objetivo hasta el ocular. El aumento del ocular es $k_2 = D/a_1 = (D + F_{\mathrm{oc}})/F_{\mathrm{oc}} = 6$. El aumento total del microscopio es $k = k_1k_2 = 180$ veces. En el segundo caso, $k_2 = D/F_{\mathrm{oc}} = 5$ y $k = k_1k_2 = 150$ veces.

Capítulo VI

Optica física

§ 32. INTERFERENCIA DE LA LUZ

801. No. La presencia de los mínimos de iluminación en el cuadro de interferencia significa que la energía luminosa no llega a esta región del espacio.

802. En un punto arbitrario de la pantalla C observaremos un máximo de iluminación, si la diferencia de los recorridos de los

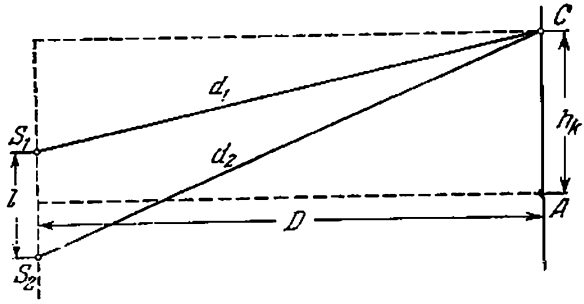


Fig. 550

rayos es $d_2 - d_1 = k\lambda$, donde $k = 0, 1, 2, \ldots$ son números enteros (fig. 550). Por el teorema de Pitágoras

$$d_2^2 = D^2 + (h_k + l/2)^2, \quad d_1^2 = D^2 + (h_k - l/2)^2.$$

De donde

$$d_2^2 - d_1^2 = (d_2 + d_1)(d_2 - d_1) = 2h_k l.$$

De acuerdo con la condición del problema $d_2 + d_1 \approx 2D$. Por consiguiente, $d_2 - d_1 = k\lambda \approx 2h_k l/2D$. La distancia de k-ésima franja luminosa desde el centro de la pantalla es $h_k = k\lambda D/l$. La distancia entre las franjas es $\Delta h = h_{k+1} - h_k = \lambda D/l$.

803. La distancia entre las franjas de interferencia es $\Delta h = \frac{\lambda D}{l}$ (véase el problema 802). En el caso dado $D = AB \approx a + b$, y $l = S_1S_2$ es la distancia entre las imágenes S_1 y S_2 de la

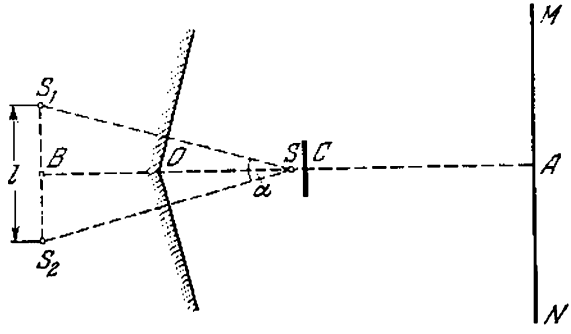


Fig. 551

fuente S en los espejos planos (fig. 551); l puede hallarse del triángulo S_1SB:

$$l/2 = 2b\alpha/2, \quad \text{o} \quad l = 2b\alpha.$$

Por lo tanto, $\Delta h = \lambda (a + b)/2b\alpha$.

804. La segunda fuente coherente se obtiene en el experimento de Lloyd mediante la reflexión de los rayos del espejo AO. En la reflexión tiene lugar un cambio de fase en π (pérdida de una semionda), por eso en el punto O, donde debe observarse una franja clara tendrá lugar amortecimiento de las oscilaciones de la onda, o sea, el mínimo de iluminación. En comparación con el problema 802, todo el cuadro acabará desplazándose en la anchura de la franja clara (o oscura).

805. El crecimiento de la iluminación en la pantalla se produce cuando la diferencia de recorridos de rayos es $d_2 - d_1 = k\lambda$. El lugar geométrico de los puntos de la pantalla hasta los cuales los rayos llegan de ambas fuentes con esta diferencia de recorridos de rayos es una circunferencia con centro en el punto A (fig. 552). Por consiguiente, las franjas de interferencia serán circunferencias concéntricas.
En el caso cuando $l = n\lambda$ en el punto A observaremos un aumento de la iluminación (un máximo de interferencia de enésima orden). La franja clara de interferencia más próxima (circunferencia) de $(n - 1)$-ésima orden se encuentra del punto A a una distancia hallada de la ecuación

$$d_2 - d_1 = \sqrt{(n\lambda + D)^2 + h_{n-1}^2} - \sqrt{D^2 + h_{n-1}^2} = (n-1)\lambda.$$

Teniendo en cuenta la condición del problema que $\lambda \ll D$, $\lambda \ll l$, recibimos

$$h_{n-1} \approx \sqrt{\frac{2D(D+n\lambda)}{n}} = \sqrt{2D\lambda\left(\frac{D}{l}+1\right)}.$$

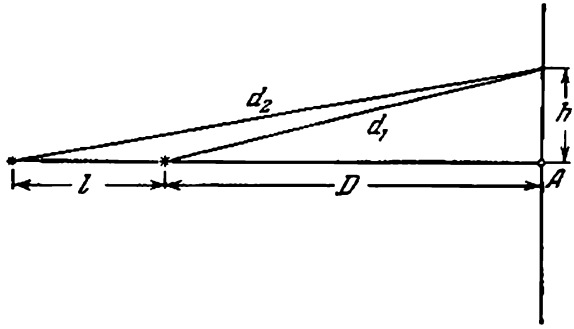


Fig. 552

806. La diferencia de recorridos de rayos para el k-ésimo anillo claro es

$$d_2 - d_1 = \sqrt{(2n\lambda)^2 + r_k^2} - \sqrt{(n\lambda)^2 + r_k^2} = k\lambda,$$

de donde

$$r_k = \frac{\lambda}{2k}\sqrt{(9n^2-k^2)(n^2-k^2)}.$$

807. Para recibir una segunda fuente coherente situada más cerca de la pantalla que la primera, podremos utilizar una lámina semitransparente con un orificio. Basándose en el principio de Huyghens, el orificio puede considerarse como una fuente secundaria. En la pantalla se producirá un cuadro de interferencia. Si la distancia entre las fuentes es grande, entonces, para recibir un cuadro de interferencia, hace falta tener una fuente que emita ondas muy próximas a las ondas monocromáticas.

808. A fin de encontrar la distancia incógnita Δh es necesario previamente calcular la distancia l entre las fuentes virtuales S_1 y S_2, situadas en la intersección de las prolongaciones de los rayos refractados por las caras del prisma. Para esto es más fácil analizar el recorrido del rayo que incide normalmente sobre la cara del prisma (fig. 553). En realidad este rayo no existe, pero podemos construirlo aumentando mentalmente el prisma hacia abajo. Todos los rayos refractados por el prisma de una fuente puntual, pueden considerarse convergentes en un

punto y esta construcción es absolutamente admisible. Como el ángulo refringente del prisma es pequeño (el prisma es delgado), las imágenes virtuales S_1 y S_2 de la fuente pueden considerarse equidistantes del prisma igualmente como la fuente S.

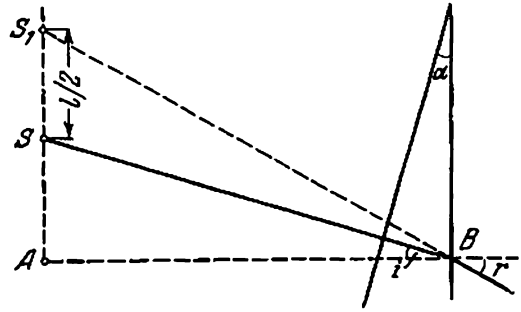


Fig. 553

Como vemos en la fig. 553, $i = \alpha$ y $SA = a\alpha$. De acuerdo con la ley de refracción tenemos $r \approx n\alpha$. Analizando el triángulo AS_1B podemos escribir

$$\frac{l}{2} + \alpha \approx a\alpha n,$$

de donde $l = 2a\alpha(n-1)$. Aprovechando la solución del problema 802, hallamos

$$\Delta h = \frac{\lambda D}{l} = \frac{\lambda(a+b)}{2a\alpha(n-1)} = 0{,}15 \text{ cm}.$$

809. $N = L/\Delta h$, donde L es la anchura del cuadro de interferencia. Como se ve de la fig. 260, $L = (b/a)\,l$. Utilizando los resultados del problema anterior, obtenemos

$$N = \frac{4ab\alpha^2(n-1)^2}{(a+b)\lambda} \approx 5.$$

810. El biprisma hecha de una substancia con índice de refracción n_2, desvía los rayos en un ángulo

$$\varphi_1 = (90° - \beta/2)(n_2 - n_1),$$

donde n_1 es el índice de refracción del medio de donde inciden los rayos. Para el biprisma que se encuentra en el aire

$$\varphi_2 = (90° - \delta/2)(n_2 - 1).$$

En el caso de equivalencia de los biprismas tenemos $\varphi_1 = \varphi_2$, de donde

$$\delta = \beta\,\frac{n_2 - n_1}{n_2 - 1} + 180°\,\frac{n_1 - 1}{n_2 - 1}.$$

Para los valores dados en las condiciones del problema, tenemos $\delta \approx 179°37'$.

811. El recorrido de los rayos en el sistema se representa en la fig. 554. S_1 y S_2 son las imágenes de la fuente S en las mitades de la lente. Es evidente que $b = fa/(a - f)$. De la semejanza

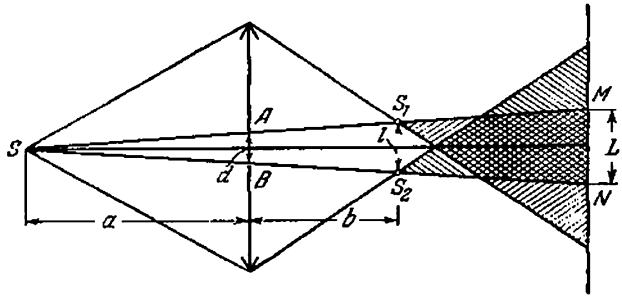


Fig. 554

de los triángulos SAB y SS_1S_2 podemos encontrar la distancia l entre S_1 y S_2: $l = ad/(a - f)$. La distancia entre las franjas de interferencia vecinas en la pantalla es

$$\Delta h = \frac{\lambda (D - b)}{l} = \frac{\lambda}{ad} (Da - Df - af) = 10^{-2} \text{ cm}$$

(véase el problema 802). El número de franjas de interferencia que buscamos es

$$N = \frac{L}{\Delta h} = \frac{d (D + a)}{a \Delta h} = 25.$$

812. La distancia entre las imágenes virtuales S_1 y S_2 puede hallarse por el método expuesto en la resolución del problema 811 (fig. 555). La distancia entre las franjas de interferencia es

$$\Delta h = \frac{\lambda (Df - Da + Af)}{da}.$$

El número de franjas en la pantalla es $N = L/\Delta h$, donde $L = Dl/b$ es la dimensión del sector de la pantalla donde se observan las franjas de interferencia. De donde

$$D = \frac{Nabf\lambda}{adl + abN\lambda - bfN\lambda} = 15 \text{ cm}.$$

El número máximo posible de franjas se encuentra de la condición

$$adl + Nab\lambda - bfN\lambda = 0$$

(en este caso $D \to \infty$). Por consiguiente,

$$N_{\text{máx}} = \frac{adl}{bf\lambda - ab\lambda} = 5.$$

El número de franjas obtenido es finito, ya que a medida que alejamos la pantalla junto con el aumento de las dimensiones

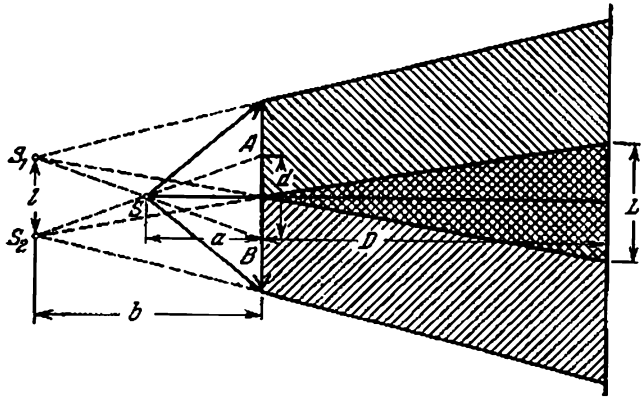


Fig. 555

del sector de la pantalla en que surge el cuadro de interferencia, crece la distancia entre las franjas.

813. La distancia entre las franjas de interferencia no dependerá de la posición de la pantalla sólo en el caso cuando la fuente se encuentra en el plano focal de la lente. Esto se deduce directamente de la expresión

$$\Delta h = \frac{\lambda}{ab}(Df - Da + af).$$

que fue recibido en el proceso de la solución del problema 812. Si $a = f$, entonces $\Delta h = \lambda f/d = 10^{-2}$ cm para cualquier D.

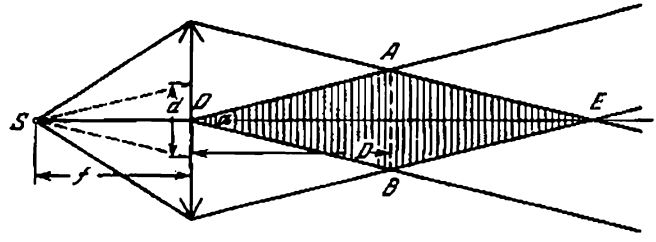


Fig. 556

El trayecto de los rayos para el caso dado se representa en la fig. 556. Como se ve de esta figura, el número de franjas de

interferencia será máximo cuando la pantalla ocupará la posición AB. La distancia entre la pantalla y la lente puede hallarse del triángulo OAB, conociendo que el ángulo $\alpha \approx d/f$, y $AB = R: D = Rf/d = 2$ m.

814. Dentro del vidrio la longitud de la onda luminosa disminuye en n veces, puesto que la frecuencia no cambia y la velocidad disminuye en n veces. Como consecuencia de ello, entre las ondas coherentes en los haces surge una diferencia de recorridos de rayos adicional. En la distancia d_1 en el haz superior caben $k_1 = d_1 n/\lambda$ longitudes de ondas y en el haz inferior, a la misma distancia, caben $k_2 = d_2 n/\lambda + (d_1 - d_2)/\lambda$ longitudes de ondas. Las ondas luminosas en cualquier punto de la pantalla serán desplazadas complementariamente, la una con relación a la otra, en $k_1 - k_2$ longitudes de ondas. Debido a ello todo el cuadro de interferencia se moverá hacia arriba en $k_1 - k_2 = \frac{d_1 - d_2}{\lambda}(n - 1) = 100$ franjas. El proceso de desplazamiento puede observarse en el momento de introducción de las láminas. Al introducirse las láminas, el cuadro de interferencia en la pantalla recuperará la forma anterior.

815. El espesor de la lente es muy grande. La interferencia tiene lugar sólo en el caso de las películas finas. La capa de aire en las cercanías del contacto de la lente y del vidrio es muy delgada.

816. No, no cambiará. La diferencia de recorridos de rayos entre las ondas que se encuentran en la pantalla producidas por las fuentes S y S_1 ó S y S_2, es muy grande. En estas condiciones los espectros de diferentes órdenes que corresponden al intervalo espectral de la fuente se sobreponen el uno sobre el otro de modo semejante al que tiene lugar durante la reflexión de las ondas de las superficies de separación de una película gruesa. Si retiramos la cortina esto conducirá apenas a la superposición sobre el cuadro de interferencia de las fuentes S_1 y S_2 una iluminación que cambia monótonamente.

817. Al observar los anillos en la luz reflejada la intensidad de los haces que se interfieren es aproximadamente igual. Al pasar la luz de un haz que no sufrió reflexiones, la intensidad de un haz supera considerablemente la intensidad del segundo haz que sufrió dos reflexiones. Como resultado los máximos y los mínimos surgen en un fondo de iluminación uniforme, la extinción completa de la luz no tendrá lugar y todo el cuadro tendrá el menor contraste que en el caso de la luz reflejada.

818. En la ausencia del contacto el radio del quinto anillo se determina por la ecuación: $r_1^2/R + 2d = 5\lambda$. Si limpiamos el polvo, el radio de este anillo se hallará por la igualdad $r_2^2/R = 5\lambda$, de donde $d = (r_2^2 - r_1^2)/2R = 1{,}8 \cdot 10^{-4}$ cm.

819. $$r_k = \sqrt{\frac{k\lambda}{1/R_2 - 1/R_1}}.$$

820. Para disminuir el coeficiente de reflexión es necesario que los rayos 1 y 2 (fig. 557), reflejados por las superficies externa e interna de la película colocada en un vidrio óptico, extingan el uno al otro. La extinción tendrá lugar para las condiciones:

$$2hn = (2k+1)\frac{\lambda}{2}, \qquad (1)$$

donde $k = 0, 1, 2, \ldots$ De ahí resulta que el grosor mínimo de la película es $h_{\text{mín}} = \lambda/4n$. La condición (1) no puede ser

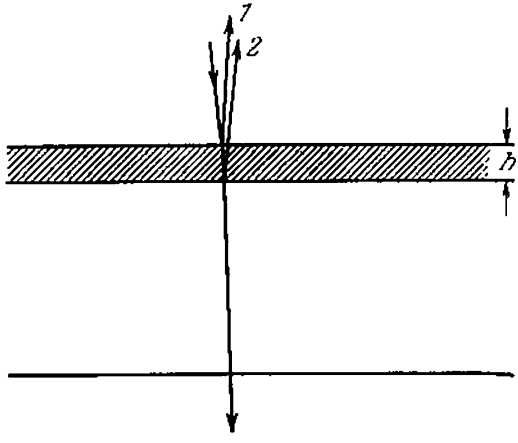


Fig. 557

válida para todas las longitudes de ondas. Por eso de ordinario h se escoge de modo para que se extinga la parte media del espectro. La película puesta tendrá un espesor que supere $h_{\text{mín}}$ en un número impar de veces, ya que las películas gruesas se preparan con más facilidad que las películas finas (en un cuarto de longitud de onda).

821. Para observar el cuadro de interferencia hace falta que el máximo de k-ésimo orden que corresponde a la longitud de onda λ no se sobreponga por el máximo de $(k+1)$-ésimo orden que corresponde a la longitud de onda $\lambda + \Delta\lambda$, donde $\Delta\lambda = 100$ Å. Esto se realizará en las condiciones cuando $(\lambda + \Delta\lambda)\,k \leqslant \lambda\,(k+1)$, de donde $k \leqslant \lambda/\Delta\lambda$. El espesor máximo admisible de la capa $h_{\text{máx}}$ satisface la ecuación $2h_{\text{máx}} = (\lambda + \Delta\lambda)\,k_{\text{máx}}$, donde $k_{\text{máx}} = \lambda/\Delta\lambda$. Si en calidad de λ escogemos una longitud de onda que corresponde al medio de la parte visible del espectro ($\lambda = 5\,000$ Å), entonces $h_{\text{máx}} \approx 1{,}3 \cdot 10^{-3}$ cm.

Si en el lugar de la capa de aire utilizamos una película fina que tiene un índice de refracción n, entonces el espesor máximo deberá ser n veces menor que en la capa de aire.

822. Durante la interferencia de los rayos 1 y 2 (fig. 558) reflejados de diferentes caras de la cuña, la condición del mínimo se escribirá de la siguiente forma: $2hn = k\lambda$ ($k = 0, 1, 2$). Como el ángulo α es pequeño, $h \approx x\alpha$. Por consiguiente, la distancia

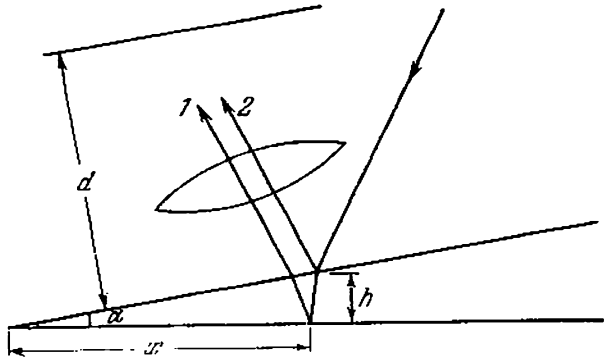


Fig. 558

entre las franjas de interferencia en la propia cuña será $\Delta x = \lambda/2\alpha n$.

De acuerdo con la fórmula del aumento de la lente $\Delta x/\Delta l = a/b$, donde a es la distancia desde la pantalla hasta la lente y b, la distancia desde la lente hasta la cuña. Como $b = d - a$, entonces, por la fórmula de la lente, tenemos

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{d-a}=\frac{1}{f}.$$

Excluyendo de estas expresiones a y b, determinamos el valor incógnito del ángulo α:

$$\alpha=\frac{\lambda}{2n\,\Delta l}\,\frac{d\mp\sqrt{d^2-4fd}}{d\pm\sqrt{d^2-4fd}}.$$

Este problema tiene dos soluciones que está relacionado con el hecho de que una imagen nítida en la pantalla, estando fijos d y f, puede obtenerse para dos posiciones de la lente.

§ 33. DIFRACCION DE LA LUZ

823. El radio de la primera zona de Fresnel puede determinarse de los triángulos ADE y DEB (fig. 559): $r_1^2 = a^2 - (a - x)^2 = (b + \lambda/2)^2 - (b + x)^2$. Como la longitud de onda es pequeña, entonces $x = b\lambda/2(a + b)$. Por consiguiente, $r_1^2 = 2ax - x^2$. Prescindiendo de x^2 por ser un valor pequeño, recibimos definitivamente que $r_1 = \sqrt{ab\lambda/(a + b)}$.

De un modo análogo podemos hallar los radios de las zonas de Fresnel consecuentes. Para la zona número k, tenemos $r_k = \sqrt{abk\lambda/(a+b)}$.

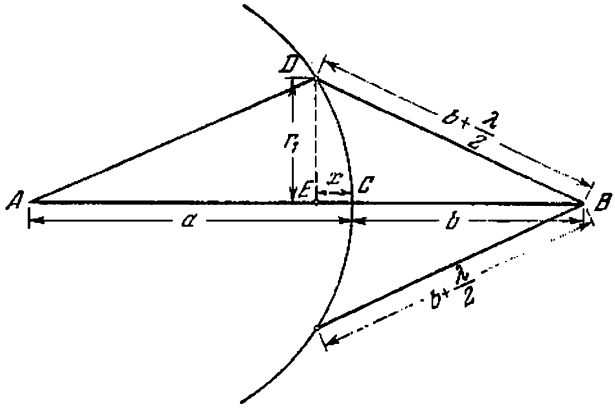


Fig. 559

824. A una onda plana corresponde una distancia desde la fuente puntual hasta el frente de onda, es decir, $a \to \infty$. Los radios incógnitos de las zonas serán

$$r_k = \lim_{a\to\infty} \sqrt{abk\lambda/(a+b)} = \sqrt{kb\lambda}$$

(véase la resolución del problema 823).

825. Para resolver el problema es necesario calcular el número k de zonas de Fresnel que caben en las aberturas de diámetros D y D_1. Utilizando los resultados del problema 823, recibimos que $\sqrt{kab\lambda/(a+b)} = D/2$, de donde determinamos con facilidad que $k = 3$ (número impar). Como el diámetro de la abertura mide 5,2 mm, en ella caben aproximadamente 4 zonas (números par). De este modo, el aumento de la abertura conduce a la disminución de la iluminación en el punto B.

826. La mancha oscura en el eje del haz, al estar abiertas 4 zonas de Fresnel, está circundada por anillos claros y oscuros. Al aumentar la abertura la iluminación resultante de la pantalla crece, pero la distribución de la energía luminosa por la pantalla cambia de modo que en el centro ella será mínima.

827. La iluminación incógnita será máxima en el caso cuando en el diafragma quepa una zona de Fresnel. Tomando en consideración la solución del problema 824, tendremos que $D = 2\sqrt{b\lambda} = 0{,}2$ cm.

828. La difracción será percibida si en la abertura cabe un número pequeño de zonas de Fresnel, es decir, el radio de la abertura será del mismo orden (o menor) que el radio de la primera zona de Fresnel:

$$\sqrt{ab\lambda/(a+b)} \geqslant R,$$

donde R es el radio de la abertura. Si $a = b$, tendremos $a\lambda \geqslant 2R^2$.

829. En la fig. 560 vemos construcciones de las zonas de Fresnel que permiten determinar la intensidad de la luz en el punto B.

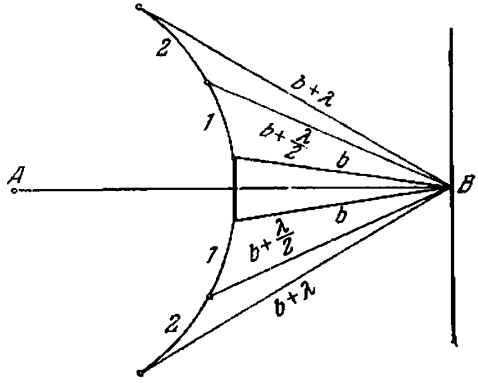


Fig. 560

La iluminación en el punto B se crea por la primera y por las siguientes zonas de Fresnel. Si las dimensiones de la pantalla no superan sensiblemente el radio de la primera zona central que se halla por la fórmula del problema 823, entonces en el punto B obligatoriamente aparecerá una mancha luminosa con iluminación que se diferencia poco de la iluminación que existiría en la ausencia de la pantalla.

830. Aproximadamente de 3 m.

831. En el caso dado es más conveniente escoger las zonas de Fresnel en forma de franjas paralelas a los bordes de la abertura estrecha. En dirección φ se observará un mínimo en el caso cuando en la abertura AB (fig. 561) quepa un número par de zonas. (En la fig. 561 se muestran 4 zonas de Fresnel). $b = 2kx$, donde x es la anchura de la zona de Fresnel, $k = 1, 2, 3, \ldots$, AK es la diferencia de recorridos entre los rayos extremos emitidos por una zona

$$AK = x \operatorname{sen} \varphi = \lambda/2,$$

de donde $x = \lambda/2$ sen φ. Por lo tanto en dirección φ se observará un mínimo si b sen $\varphi = k\lambda$.

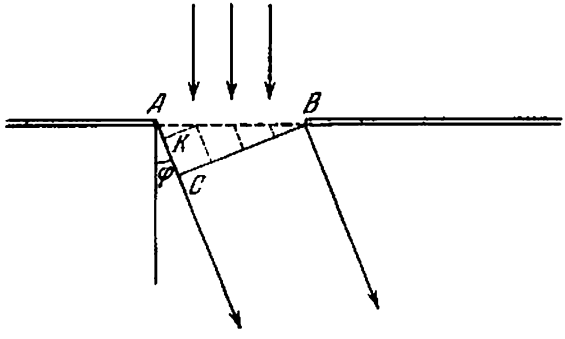


Fig. 561

832. Los rayos de una fuente puntual alejada que inciden sobre el orificio de la cámara son aproximadamente paralelos. Si no tuviera lugar la difracción, las dimensiones de la mancha luminosa serían iguales a $AB = 2r$ (fig. 562). Debido a la

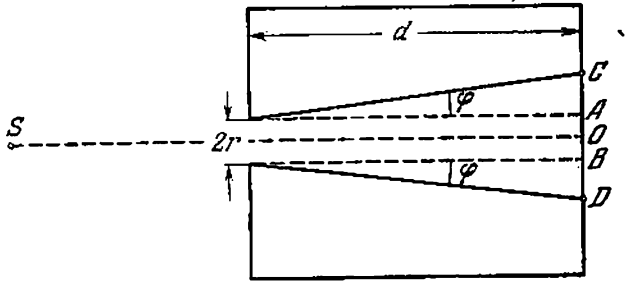


Fig. 562

difracción, las dimensiones de la mancha aumentan hasta DC. La distancia OC se halla por el ángulo φ que da la dirección hacia el primer mínimo (anillo oscuro). Conforme a las indicaciones tenemos $2r$ sen $\varphi \approx \lambda$. Por consiguiente el radio de la mancha es

$$OC = r + AC = r + d \text{ sen } \varphi \approx r + d\lambda/2r.$$

Este valor alcanza un mínimo cuando $r = \sqrt{\lambda d/2r}$. Las dimensiones óptimas del orificio son $r = \sqrt{\lambda d/2}$.

833. Los ángulos que determinan las direcciones hacia los máximos de segundo y tercer órdenes satisfacen las ecuaciones

$$d \operatorname{sen} \varphi_2 = 2\lambda$$

y

$$d \operatorname{sen} \varphi_3 = 3\lambda$$

De donde

$$\lambda = d(\operatorname{sen} \varphi_3 - \operatorname{sen} \varphi_2) = 2d \cos \frac{(\varphi_2 + \varphi_3)}{2} \operatorname{sen} \frac{(\varphi_3 - \varphi_2)}{2} \approx$$

$$\approx d(\varphi_3 - \varphi_2) = d\alpha \approx 1{,}7 \cdot 10^{-5} \text{ cm}.$$

834. El $\operatorname{sen} \varphi = 1$ corresponde al máximo k. Por consiguiente, $k = d/\lambda = 4$.

835. A fin de recibir un espectro de primer orden es necesario que se verifique la condición $d \gg \lambda$. Por lo tanto el período incógnito de la rejilla no puede ser menor que 0,02 cm.

836. La dirección hacia el primer máximo se determina por la expresión $d \operatorname{sen} \varphi = \lambda$. La pantalla se encuentra en el plano focal de la lente. Considerando el ángulo φ pequeño, tendremos que $l = f\varphi$, de donde $\lambda = dl/f = 5 \cdot 10^{-5}$ cm.

837. En el agua la longitud de todas las ondas disminuye en n veces (n es el índice de refracción del agua). Por consiguiente, los ángulos φ que determinan las direcciones hacia los máximos, y las distancias desde el centro del cuadro de difracción hasta los máximos, correspondientes a diferentes longitudes de ondas, también disminuyen en n veces, ya que, por las condiciones del problema, los ángulos φ son pequeños y $\operatorname{sen} \varphi \approx \varphi$.

838. Los espectros de diferentes órdenes tendrán el contacto a condición de que $k\lambda_2 = (k + 1)\lambda_1$; de donde $k = \lambda_1/(\lambda_2 - \lambda_1) = 5$. Por lo tanto podrán sobreponerse en parte solamente los espectros de sexto y séptimo orden. Pero la rejilla dada (véase el problema 834), puede dar para el intervalo de longitudes de ondas dado sólo espectro de cuarto orden. Por eso, en este caso, los espectros no se sobrepondrán.

839. Cuando los rayos inciden de modo inclinado sobre la rejilla bajo un ángulo θ (fig. 563), la diferencia de trayectos entre las ondas que van de los bordes de las aberturas vecinas, será

$$\delta = BD - AC = d \operatorname{sen} \varphi - d \operatorname{sen} \theta.$$

Estas ondas sumándose refuerzan la una a la otra, cuando

$$d(\operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen} \theta) = k\lambda,$$

donde $k = 1, 2, 3, \ldots$ para los máximos situados a la derecha del máximo central ($k = 0$) y $k = -1, -2, -3, \ldots$ para los máximos situados a la izquierda del máximo central.

Un espectro de mayor orden tendremos para $\varphi = -90°$. Entonces, $d(-1 - 1/2) = k\lambda$; de donde $k = -6$. Podemos obser-

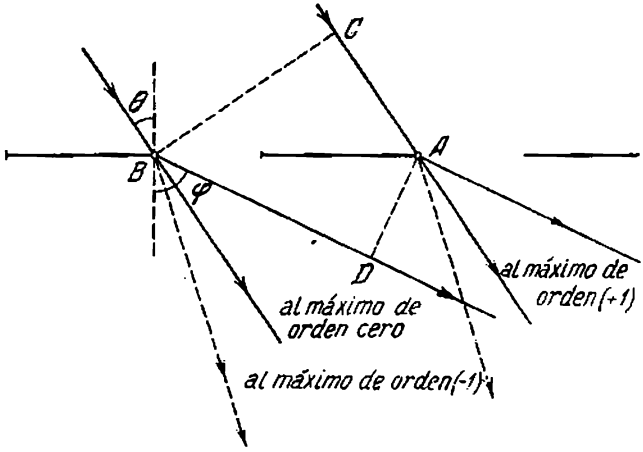


Fig. 563

var un espectro de sexto orden. El signo «menos» indica que el espectro se encuentra a la izquierda del central.

840. Como deducimos de la fórmula: $d(\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\theta) = k\lambda$ (véase la solución del problema 839), el valor mínimo del período de la rejilla tendremos en la incidencia deslizada de los rayos: $\theta = 90°$. En este caso, $d \approx \lambda/2$. Por consiguiente, el período de la rejilla deberá satisfacer la desigualdad $d \gg \lambda/2$.

841. En el caso general, como se ha demostrado en la solución del problema 839, la condición que buscamos tiene la forma

$$d(\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\theta) = k\lambda.$$

Esta condición puede escribirse del siguiente modo:

$$2d\cos\frac{\varphi+\theta}{2}\operatorname{sen}\frac{\varphi-\theta}{2} = k\lambda.$$

Si $d \gg k\lambda$, entonces $\varphi \approx \theta$. En este caso tenemos

$$\cos\frac{\varphi+\theta}{2} \approx \cos\theta. \quad \operatorname{sen}\frac{\varphi-\theta}{2} \approx \frac{\varphi-\theta}{2}.$$

Por consiguiente la condición que determina las direcciones hacia los máximos principales, tendrá la forma

$$(d\cos\theta)(\varphi - \theta) \approx k\lambda.$$

La constante de la rejilla cambia como si hubiera disminuido y se hiciera igual a $d\cos\theta$ en vez de d. Los ángulos $\varphi - \theta$ se miden desde la dirección de la luz incidente.

§ 34. DISPERSION DE LA LUZ Y COLORES DE LOS CUERPOS

842. Como fue demostrado en el problema 730 el ángulo de incidencia α, el ángulo refringente del prisma φ y el índice de refracción n se relacionan con el ángulo β con que el rayo sale del prisma, por la expresión

$$n = \operatorname{sen}\beta \sqrt{\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\varphi} + \operatorname{ctg}\varphi\right)^2 + 1}.$$

De donde para sen β obtenemos la siguiente ecuación

$$\operatorname{sen}^2\beta\,(1+\operatorname{ctg}^2\varphi) + 2\operatorname{sen}\beta\,\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\varphi\operatorname{tg}\varphi} + \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\varphi} - n^2 = 0,$$

o (para los valores dados de α y φ)

$$2\operatorname{sen}^2\beta + \sqrt{2}\operatorname{sen}\beta + \frac{1}{2} - n^2 = 0.$$

Resolviendo esta ecuación, hallamos

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{-1 \pm \sqrt{4n^2-1}}{2\sqrt{2}}.$$

Solamente la solución positiva tiene sentido físico. Para los rayos rojos sen $\beta_{\text{rojo}} \approx 0{,}26$. Por consiguiente, $\beta_{\text{rojo}} \approx 15°6'$. Para los rayos violeta sen $\beta_{\text{viol}} \approx 0{,}31$ y $\beta_{\text{viol}} \approx 18°6'$. El ángulo incógnito es $\theta = \beta_{\text{viol}} - \beta_{\text{rojo}} \approx 3°$.

843. Para los rayos rojos la distancia focal de la lente es $f_{\text{rojo}} = R/2\,(n_{\text{rojo}} - 1) \approx 27$ cm; para los rayos violeta es $f_{\text{viol}} =$

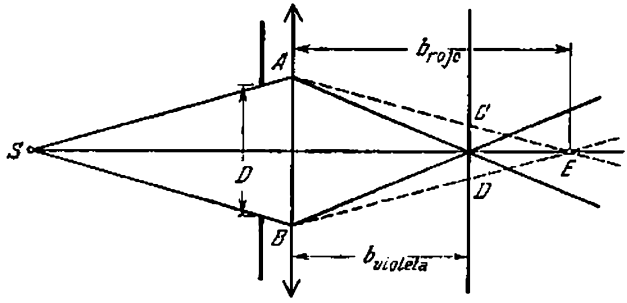


Fig. 564

$= 25$ cm. Por la fórmula de la lente, la imagen producida por los rayos rojos, se encontrará a una distancia $b_{\text{rojo}} = af_{\text{rojo}}/(a - f_{\text{rojo}}) = 58{,}7$ cm; por los rayos violeta, a una distancia $b_{\text{viol}} = 50$ cm. En la pantalla (fig. 564) la imagen

de la fuente tendrá la forma de una mancha con bordes rojos. El diámetro de la mancha d puede hallarse de la semejanza de los triángulos ABE y CDE: $d = D\,(b_{rojo} - b_{violi})/b_{rojo} \approx$ $\approx 0{,}15$ cm.

844. Los rayos solares que inciden en una gota de lluvia pueden considerarse paralelos. Al salir de la gota, después de una pequeña reflexión en la superficie interna de ésta, los rayos siguen todas las direcciones. Solamente los rayos que sufren una desviación mínima continuarán aproximadamente paralelos. Es precisamente por eso que estos rayos, alcanzando los

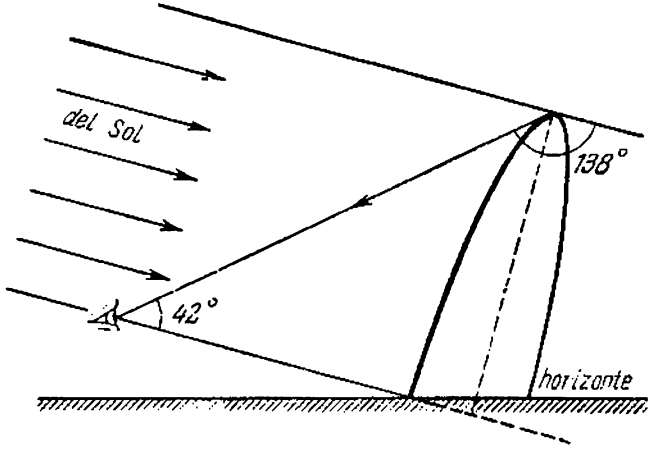


Fig. 565

ojos provocan una impresión visual mayor. Estos rayos poseen, hablando en sentido figurado, una «densidad» máxima. Los demás rayos se dispersan hacia todos los lados. Para los rayos paralelos, el ángulo de desviación, como fue demostrado en el problema 783, es igual a 138°. Por consiguiente, el ángulo entre los rayos incidentes del Sol y la dirección hacia el arco iris es igual a 42° (para la luz roja) (fig. 565).
Los ojos se ven alcanzados por la luz de las gotas que se encuentran en dirección que forma un ángulo de 42° con la línea trazada entre los ojos y el Sol. Para los rayos violeta este ángulo es aproximadamente igual a 40°.

845. El primer arco iris (fundamental) se observa gracias a los rayos que sufren una reflexión dentro de las gotas de agua. Durante la refracción los rayos violeta se desplazan más sensiblemente con relación a la dirección inicial (véase el problema 782) ($\angle\theta$ crece con el aumento de n, puesto que r disminuye), por eso el arco iris exterior será rojo y el interior, violeta. El segundo arco iris se produce por los rayos que sufren dos reflexiones dentro de las gotas. El trayecto aproximado del rayo se muestra

en la fig. 566. La dirección hacia el arco iris forma un ángulo de 51° con la línea que une los ojos y el Sol, como podemos demostrar. La alternación de los colores durante dos refracciones y dos reflexiones se obtiene de modo inverso: el arco iris

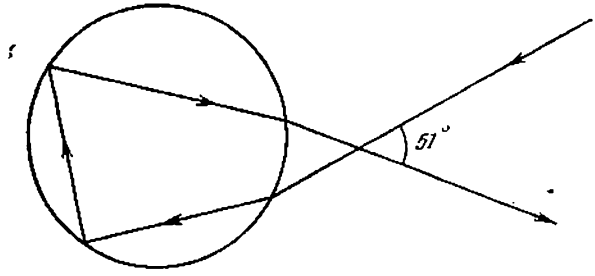


Fig. 566

exterior será violeta y el interior será rojo. Después de dos reflexiones la intensidad luminosa resulta bastante débil y debido a ello el segundo arco iris será mucho menor intenso que el primero.

846. La latitud geográfica de Moscú, es decir, el ángulo entre el plano del Ecuador y la normal a la superficie del globo terrestre

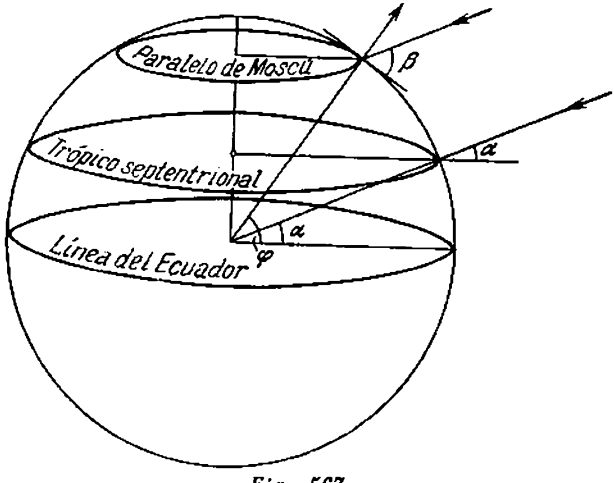


Fig. 567

es $\varphi = 56°$. En este momento el Sol se encuentra en el zenit sobre el trópico norte (latitud $\alpha = 23{,}5°$). Por consiguiente, el ángulo entre la dirección hacia el Sol y el horizonte (fig. 567) es

$$\beta = 90° - \varphi + \alpha = 57°30',$$

El arco iris será visto solamente en el caso cuando la altura del Sol sobre el horizonto no supere a 42° (véase la fig. 565). Por lo tanto es imposible ver un arco iris en el tiempo indicado.

847. Nuestros ojos reciben la sensación de uno u otro color, cuando sus partes sensibles se excitan por la onda luminosa de una frecuencia determinada. La frecuencia de las ondas luminosas no cambiará al pasar de un medio para el otro.

848. Es necesario mirar a través del vidrio verde. En este caso, la escritura se verá en un color negro sobre el fondo verde del papel, porque el vidrio verde no permite pasar el color rojo de la palabra «perfecto». Al mirar a través del vidrio rojo la escritura roja no se verá sobre el fondo rojo del papel.

849. El objetivo refleja especialmente las partes extremas del espectro visible: roja y violeta (véase el problema 820). De la combinación de estos colores aparece la tonalidad lilácea.

850. Los colores del arco iris son colores espectrales puros (véase el problema 844), ya que en dirección dada se ve solamente el rayo de una longitud de onda determinada. Los colores de las películas finas, al inverso, se obtienen gracias a la extinción (total o parcial) de los rayos de un cierto intervalo espectral como resultado de interferencia. El color de la película será adicional al color de este intervalo espectral.

851. Bajo la acción de la fuerza de gravedad, el agua de jabón fluye para la parte inferior de la película que siempre es más gruesa que la superior. Por lo tanto, las franjas que indican el lugar geométrico de los puntos de un mismo espesor, deberán estar en una posición horizontal. La tonalidad azul (verde-azulada) se obtiene por la exclusión del espectro completo de la parte de ondas largas (roja anaranjada) (véase el problema 850). Al extinguirse la parte media (verde) del espectro, los rayos que permanecen comunican a la película una tonalidad purpúrea (carmesí) y al retirar del espectro contínuo su parte de ondas cortas (azul violeta), la película tendrá una tonalidad amarilla. Si la diferencia de trayectos de los rayos que se extinguen mutuamente se constituye del mismo número de semiondas en todos tres casos, entonces deberá existir arriba una faja amarilla, a seguir, purpúrea y abajo, azul.

852. A la luz azulada, dispersa durante el día por el cielo, se suma la luz amarilla de la propia Luna. Esta mezcla de colores se ve por los ojos humanos como un color blanco. Después de la puesta del Sol, la luz azul del cielo se debilita y la Luna adquiere una tonalidad amarillenta.

853. Nosotros veremos el humo sobre un fondo oscuro, porque éste dispersa los rayos solares incidentes en él. Las partículas del humo dispersan mucho más la luz azul que la roja o amarilla. Por eso, el color del humo parece ser azul. Sobre el fondo del cielo claro el humo se ve en la luz que pasa. El humo parece ser amarillo, porque la luz azul se dispersa para todos los lados

y solamente el sector de ondas largas del espectro de la luz blanca alcanza los ojos.

854. Una capa fina de agua que cubre un objeto húmedo refleja la luz blanca incidente en una dirección determinada. La superficie del objeto ya no dispersa la luz blanca para todos los lados y su propio color se hace dominante. La luz dispersa no se sobrepone en la luz reflejada del objeto, y por eso el color parece ser más intenso.

A NUESTROS LECTORES:

«Mir» edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción. Dirijan sus opiniones a la Editorial «Mir», 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.

Alexéev A.,

Problemas de electrodinámica clásica

En el libro escrito por el profesor A. Alexéev, Doctor en Ciencias Físicomatemáticas, hay cerca de 500 problemas que abarcan todas las partes de la teoría del campo electromagnético que estudian los procesos electromagnéticos y el movimiento de las cargas en el vacío. Los diferentes métodos para la solución de problemas electrodinámicos presentados en el libro ayudarán a dominar la técnica de cálculos prácticos propios a la física teórica.

Muchos problemas tienen una solución detallada. A cada capítulo trae una breve introducción teórica y en el apéndice se da la información necesaria de consulta sobre análisis vectorial, cálculo tensorial y funciones especiales.

El presente manual es el primer compendio amplio y especializado en problemas de la electrodinámica en el vacío (de la teoría clásica del campo) que se estudia en los centros docentes superiores técnicos como una parte del curso de la física teórica. Contiene,

en general, problemas originales. Los ejercicios tipo conocidos se dan en forma modificada para ilustrar la metodología de la solución. En el manual se refleja la rica experiencia pedagógica del autor quien durante muchos años ha dictado el curso de la física teórica en el instituto de ingeniería física de Moscú. Además el autor es un conocido físicoteórico cuya obra es estimada a nivel de los más altos círculos científicos del mundo.

El manual está destinado ante todo a los estudiantes de centros docentes superiores pedagógicos de ingeniería física y técnicos que estudian electrodinámica según el programa ordinario de estudios. Los problemas de elevada complejidad están destinados a los estudiantes que se especializan en la física teórica y a los postgraduados. Esta obra le es además útil también a los ingenieros y científicos que estudian individualmente la teoría del campo magnético.

Kotkin G., Serbo V.

Problemas de mecánica clásica

La mecánica clásica es interesante no sólo como tal sino también porque es la introducción a la física teórica. Es natural que se debe empezar por los problemas relativamente sencillos. Así, al estudiar la dispersión de partícula pueden surgir preguntas sobre la influencia de la radiación, sobre el rozamiento, etc. Otra cosa es el estudio del movimiento de partículas en condiciones idealizadas de una manera determinada y dadas con una exactitud suficiente. El manual contiene precisamente problemas de este tipo.

El grado de difucultad de los problemas es distinto: hay desde ejercicios sencillos hasta problemas a nivel de una pequeña investigación científica. En el manual se tratan las principales partes de la mecánica clásica: movimiento de partículas en los campos dados, dispersión de partículas, pequeñas oscilaciones, movimiento del cuerpo sólido, ecuaciones de Lagrange, Hamilton, Hamilton-Jacobi, transformaciones canónicas e invariantes adiabáticas.

El libro está destinado a estudiantes, postgraduados y profesores de las especialidades físicas y de ingeniería física.